PIETRO DONATIS

APPUNTI DI ANALISI

Premessa e notazioni

Questi appunti coprono tutti gli argomenti di analisi matematica svolti al quinto anno di un liceo scientifico.

Una rapida scorsa all'indice mostra tuttavia che il materiale presentato va ben oltre ciò; si è ritenuto comunque utile presentare tutto ciò che è necessario ad una completa comprensione di tutti gli argomenti, dimostrazioni comprese. Si pensi per esempio alle successioni e alla teoria degli insiemi compatti, indispensabili per la comprensione del teorema di Weierstrass; o al concetto di continuità uniforme, indispensabile alla dimostrazione dell'integrabilità delle funzioni continue. Viene lasciata al lettore la scelta di quali argomenti ritenere superflui.

In questi appunti si considerano prerequisiti, e quindi noti, i seguenti argomenti: insiemi e loro proprietà, nozioni elementari di logica e uso dei simboli logici; operazioni algebriche definite negli insiemi $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$; relazioni in generale e in particolare relazioni di equivalenza e di ordine; rette e coniche sul piano cartesiano; trigonometria e proprietà delle funzioni goniometriche; proprietà delle funzioni esponenziali e logaritmiche; equazioni e disequazioni goniometriche, esponenziali e logaritmiche; calcolo combinatorio, coefficienti binomiali e conoscenza dell'uso del simbolo $\sum$.

Se non diversamente indicato, con il simbolo log si intende logaritmo naturale.

All'inizio di ogni dimostrazione ne viene indicato il tipo: costruttiva, per assurdo, per contrapposizione o per induzione.

Il simbolo $\square$ indica la fine di una dimostrazione.

Questa dispensa è stata scritta usando il programma di composizione tipografica LaTeX; per le figure è stato usato il pacchetto pstricks .

Bibliografia

Nel compilare queste note ho consultato i seguenti libri.

De Marco Giuseppe, Analisi uno, seconda edizione, 1996, Decibel editrice, Padova.

Richard Ubaldo, Lezioni di analisi matematica, parte prima, tomi primo e secondo, 1980, Cedam, Padova.

Prodi Giovanni, Analisi matematica, 1970, Boringhieri, Torino.

Smirnov Vladimir Ivanovič, Corso di matematica superiore, volume primo, 2011, Editori Riuniti Unversity Press, Roma.

Antoniali Fabio Maria, Appunti di analisi infinitesimale, 2011.

Marastoni Corrado, Analisi matematica I, 2009, pubblicato sul sito
www.math.unipd.it/~maraston/Analisi1/

Palermo, 10 agosto 2021

INDICE

1

I NUMERI REALI

1.1. Definizione assiomatica dei numeri reali

Si consideri un insieme numerico $\mathcal{K}$ con le seguenti proprietà.

1. **Proprietà algebriche.**
   In $\mathcal{K}$ sono definite una somma $+$ e un prodotto $\cdot$ con le seguenti proprietà

   A1 L'addizione è associativa:
   $$\forall a, b, c \in \mathcal{K} \qquad , \qquad a + (b + c) = (a + b) + c \ .$$

   A2 La somma ammette un elemento neutro, detto *zero* ed indicato con 0, tale che
   $$\forall a \in \mathcal{K} \qquad , \qquad a + 0 = 0 + a = a \ .$$

   A3 Per ogni elemento a di $\mathcal{K}$ esiste un elemento opposto, indicato da $-a$ tale che
   $$\forall a \in \mathcal{K} \qquad , \qquad a + (-a) = -a + a = 0 \ .$$

   A4 La somma è commutativa:
   $$\forall a, b \in \mathcal{K} \qquad , \qquad a + b = b + a \ .$$

   Queste quattro proprietà definiscono in $\mathcal{K}$ la struttura di *gruppo commutativo* rispetto all'addizione.

   A5 Il prodotto è associativo:
   $$\forall a, b, c \in \mathcal{K} \qquad , \qquad a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c \ .$$

   A6 Il prodotto ammette elemento neutro, detto *unità* ed indicato con 1, tale che
   $$\forall a \in \mathcal{K} \qquad , \qquad a \cdot 1 = 1 \cdot a = a \ .$$

   A7 Per ogni elemento a di $\mathcal{K}$ diverso dallo zero esiste un elemento inverso, indicato da a^{-1} tale che
   $$\forall a \in \mathcal{K} \qquad , \qquad a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1 \ .$$

   A8 Il prodotto è commutativo:
   $$\forall a, b \in \mathcal{K} \qquad , \qquad a \cdot b = b \cdot a \ .$$

   A9 Il prodotto è distributivo rispetto alla somma:
   $$\forall a, b, c \in \mathcal{K} \qquad , \qquad a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + a \cdot c \ .$$

   Le proprietà A1–A9 definiscono in $\mathcal{K}$ la struttura di *corpo commutativo*.

2. **Proprietà ordinali.**
   Fra gli elementi di $\mathcal{K}$ è definita una relazione d'ordine indicata con $\leq$ con le seguenti proprietà

O1 Riflessiva:

$$\forall a \in \mathcal{K} \qquad , \qquad a \leq a \ .$$

O2 Transitiva:

$$\forall a, b, c \in \mathcal{K} \qquad , \qquad a \leq b \quad \text{e} \quad b \leq c \quad \longrightarrow \quad a \leq c \ .$$

O3 Antisimmetrica:

$$\forall a, b \in \mathcal{K} \qquad , \qquad a \leq b \quad \text{e} \quad b \leq a \quad \longrightarrow \quad a = b \ .$$

O4 Ordine totale:

$$\forall a, b \in \mathcal{K} \qquad , \qquad a \leq b \quad \text{o} \quad b \leq a \ .$$

O5 Compatibilità con la somma:

$$\forall a, b, c \in \mathcal{K} \qquad , \qquad a \leq b \quad \longrightarrow \quad a + c \leq b + c \ .$$

O6 Compatibilità con il prodotto:

$$\forall a, b, c \in \mathcal{K}, c \geq 0 \qquad , \qquad a \leq b \quad \longrightarrow \quad a \cdot c \leq b \cdot c \ .$$

Un insieme numerico $\mathcal{K}$ con le proprietà A1–O6 è detto *corpo commutativo totalmente ordinato* (spesso, piú brevemente, *corpo ordinato*).

3. **Completezza ordinale.**
Si premette una comoda notazione. Dati due sottoinsiemi non vuoti A e B di $\mathcal{K}$, si scrive $A \leq B$ se presi comunque $a \in A$ e $b \in B$ vale $a \leq b$; si scrive $c \leq A$ se $c \in \mathcal{K}$ è tale che, scelto comunque $a \in A$ vale $c \leq a$. Simili definizioni hanno i simboli $A < B$, $A \geq B$, $a > A$ eccetera.

CO Siano A e B due sottoinsiemi di $\mathcal{K}$, entrambi non vuoti e tali sia $A \leq B$, allora esiste $\xi \in \mathcal{K}$ tale che $A \leq \xi \leq B$.

Un tale elemento ξ è detto *elemento separatore* di A e B; in generale l'elemento separatore non è unico, ma se è unico i due insiemi A e B si dicono *contigui*.

Un corpo commutativo totalmente ordinato $\mathcal{K}$ che abbia anche la proprietà CO si dice *corpo completo*.

Definizione 1.1. Si dice insieme dei *numeri reali*, e si indica con il simbolo $\mathbb{R}$ ogni corpo completo.

Alcuni sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ sono di uso molto comune e conviene introdurre per essi un'apposita notazione.

Definizione 1.2. Si dice insiemi dei *reali positivi* l'insieme $\mathbb{R}_+ \subset \mathbb{R}$ definito da:

$$\mathbb{R}_+ = \{x \mid x \in \mathbb{R}, x \geq 0\} \ .$$

Si dice insiemi dei *reali negativi* l'insieme $\mathbb{R}_- \subset \mathbb{R}$ definito da:

$$\mathbb{R}_- = \{x \mid x \in \mathbb{R}, x \leq 0\} \ .$$

Si dice insiemi dei *reali non nulli* l'insieme $\mathbb{R}^* \subset \mathbb{R}$ definito da:

$$\mathbb{R}^* = \{x \mid x \in \mathbb{R}, x \neq 0\} \ .$$

Sono molto usati anche i seguenti simboli di evidente significato.

$$\mathbb{R}^*_+ = \mathbb{R}_+ \cap \mathbb{R}^* \quad , \quad \mathbb{R}^*_- = \mathbb{R}_- \cap \mathbb{R}^* \ .$$

Teorema 1.1. *L'insieme $\mathbb{Q}$ dei numeri razionali non è completo.*

Dimostrazione (per contrapposizione)
Si considerino i due insiemi

$$A = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 \leq 2\} \qquad , \qquad B = \{x \in \mathbb{Q} \mid x > 0, x^2 \geq 2\} \ ,$$

è chiaro che sono non vuoti, infatti per esempio $1 \in A$ e $2 \in B$ ed evidentemente vale $A \leq B$. Si deve dimostrare che non esiste un elemento separatore ξ, tale cioè che valga $A \leq \xi \leq B$.
Non può essere $\xi^2 < 2$; infatti poiché $\xi \in \mathbb{Q}$, esistono due naturali positivi m ed n tali che $\xi = \frac{m}{n}$; si avrebbe allora

$$m^2 < 2n^2 \ . \tag{1.1}$$

Sommando ad entrambi i membri di questa disuguaglianza la quantità $8m^2 + 24mn + 16n^2$, si trova

$$9m^2 + 24mn + 16n^2 < 8m^2 + 24mn + 18n^2 \quad \longrightarrow \quad (3m + 4n)^2 < 2(2m + 3n)^2$$

e quindi

$$\frac{(3m + 4n)^2}{(2m + 3n)^2} < 2 \ ;$$

pertanto il numero razionale $a = \frac{3m+4n}{2m+3n}$ appartiene a A. Ora moltiplicando per 2 e sommando $3mn$ a entrambi i membri della disuguaglianza (1.1), si ottiene

$$2m^2 + 3mn < 3mn + 4n^2 \quad \longrightarrow \quad m(2m + 3n) < n(3m + 4n) \quad \longrightarrow \quad \frac{m}{n} < \frac{3m + 4n}{2m + 3n}$$

cioè

$$\xi < a$$

contro l'ipotesi che sia $\xi \geq A$.
Non può essere $\xi^2 > 2$; in tal caso si avrebbe infatti

$$m^2 > 2n^2 \ ;$$

con lo stesso $a = \frac{3m+4n}{2m+3n}$ si trovano le relazioni (il facile calcolo simile al precedente è lasciato al lettore studioso):

$$a^2 > 2 \qquad , \qquad \xi > a \ ;$$

la prima relazione dice che $x \in B$, la seconda è contro l'ipotesi che sia $\xi \leq B$.
Non può essere $\xi^2 = 2$; in tal caso si avrebbe infatti

$$m^2 = 2n^2 \ .$$

Ora m e n, utilizzando la proprietà invariantiva delle frazioni, possono essere scelti in modo da non essere entrambi pari; ma per l'equazione precedente m^2 è certamente pari e quindi lo è anche m, esiste pertanto un naturale p tale sia $m = 2p$ e quindi $m^2 = 4p^2$; sostituendo questa nell'equazione precedente si trova $4p^2 = 2n^2$, quindi $n^2 = 2p^2$, quindi n^2 è pari e quindi è pari anche n contro l'ipotesi che m ed n non siano entrambi pari. □

1.2. Alcune nozioni ordinali

Definizione 1.3. Il sottoinsieme A di un corpo ordinato $\mathcal{K}$ si dice *limitato superiormente* se esiste un numero $\alpha \in \mathcal{K}$ tale che

$$\forall\, x \in A, \quad x \leq \alpha \ ,$$

in tal caso, α è detto *maggiorante* (o *restrizione superiore*) di A.
Se il maggiorante appartiene ad A viene detto *massimo* di A e si indica con $\max(A)$.
Il sottoinsieme A di un corpo ordinato $\mathcal{K}$ si dice *limitato inferiormente* se esiste un numero $\beta \in \mathcal{K}$ tale che

$$\forall\, x \in A, \quad x \geq \beta \ ,$$

in tal caso, β è detto *minorante* (o *restrizione inferiore*) di A.
Se il minorante appartiene ad A viene detto *minimo* di A e si indica con $\min(A)$.
Se il sottoinsieme A non ammette maggiorante o minorante si dice, rispettivamente, superiormente o inferiormente illimitato. Se non è né superiormente né inferiormente limitato si dice illimitato, senza altra specificazione.

Definizione 1.4. Dato un sottoinsieme A del corpo ordinato $\mathcal{K}$, si dice *estremo superiore* di A, e si indica con $\sup(A)$, un numero λ con le seguenti proprietà:

1. λ è maggiorante di A, cioè $\forall\, x \in A, \quad x \leq \lambda$;
2. $\forall\, \epsilon > 0 \quad \exists\, x \in A \quad$ tale che $\quad x > \lambda - \epsilon$.

Definizione 1.5. Dato un sottoinsieme A del corpo ordinato $\mathcal{K}$, si dice *estremo inferiore* di A, e si indica con $\inf(A)$, un numero μ con le seguenti proprietà:

1. μ è minorante di A, cioè $\forall\, x \in A, \quad x \geq \mu$;
2. $\forall\, \epsilon > 0 \quad \exists\, x \in A \quad$ tale che $\quad x < \mu + \epsilon$.

Teorema 1.2. *Se un sottoinsieme A del corpo ordinato $\mathcal{K}$ ammette estremo superiore (inferiore) esso è unico.*

Dimostrazione (per assurdo)
Si supponga che, oltre all'estremo superiore λ ve ne sia un secondo λ' con $\lambda > \lambda'$, allora valgono

$$\forall\, x \in A \qquad x \leq \lambda \quad , \quad x \leq \lambda' \tag{1.2}$$
$$\forall\, \epsilon > 0 \quad \exists\, x \in A \quad \text{tale che} \quad x > \lambda - \epsilon \quad , \quad x > \lambda' - \epsilon\ . \tag{1.3}$$

Sommando membro a membro le due disequazioni della (1.2) si trova

$$2x \leq \lambda + \lambda' \qquad \longrightarrow \qquad x \leq \frac{\lambda + \lambda'}{2}\ . \tag{1.4}$$

Scelto $\epsilon = \frac{\lambda - \lambda'}{2} > 0$ e sostituito nella prima delle (1.3) si ottiene

$$x > \lambda - \frac{\lambda - \lambda'}{2} = \frac{\lambda + \lambda'}{2}\ ,$$

che è incompatibile con la (1.4); poiché ciò è assurdo, un sottoinsieme di un corpo ordinato non può avere piú di un estremo superiore. Similmente si dimostra che, se esiste, è unico l'estremo inferiore. □

Teorema 1.3. *Se un sottoinsieme A del corpo ordinato $\mathcal{K}$ ammette estremo superiore (inferiore) esso è il minore dei maggioranti (maggiore dei minoranti).*

Dimostrazione (per assurdo)
Sia $\lambda = \sup(A)$ e sia, per assurdo, $\lambda' < \lambda$ maggiorante di A; valgono allora

$$\forall\, x \in A \qquad x \leq \lambda \quad , \quad x \leq \lambda' \tag{1.5}$$
$$\forall\, \epsilon > 0 \quad \exists\, x \in A \quad \text{tale che} \quad x > \lambda - \epsilon\ . \tag{1.6}$$

Scelto $\epsilon = \lambda - \lambda' > 0$ e sostituito nella (1.6) si trova

$$x > \lambda - (\lambda - \lambda') = \lambda'\ ,$$

che è incompatibile con la seconda delle (1.5); poiché ciò è assurdo un maggiorante non può essere minore dell'estremo superiore. Similmente si dimostra che l'estremo inferiore è il maggiore dei minoranti. □

Corollario 1.4. Se l'estremo superiore (inferiore) di A appartiene ad A ne è il massimo (minimo).

Teorema 1.5. *Per $\mathbb{R}$ le seguenti affermazioni sono equivalenti.*

1. *$\mathbb{R}$ è completo;*
2. *se l'insieme $A \subset \mathbb{R}$ è non vuoto e superiormente limitato allora esiste $\sup(A)$ in $\mathbb{R}$;*
3. *se l'insieme $A \subset \mathbb{R}$ è non vuoto e inferiormente limitato allora esiste $\inf(A)$ in $\mathbb{R}$.*

Dimostrazione (costruttiva)
$1 \Longrightarrow 2$. Sia $A \subset \mathbb{R}$ non vuoto e sia $A^\star$ l'insieme dei maggioranti di A, anch'esso non vuoto; allora $A \leq A^\star$. Poiché $\mathbb{R}$ è completo esiste $\xi \in \mathbb{R}$ tale che sia $A \leq \xi \leq A^\star$, allora si deve dimostrare che $\xi = \sup(A)$, cioè che $\xi = \inf(A^\star)$. Infatti poiché $\xi \geq A$ si ha $\xi \in A^\star$, ma vale anche $\xi \leq A^\star$ quindi $\xi = \min A^\star$. Perfettamente analoga, e viene lasciata alla cura del lettore studioso, è la dimostrazione che $1 \Longrightarrow 3$.
$2 \Longrightarrow 1$. Siano $A, B \subset \mathbb{R}$, non vuoti e tali che sia $A \leq B$, allora si deve dimostrare che ammettono un elemento separatore in $\mathbb{R}$. A è non vuoto e superiormente limitato quindi, per ipotesi, esiste $\xi = \sup(A)$ e quindi $A \leq \xi$; d'altra parte $A \leq B$ quindi $B \subset A^\star$ e cosí $\xi = \min(A^\star) \leq B$; quindi $A \leq \xi \leq B$. Perfettamente analoga, e viene lasciata alla cura del lettore studioso, è la dimostrazione che $3 \Longrightarrow 1$. □

Il seguente teorema e il relativo corollario caratterizzano gli insiemi contigui.

Teorema 1.6. *Se A e B, sottoinsiemi non vuoti di $\mathbb{R}$, con $A \leq B$, sono contigui se e solo se per ogni $\epsilon > 0$ esistono $a \in A$ e $b \in B$ tali che $b - a < \epsilon$.*

Dimostrazione (per assurdo)
Dimostrazione della sufficienza. Se esistesse un ϵ tale che valga $\epsilon \leq b - a$ per ogni $a \in A$ e $b \in B$, allora posto $c = a + \alpha\epsilon$, con $0 < \alpha < 1$ si avrebbe

$$a < a + \alpha\epsilon = c < a + \epsilon \leq b \ ,$$

e quindi tutti i c risulterebbero elementi separatori di A e B contro l'ipotesi che essi siano contigui.
Dimostrazione della necessità. Se A e B non fossero contigui allora esisterebbero almeno due elementi separatori c_1 e c_2; sia $c_1 < c_2$. Vale quindi $a \leq c_1 < c_2 \leq b$, e in particolare valgono

$$b \geq c_2 \qquad , \qquad c_1 \geq a \ ;$$

sommando queste due disuguaglianze membro a membro si trova

$$b + c_1 \geq a + c_2 \qquad \longrightarrow \qquad b - a \geq c_2 - c_1 = \epsilon$$ □

contro l'ipotesi che sia $b - a < \epsilon$ per ogni $\epsilon > 0$.

Corollario 1.7. Se A e B, sottoinsiemi non vuoti di $\mathbb{R}$, con $A \leq B$, sono contigui se e solo $\sup(A) = \inf(B)$.

Definizione 1.6. Un corpo ordinato $\mathcal{K}$ si dice *denso* in senso ordinale se scelti comunque $a, b \in \mathcal{K}$ esiste $c \in \mathcal{K}$ compreso fra a e b.

Teorema 1.8. *Se $\mathcal{K}$ è denso in senso ordinale fra due qualsiasi elementi di $\mathcal{K}$ esistono infiniti elementi di $\mathcal{K}$.*

Dimostrazione (costruttiva)
Ovvia. □

Teorema 1.9. *I corpi $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$ sono densi in senso ordinale.*

Dimostrazione (costruttiva)
Ovvia. □

Teorema 1.10. *Tra due razionali esiste sempre un reale irrazionale. Tra due reali esiste sempre un razionale.*

Dimostrazione (costruttiva)
Siano x, y due razionali tali che sia $x < y$; allora il reale irrazionale richiesto è $z = \frac{y-x}{\sqrt{2}} + x$.
Siano x, y due reali tali che sia $x < y$; si scelga un naturale n tale che sia $\frac{1}{n} < y - x$ e sia a il massimo intero tale che $\frac{a}{n} \leq x$; allora il razionale richiesto è $\frac{a+1}{n}$. □

1.3. Proprietà di Archimede

Definizione 1.7. Un corpo ordinato $\mathcal{K}$ si dice *archimedeo* (o *avente la proprietà di Archimede*[1]) se dati $x \in \mathcal{K}$, $x > 0$ e $y \in \mathcal{K}$ esiste un numero naturale n tale che valga $nx > y$.

Teorema 1.11. *Il corpo $\mathbb{Q}$ dei numeri razionali è archimedeo.*

Dimostrazione (costruttiva)
Dati $x, y \in \mathbb{Q}$ basta prendere $n > \frac{y}{x}$. □

Teorema 1.12. *L'insieme dei reali $\mathbb{R}$ è archimedeo.*

Dimostrazione (per assurdo)
Si supponga che non lo sia; allora per ogni $n \in \mathbb{N}$ sarebbe $nx \leq y$, quindi l'insieme $N_x = \{nx \mid n \in \mathbb{N}\}$, avendo y come maggiorante, è superiormente limitato e quindi [teorema 1.5] ammette un estremo superiore λ; quindi per ogni n vale $\lambda > nx$ e per ogni $\epsilon > 0$ esiste un naturale n per cui $nx > \lambda - \epsilon$; preso dunque $\epsilon = x$ si trova $nx > \lambda - x$ e quindi $\lambda < (n+1)x$ e quindi λ non è estremo superiore di N_x; assurdo. □

Teorema 1.13. *Ogni reale positivo è la n-esima potenza di un reale positivo; cioè*

$$\forall\ a \in \mathbb{R} \text{ con } a > 0 \quad \exists\ \lambda \in \mathbb{R} \text{ tale che } a = \lambda^n\ ,$$

con $n \in \mathbb{N}$ non nullo.

Dimostrazione (costruttiva e per contrapposizione)
Per semplicità, si limita la dimostrazione al caso $n = 2$, dimostrando quindi che ogni reale positivo è un quadrato; si lascia al lettore studioso l'onere di estendere la dimostrazione a ogni naturale $n > 2$.
Per $a = 1$ il teorema è ovvio; si suppone quindi $a \neq 1$. Si consideri quindi l'insieme

$$A = \left\{x \mid x \in \mathbb{R} \quad , \quad x > 0 \quad , \quad x^2 < a\right\}\ .$$

A è non vuoto; infatti, se $a > 1$ allora $1 \in A$, se $a < 1$ allora $a \in A$. A è superiormente limitato; infatti

- se $a \geq 1$ allora $\forall\ x \in A$ vale $x < a$, infatti se fosse $x > a$ si avrebbe $x^2 > a^2 > a$ contro l'ipotesi che $x \in A$;

- se $a < 1$ allora $\forall\ x \in A$ vale $x < 1$, infatti se fosse $x \geq 1$ si avrebbe $x^2 \geq 1 > a$ contro l'ipotesi che $x \in A$.

Poiché $\mathbb{R}$ è completo, il suo sottoinsieme superiormente limitato A ammette estremo superiore λ [teorema 1.5]. Allora $\lambda^2 = a$.
Non può essere $\lambda^2 < a$; infatti se lo fosse, visto che $\mathbb{R}$ è archimedeo, esisterebbe $n \in \mathbb{N}$ tale che

$$n(a - \lambda^2) > 2\lambda + 1$$

[1] Archimede (∼287-212 a.C.), scienziato di Siracusa

da cui si ricava

$$\lambda^2 + \frac{2\lambda + 1}{n} < a \ ;$$

quindi, osservando che per $n > 1$ vale $\frac{1}{n} > \frac{1}{n^2}$ si trova

$$\left(\lambda + \frac{1}{n}\right)^2 = \lambda^2 + \frac{2\lambda}{n} + \frac{1}{n^2} < \lambda^2 + \frac{2\lambda}{n} + \frac{1}{n} = \lambda^2 + \frac{2\lambda + 1}{n} < a$$

e quindi, per definizione di A, $\lambda + \frac{1}{n} \in A$, contro l'ipotesi che sia $\lambda = \sup(A)$.
Non può essere $\lambda^2 > a$; infatti se lo fosse esisterebbe $n \in \mathbb{N}$ tale che

$$n(\lambda^2 - a) > 2\lambda \ ,$$

da cui si ricava

$$\lambda^2 - \frac{2\lambda}{n} > a \ ;$$

quindi

$$\left(\lambda - \frac{1}{n}\right)^2 = \lambda^2 - \frac{2\lambda}{n} + \frac{1}{n^2} > \lambda^2 - \frac{2\lambda}{n} > a \ ;$$

pertanto

$$\forall \ x > \lambda - \frac{1}{n} \quad \text{vale} \quad x^2 > a \quad \text{e quindi} \quad x \notin A \ .$$

Ma per la definizione di estremo superiore, posto $\epsilon = \frac{1}{n}$ deve esistere un x in A per cui vale $x > \lambda - \epsilon$, contro quanto appena trovato. Quindi non può essere $\lambda^2 > a$. Rimane quindi l'unica possibilità $\lambda^2 = a$. □

Definizione 1.8. Il numero reale positivo λ costruito nel precedente teorema si dice radice n-esima di a e si indica con il simbolo $\sqrt[n]{a}$.

Il teorema precedente illustra la costruzione delle potenze ad esponente razionale, vale infatti la ben nota relazione $b^{m/n} = \sqrt[n]{b^m} = (\sqrt[n]{b})^m$ per ogni reale b positivo. Le potenze a esponente reale non razionale sono costruite dal teorema seguente.

Teorema 1.14 (Costruzione delle potenze ad esponente reale)**.** *Per ogni numero reale non razionale λ e per ogni reale positivo b tale che sia $b \neq 1$, si costruisce l'unico numero reale b^λ.*

Dimostrazione (costruttiva)
Dato il reale non razionale λ, per ogni $b > 0$ si considerino i sottoinsiemi di $\mathbb{R}$:

$$A = \{x \mid x \in \mathbb{R}, x = b^p, p \in \mathbb{Q} \ , \ p < \lambda\} \qquad , \qquad B = \{x \mid x \in \mathbb{R}, x = b^q, q \in \mathbb{Q} \ , \ q > \lambda\} \ .$$

Se $b > 1$, b^p è strettamente crescente in $\mathbb{Q}$ e quindi

$$p < q \qquad \longrightarrow \qquad b^p < b^q \ ;$$

pertanto $A < B$; inoltre A e B sono contigui. Se non fossero contigui, infatti, si avrebbe

$$\sup(A) < \inf(B) \ ;$$

sia quindi r il razionale tale che sia $\sup(A) < b^r < \inf(B)$ [teorema 1.10]; se $r < \lambda$ allora $b^r \in A$ contro la relazione $b^r > \sup(A)$, se $r > \lambda$ allora $b^r \in B$ contro la relazione $b^r < \inf(B)$; pertanto A e B sono contigui. Quindi, per l'assioma di completezza, esiste un unico elemento separatore ξ.
Si definisce quindi

$$b^\lambda = \xi \ ;$$

la potenza ad esponente reale è cosí costruita. Se $0 < b < 1$ la funzione b^p è strettamente decrescente in $\mathbb{Q}$ e quindi vale $A > B$ con A e B ancora contigui e si ripete il ragionamento visto sopra. □

2

IL PRINCIPIO DI INDUZIONE

Il principio di induzione si basa sulle proprietà dell'insieme $\mathbb{N}$ dei numeri naturali che, per comodità del lettore, vengono qui richiamate.

1. $\mathbb{N}$ è un insieme totalmente ordinato.
2. Ogni sottoinsieme non vuoto di $\mathbb{N}$ ha un elemento minimo.
3. Ogni elemento di $\mathbb{N}$ ha un successivo.
4. Ogni elemento di $\mathbb{N}$, diverso da 0, è successivo di un elemento di $\mathbb{N}$.

Teorema 2.1 (Principio di induzione)**.** *Se A è un sottoinsieme di $\mathbb{N}$ che contiene il naturale n_0 avente la proprietà che se $n > n_0$ appartiene ad A allora anche $n+1$ appartiene ad A, allora A contiene tutti i naturali maggiori o uguali a n_0.*

Dimostrazione (per assurdo)
Si consideri l'insieme $B = \{n \mid n \in \mathbb{N}, n \geq n_0, n \notin A\}$, si vuole dimostrare che B è vuoto. Si supponga che B non sia vuoto allora, per la proprietà 2 di $\mathbb{N}$, B ha un elemento minimo m. Non può essere $m = n_0$ perché per ipotesi $n_0 \in A$; quindi $m > n_0$ e, in particolare, $m > 0$. Ma allora, per la 4, esiste un naturale n di cui m è il successivo, cioè $m = n+1$; ma allora, visto $n < \min(B)$, $n \in A$, ma allora, per la definizione di A il successivo di n appartiene ad A, cioè $m \in A$, il che è assurdo. □

Il principio di induzione sopra dimostrato viene utilizzato sia nelle definizioni che nelle dimostrazioni in cui il definiendo o il dimostrando dipendono da un naturale.

Definizione 2.1 (Definizioni per induzione)**.** L'oggetto $\mathcal{O}(n)$, che dipende dal naturale n, è definito per ogni numero naturale maggiore o uguale di un dato n_0 se si assegnano $\mathcal{O}(n_0)$ e la regola per cui $\mathcal{O}(n) \to \mathcal{O}(n+1)$ per ogni $n > n_0$.

Come esempio, si consideri la seguente definizione del *fattoriale* di un numero naturale.

Definizione 2.2 (Fattoriale)**.** Si dice *fattoriale* del numero naturale n, e si indica con il simbolo $n!$, il numero definito per induzione da:

1. $0! = 1$
2. $(n+1)! = (n+1)n!$

Quindi il fattoriale di n è il prodotto di n per tutti i naturali che lo precedono: $1! = 1$, $2! = 2$, $3! = 6$, $4! = 24$, ...

Definizione 2.3 (Dimostrazioni per induzione)**.** La proprietà $\mathcal{P}(n)$, che dipende dal naturale n, è dimostrata per ogni naturale maggiore o uguale di un dato n_0 se, dimostrata vera la $\mathcal{P}(n_0)$, si dimostra che $\mathcal{P}(n) \to \mathcal{P}(n+1)$ per ogni $n > n_0$.

Come esempio, si consideri il seguente teorema.

Teorema 2.2 (Disuguaglianza di Bernoulli[1])**.** *Se $x > -1$ e $n \in \mathbb{Z}$, allora vale*

$$(1+x)^n \geq 1 + nx \ ,$$

ove l'uguaglianza vale solo per $x = 0$ o per $n = 0, n = 1$.

[1] Jakob Bernoulli (1654-1705), scienziato svizzero.

Dimostrazione (per induzione)
La disuguaglianza è ovvia per $x = 0$, si supporrà quindi $x \neq 0$. È altresí vera con il segno di uguaglianza per $n = 0$, $n = 1$; la disuguaglianza stretta è vera per $n = 2$ (com'è immediato verificare); per dimostrarla per ogni intero maggiore di 2 basta dimostrare che da $(1+x)^n > 1+nx$ segue $(1+x)^{n+1} > 1+(n+1)x$; infatti

$$(1+x)^{n+1} = (1+x)^n(1+x) > (1+nx)(1+x) = 1+nx+x+nx^2 > 1+nx+x = 1+(n+1)x \ .$$

Resta ancora da dimostrare per gli n interi negativi; a tale scopo, si ponga $n = -m$ con $m > 0$; si tratta allora di dimostrare che

$$(1+x)^{-m} > 1-mx \ .$$

Si osservi che essa è vera per $m = 1$, infatti

$$1 > (1-x^2) = (1+x)(1-x) \qquad \longrightarrow \qquad (1+x)^{-1} > 1-x \ .$$

Si tratta quindi di dimostrare che $(1+x)^{-m} > 1-mx \ \rightarrow \ (1+x)^{-(m+1)} > 1-(m+1)x$; infatti, utilizzando anche la precedente disequazione, si trova

$$(1+x)^{-(m+1)} = (1+x)^{-m}(1+x)^{-1} > (1-mx)(1-x) = 1-x-mx+mx^2 > 1-(m+1)x \qquad \square$$

Corollario 2.3. Per $n > 2$ e $-1 < x < \frac{1}{n}$ si ha la doppia disuguaglianza di Bernoulli

$$1+nx < (1+x)^n < \frac{1}{1-nx} \ .$$

Altri importanti risultati facilmente ottenibili per induzione sono i seguenti.

Teorema 2.4 (Serie aritmetica)**.** *La somma dei primi n interi, detta* serie aritmetica *di ragione 1, è data da*

$$1+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2} \ .$$

Dimostrazione (per induzione)
Il teorema è vero per $n = 1$; basta quindi mostrare che se è vero per un qualunque $n > 1$ allora è vero per $n+1$. Infatti vale

$$1+\cdots+n+(n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + n+1 = \frac{n^2+3n+2}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2} \ . \qquad \square$$

Teorema 2.5 (Serie geometrica)**.** *La somma delle prime n potenze di un numero a, detta* serie geometrica *di ragione a è data da*

$$1+a+\cdots+a^n = \frac{1-a^{n+1}}{1-a} \ . \tag{2.1}$$

Dimostrazione (per induzione)
Il teorema è vero per $n = 0$; basta quindi mostrare che se è vero per un qualunque $n > 0$ allora è vero per $n+1$. Infatti vale

$$1+a+\cdots+a^n+a^{n+1} = \frac{1-a^{n+1}}{1-a} + a^{n+1} = \frac{1-a^{n+2}}{1-a} \ . \qquad \square$$

Teorema 2.6. *Per ogni $n \in \mathbb{N}$ vale la disuguaglianza*

$$n! \geq 2^{n-1} \ . \tag{2.2}$$

Dimostrazione (per induzione)
Il teorema è vero per $n = 0, n = 1$; basta quindi mostrare che se è vero per un qualunque $n > 1$ allora è vero per $n + 1$. Infatti vale

$$(n+1)! = (n+1)n! \geq (n+1)2^{n-1} \geq 2 \cdot 2^{n-1} = 2^n \ . \qquad \square$$

Teorema 2.7 (Confronto fra media aritmetica e media geometrica)**.** *Dati n numeri reali positivi $x_1, \ldots, x_n$, la loro media geometrica è sempre minore o uguale alla loro media aritmetica e l'uguaglianza vale solo quando gli n numeri sono tutti uguali; vale cioè*

$$x_1 \cdot \ \cdots \ \cdot x_n \leq \left(\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}\right)^n \ .$$

Dimostrazione (per induzione)
Osservato che vale il segno di uguaglianza nel caso $x_1 = \cdots = x_n$, si deve mostrare la disuguaglianza stretta; verificato che è vera per $n = 2$ (si lascia l'immediata e semplice verifica alla cura del lettore studioso), supposta vera per $n - 1$, si deve dimostrare per n. Siano allora $\mu = M(x_1, \ldots, x_n)$ la media aritmetica e $m(x_1, \ldots, x_n)$ la media geometrica. Se uno degli n numeri coincide con μ, che a meno di un riordino dei termini si può supporre che sia $x_n = \mu$, vale $M(x_1, \ldots, x_{n-1}) = \mu$ e quindi si ha, per ipotesi induttiva,

$$m(x_1, \ldots, x_{n-1}) < M(x_1, \ldots, x_{n-1}) = \mu \qquad \longrightarrow \qquad x_1 \cdot \ \cdots \ \cdot x_{n-1} < \mu^{n-1}$$

e quindi

$$[m(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n)]^n = x_1 \cdots x_{n-1} x_n = x_1 \cdots x_{n-1} \mu < \mu^{n-1} \mu = \mu^n = [M(x_1, \ldots, x_{n-1} x_n)]^n \ ;$$

da cui segue subito

$$m(x_1, \ldots, x_n) < M(x_1, \ldots, x_n) \ ,$$

che è quanto si doveva dimostrare.
Se μ non coincide con nessuno degli n numeri è certo che è compreso fra due di tali n numeri; quindi, a meno di un riordino dei termini, si può supporre che sia $x_{n-1} < \mu < x_n$; in tal caso si può porre $x'_{n-1} = x_{n-1} + x_n - \mu$ e $x'_n = \mu$; si noti allora che valgono le seguenti relazioni

$$(x_n - \mu)(\mu - x_{n-1}) > 0 \quad \longrightarrow \quad x_{n-1} x_n < x_{n-1}\mu + x_n \mu - \mu^2 = (x_{n-1} + x_n - \mu)\mu \ ,$$

da cui

$$x_{n-1} x_n < x'_{n-1} x'_n \ ;$$

quindi valgono

$$\begin{gathered} x_1 \cdots x_{n-2} x_{n-1} x_n < x_1 \cdots x_{n-2} x'_{n-1} x'_n \\ x_1 + \cdots + x_{n-2} + x_{n-1} + x_n = x_1 + \cdots + x_{n-2} + x'_{n-1} + x'_n \ , \end{gathered}$$

dalle quali seguono subito

$$\begin{gathered} m(x_1, \ldots, x_{n-2}, x_{n-1}, x_n) < m(x_1, \ldots, x_{n-2}, x'_{n-1}, x'_n) \\ M(x_1, \ldots, x_{n-2}, x_{n-1}, x_n) = M(x_1, \ldots, x_{n-2}, x'_{n-1}, x'_n) \end{gathered}$$

e pertanto, usando quanto dimostrato nella prima parte,

$$m(x_1, \ldots, x_n) < m(x_1, \ldots, x_{n-2}, x'_{n-1}, x'_n) < M(x_1, \ldots, x_{n-2}, x'_{n-1}, x'_n) = M(x_1, \ldots, x_n) \ .$$

$\square$

Il seguente teorema e le sue conseguenze immediate sono di grande importanza per la definizione delle funzioni esponenziali.

Teorema 2.8. *Posto, per ogni $n \in \mathbb{N}$, $n > 0$,*

$$a(n) = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

vale $a(n+1) > a(n)$.

Dimostrazione (costruttiva)
Sviluppando la potenza del binomio per mezzo dei coefficienti binomiali si trova:

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n &= 1 + \binom{n}{1}\frac{1}{n} + \binom{n}{2}\frac{1}{n^2} + \cdots + \binom{n}{n}\frac{1}{n^n} = \\ &= 1 + 1 + \frac{n(n-1)}{2!\,n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!\,n^3} + \cdots + \frac{n(n-1)(n-1)\cdots 1}{n!\,n^n} = \\ &= 2 + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right) + \cdots \\ &\qquad \cdots + \frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right) .\end{aligned}$$

Sostituendo $n+1$ a ciascuno degli n che compaiono nella precedente equazione, tutti gli addendi aumentano e viene aggiunto un ulteriore addendo positivo, si trova quindi $a(n+1) > a(n)$. □

Teorema 2.9. *L'insieme*

$$E = \left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \mid n \in \mathbb{N}, n > 0\right\}$$

è superiormente e inferiormente limitato e vale $2 < E < 3$, per ogni $n > 2$.

Dimostrazione (costruttiva)
Che tutti gli elementi di E siano maggiori di 2 è immediato verificarlo nell'ultima equazione della dimostrazione del precedente teorema 2.8. Resta da dimostrare che è limitato superiormente. Infatti nell'espressione per $a(n)$ vista nella dimostrazione del teorema precedente, tutte le quantità fra parentesi tonde sono minori di uno; quindi vale la disuguaglianza:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leq 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + + \frac{1}{n!} .$$

Ora ricordando la (2.2), vale $\frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2^{n-1}}$, quindi si ottiene

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leq 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + + \frac{1}{2^{n-1}} = 2 + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-2}}\right) ;$$

nell'ultima parentesi vi è la serie geometrica di ragione $\frac{1}{2}$ e quindi si trova [teorema 2.5]

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leq 2 + \frac{1}{2}\,\frac{1-\dfrac{1}{2^{n-1}}}{1-\dfrac{1}{2}} = 2 + 1 - \frac{1}{2^{n-1}} < 3 .$$

Da quest'ultima disuguaglianza segue che tutti gli elementi di E sono minori di 3. □

Teorema 2.10. *L'insieme E definito nel teorema precedente ha un estremo superiore.*

Dimostrazione (costruttiva)
Basta applicare il teorema 1.5. □

Definizione 2.4 (Numero di Nepero)**.** L'estremo superiore dell'insieme

$$E = \left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \mid n \in \mathbb{N}, n > 0\right\} ,$$

la cui esistenza è stata dimostrata nei teoremi precedenti, si dice *numero di Nepero*[2] e si indica con il simbolo e.

[2] John Napier (1550-1617), matematico scozzese.

Teorema 2.11. *Per il numero di Nepero sopra definito vale la disuguaglianza*

$$2 < e < 3 \; .$$

Dimostrazione (costruttiva)
Segue immediatamente dal teorema 2.9. $\square$

3

FUNZIONI REALI DI VARIABILE REALE

3.1. Generalità

Definizione 3.1 (Funzione)**.** Dati due sottoinsiemi X e Y di $\mathbb{R}$ si dice *funzione* reale di variabile reale da X a Y una corrispondenza, o legge, che ad *ogni* elemento di $x \in X$ associa *uno ed un solo* elemento di $y \in Y$. Tale corrispondenza fra insiemi si indica con il simbolo

$$f : X \to Y \ ,$$

mentre la legge che associa gli elementi dei due insiemi, anche detta *equazione della funzione*, si indica con il simbolo

$$y = f(x) \ .$$

Gli insiemi X e Y sono detti rispettivamente *dominio* e *codominio.*
x e y sono dette, rispettivamente, *variabile indipendente* e *variabile dipendente*

Si noti che due funzioni sono uguali solo se hanno uguali il dominio, il codominio ed equazione. Se l'equazione è la stessa ma dominio o codominio (o entrambi) sono diversi, allora le funzioni sono diverse.

Esempio 1. Le funzioni $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ aventi la stessa legge:

$$f(x) = x^2 \qquad , \qquad g(x) = x^2$$

sono funzioni diverse.

Definizione 3.2 (Grafico di una funzione)**.** L'insieme dei punti del piano cartesiano aventi per coordinate elementi corrispondenti secondo la funzione f, cioè l'insieme $\mathcal{G}_f \subseteq X \times Y$, definito da

$$\mathcal{G}_f = \{(x, y) \in X \times Y \mid y = f(x)\} \ ,$$

si dice *grafico* di f.

Dalla definizione di grafico è chiaro che due funzioni hanno lo stesso grafico se e solo se sono funzioni uguali; si osservi che nell'esempio precedente le funzioni f e g non hanno stesso grafico. Si osservi inoltre che non tutti i sottoinsiemi di $X \times Y$ sono grafico di qualche funzione f; perché ciò accada infatti è necessario che a ciascun elemento di X corrisponda un solo elemento di Y; quindi un sottoinsieme che contenga le due coppie (x, y_1) e (x, y_2) non può essere grafico di una funzione. Detto altrimenti, $\mathcal{G}_f$ è grafico di una funzione se la retta parallela all'asse delle ordinate passante per il punto $(x, 0)$, per ogni $x \in X$, incontra $\mathcal{G}_f$ una e una sola volta. Si noti che, viceversa, non è necessario che tutti gli elementi del codominio siano in corrispondenza con qualche elemento del dominio. I seguenti diagrammi di grafici illustrano meglio la situazione. I casi (b), (c) e (d) rappresentano una funzione, il caso (a) no poiché al valore $x = 3$ corrispondono due elementi del codominio y_1 e y_2. Per maggior chiarezza, per ogni grafico sono stati indicati il dominio X e il codominio Y, e il loro prodotto cartesiano è racchiuso in un rettangolo.

Definizione 3.3 (Funzione pari e dispari)**.** Una funzione $f : X \to Y$ si dice *pari* se per ogni $x \in X$ anche $-x \in X$ e vale

$$f(-x) = f(x) \ .$$

Una funzione $f : X \to Y$ si dice *dispari* se per ogni $x \in X$ anche $-x \in X$ e vale

$$f(-x) = -f(x) \ .$$

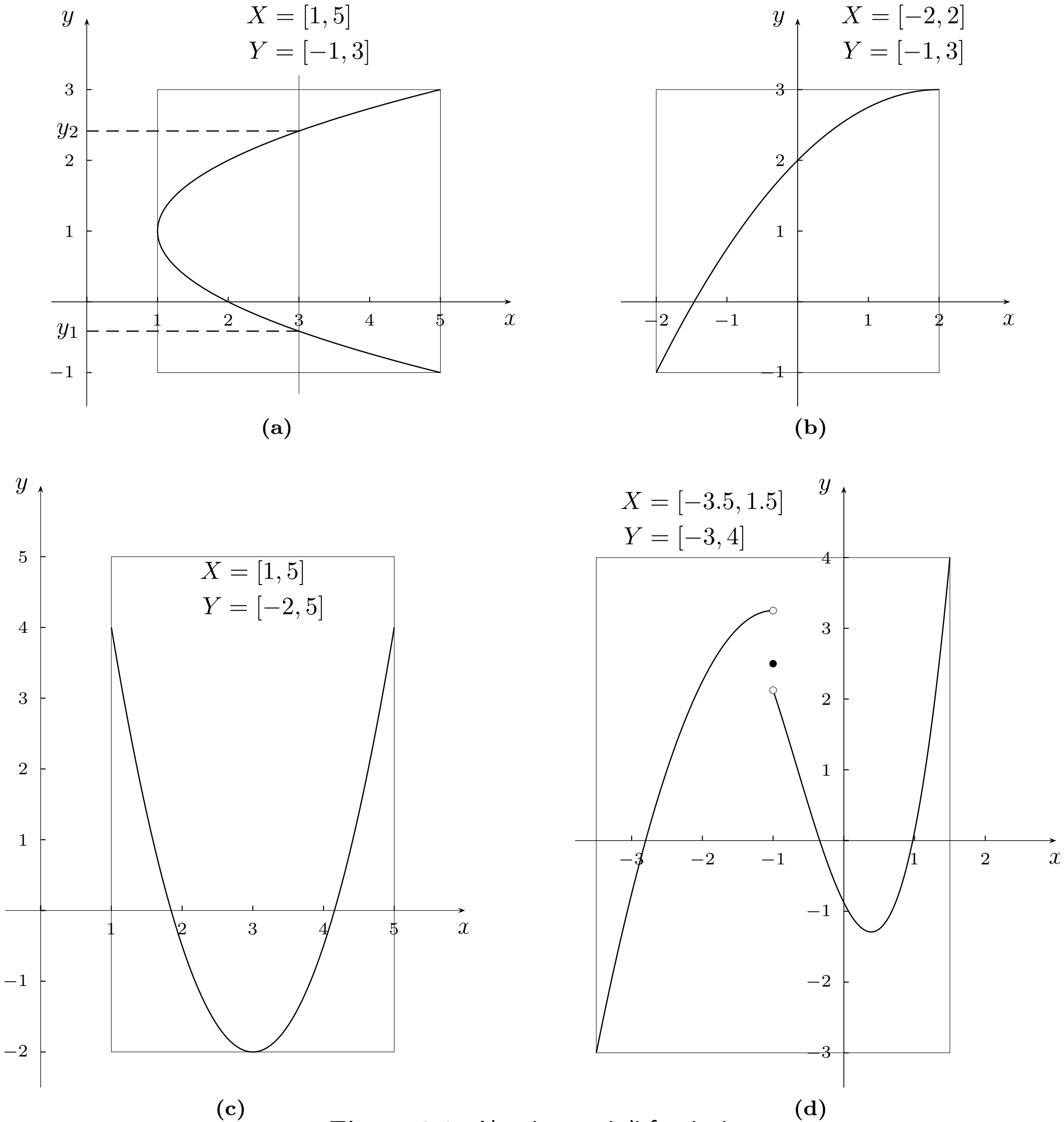


Figura 3.1: Alcuni esempi di funzioni.

Si noti che se la funzione f è pari, se $(x, y) \in \mathcal{G}_f$ anche $(-x, y) \in \mathcal{G}_f$; quindi $\mathcal{G}_f$ è simmetrico rispetto alla simmetria assiale avente per asse l'asse delle ordinate.
Similmente, se la funzione f è dispari, se $(x, y) \in \mathcal{G}_f$ anche $(-x, -y) \in \mathcal{G}_f$; quindi $\mathcal{G}_f$ è simmetrico rispetto alla simmetria centrale avente per centro l'origine.
Se f è dispari e $0 \in X$ allora $(0, 0) \in \mathcal{G}_f$, infatti vale $f(0) = -f(0)$ quindi $f(0) = 0$.

Teorema 3.1. *Il prodotto di due funzioni pari o di due funzioni dispari è una funzione pari; il prodotto di una funzione pari per una funzione dispari è una funzione dispari.*

Dimostrazione (costruttiva)
Scende direttamente dalla definizione di funzioni pari e dispari. □

Esempio 2. Sono pari le seguenti funzioni $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

$$f(x) = 3x^4 - 2x^2 + 1 \qquad , \qquad f(x) = e^{|x|} - 3 \qquad , \qquad f(x) = x \operatorname{sen} x \ .$$

Sono dispari le seguenti funzioni $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

$$f(x) = 5x^5 - x^3 + 2x \qquad , \qquad f(x) = x^2 \operatorname{sen} x \cos x \qquad , \qquad f(x) = \frac{2x^3 - 3x}{x^2 - 1} \ .$$

Definizione 3.4 (Funzione identità)**.** Dato un insieme non vuoto X, la funzione $1_X : X \to X$ di equazione $1_X(x) = x$, che associa ad ogni elemento di X lo stesso x è detta *funzione identità* su X.

Definizione 3.5 (Funzione parte intera)**.** Si dice *parte intera* la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ la funzione che associa ad ogni reale x l'intero n tale che valga

$$n \leq x < n + 1$$

e si indica con il simbolo $f(x) = [x]$.

Definizione 3.6 (Immagini e controimmagini)**.** Sia $f : X \to Y$ una funzione, si dice *immagine* di $x \in X$ l'elemento $y \in Y$ tale $y = f(x)$. Se $A \subseteq X$ è un sottoinsieme del dominio, si dice immagine di A il sottoinsieme del codominio $f(A) \subseteq Y$ definito da

$$f(A) = \{y = f(x) \mid x \in A\} .$$

L'insieme $f(X)$ è detto immagine di f.
Si dice *controimmagine* di $y \in f(X)$ l'elemento $x \in X$ tale che $y = f(x)$. Se $B \subseteq f(X)$ è un sottoinsieme dell'immagine di f, si dice controimmagine di B il sottoinsieme del dominio $f^{\leftarrow}(B)$ definito da

$$f^{\leftarrow}(B) = \{x \in X \mid f(x) \in B\} .$$

Si noti che ogni sottoinsieme del dominio ha un'immagine; viceversa l'immagine $f(X)$ di f può non esaurire il codominio, cioè possono esistere elementi del codominio che non hanno controimmagine in X.

Definizione 3.7 (Funzione iniettiva)**.** La funzione $f : X \to Y$ è detta *iniettiva* se elementi diversi del dominio hanno immagini diverse, cioè se per ogni $x_1, x_2 \in X$ vale

$$x_1 \neq x_2 \quad \longrightarrow \quad f(x_1) \neq f(x_2)$$

o, equivalentemente,

$$f(x_1) = f(x_2) \quad \longrightarrow \quad x_1 = x_2 .$$

Si noti che una funzione è iniettiva se e solo se ogni retta parallela all'asse delle ascisse passante per il punto di coordinate $(0, y)$, con $y \in Y$, incontra il grafico $\mathcal{G}_f$ in non piú di un solo punto. Per esempio la figura 3.1b rappresenta il grafico di una funzione iniettiva, mentre le figure 3.1c e 3.1d rappresentano il grafico di funzioni non iniettive.

Definizione 3.8 (Funzione suriettiva)**.** La funzione $f : X \to Y$ è detta *suriettiva* se l'immagine del dominio coincide con il codominio, cioè se $f(X) = Y$. Equivalentemente f è suriettiva se ogni elemento del codominio Y ha almeno una controimmagine in X.

Si noti che una funzione è suriettiva se e solo se ogni retta parallela all'asse delle ascisse passante per il punto di coordinate $(0, y)$, con $y \in Y$, incontra il grafico $\mathcal{G}_f$ in almeno un punto.

Definizione 3.9 (Funzioni biiettiva)**.** Una funzione $f : X \to Y$ si dice *biiettiva* o *corrispondenza biunivoca*, se è iniettiva e suriettiva.

In conseguenza di quanto osservato sopra, una funzione è biiettiva se e solo se se ogni retta parallela all'asse delle ascisse passante per il punto di coordinate $(0, y)$, con $y \in Y$, incontra il grafico $\mathcal{G}_f$ in uno ed un solo punto.

Esempio 3. La funzione identità su $\mathbb{R}$, $1_{\mathbb{R}}$, ha come grafico la retta bisettrice del primo e terzo quadrante; è dispari e biiettiva.

Esempio 4. La funzione $f : X \to \mathbb{R}$ di dominio $X = \{x \mid x \in \mathbb{R}, x \neq 1\}$, di equazione

$$f(x) = \frac{x+1}{x-1}$$

è iniettiva ma non suriettiva; infatti per ogni $x_1, x_2 \in X$ vale

$$f(x_1) = f(x_2) \quad \longrightarrow \quad \frac{x_1+1}{x_1-1} = \frac{x_2+1}{x_2-1} \quad \longrightarrow \quad x_1x_2 + x_2 - x_1 - 1 = x_1x_2 + x_1 - x_2 - 1$$

e quindi

$$x_1 = x_2 \ ;$$

la funzione è pertanto iniettiva. Tuttavia, posto $y = \frac{x+1}{x-1}$, ricavando x si trova

$$x = \frac{y+1}{y-1} \ ;$$

quindi non esiste una controimmagine di $y = 1$, la funzione è quindi non suriettiva.

Esempio 5. La funzione $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ di equazione

$$f(x) = \log|x|$$

è pari, vale cioè, per ogni $x \in \mathbb{R}^*$, vale $f(-x) = f(x)$, quindi la funzione non è iniettiva; inoltre, posto $y = \log|x|$, ricavando x si trova

$$x = \pm e^y \ ;$$

quindi per ogni $y \in \mathbb{R}$ esiste almeno una controimmagine (ne esistono due) e quindi $f(\mathbb{R}^*) = \mathbb{R}$ e quindi la funzione è suriettiva.

Esempio 6. La funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ di equazione

$$f(x) = x^3$$

è iniettiva, infatti per ogni $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, si ha

$$f(x_1) = f(x_2) \quad \longrightarrow \quad x_1^3 = x_2^3 \quad \longrightarrow \quad x_1 = x_2 \ ;$$

inoltre, posto $y = x^3$, ricavando x si trova

$$x = \sqrt[3]{y} \ ;$$

quindi per ogni $y \in \mathbb{R}$ esiste almeno una controimmagine in $\mathbb{R}$; pertanto l'immagine della funzione coincide con il codominio e quindi la funzione è suriettiva. La funzione in questione è pertanto biiettiva.

3.2. Funzioni inverse

Definizione 3.10 (Funzione inversa)**.** Se la funzione $f : X \to Y$ è biiettiva è possibile definire la funzione inversa $f^{-1} : Y \to X$ associando ad ogni $y \in Y$ la sua, unica, controimmagine x attraverso f, cioè

$$f^{-1}(y) = x \qquad \longleftrightarrow \qquad y = f(x) \ .$$

Si noti che la corrispondenza f^{-1} si può sempre definire ma risulta essere una funzione solo se la f è biiettiva. Infatti, se f non fosse iniettiva esisterebbe almeno un $y \in Y$ che ha almeno due controimmagini in $x_1, x_2 \in X$, cioè tali che valga $f(x_1) = f(x_2) = y$; ma allora attraverso la f^{-1} un tale y avrebbe due immagini in X, contro la definizione di funzione.
Inoltre se f non fosse suriettiva esisterebbe almeno un $y \in Y$ che non è immagine di alcun x; ma allora attraverso la f^{-1} un tale y non avrebbe alcuna immagine in X, ancora contro la definizione

di funzione.
Si noti che se f è invertibile lo è anche laf^{-1} e la sua inversa è la f, vale cioè la relazione

$$[f^{-1}]^{-1} = f \ .$$

In accordo con la definizione data sopra, il grafico della funzione inversa f^{-1} della f è l'insieme

$$\mathcal{G}_{f^{-1}} = \{(y,x) \in Y \times X \mid x = f^{-1}(y)\}$$

è identico al grafico $\mathcal{G}_f$ della f nel senso che il punto di coordinate (y,x) appartiene a $\mathcal{G}_{f^{-1}}$ se e solo se il punto di coordinate (x,y) appartiene a $\mathcal{G}_f$. Tuttavia i ruoli delle variabili x e y sono invertiti, quindi per ottenere il grafico della f^{-1} occorre ristabilire i ruoli scambiando le due variabili. Un tale scambio corrisponde ad eseguire una trasformazione di simmetria assiale avente per asse la retta di equazione $y = x$, bisettrice del primo e terzo quadrante. Pertanto i grafici della f e della f^{-1} sono simmetrici rispetto a tale retta. Un semplice esempio chiarirà la questione.

Esempio 7. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ di equazione $y = \frac{1}{2}x + 1$ essa è biiettiva e quindi invertibile e la sua inversa è la $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ di equazione $x = 2y - 1$; queste due equazioni sono soddisfatte dalle stesse coppie di numeri reali, hanno cioè lo stesso grafico; per ottenere il grafico dell'inversa si invertono nella precedente equazione le variabili x e y per ottenere

$$y = 2x - 1 \ .$$

I due grafici sono rappresentati in figura 3.2.

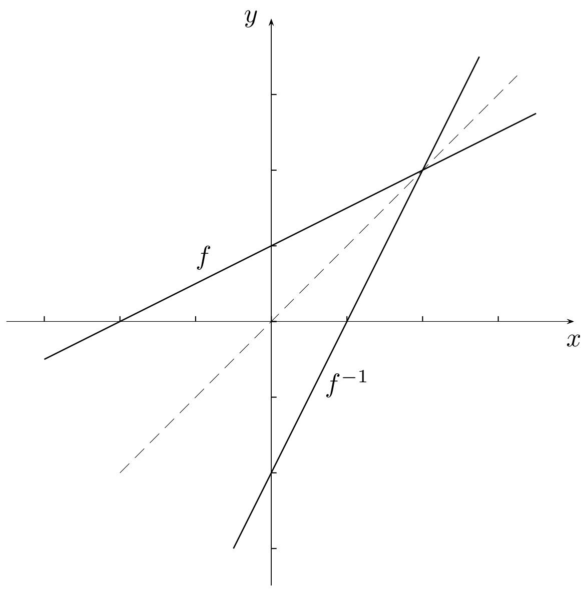


Figura 3.2: Il grafico della funzione inversa

Definizione 3.11 (Restrizione di una funzione)**.** Data una funzione $f : X \to Y$ e un sottoinsieme del dominio $A \subseteq X$ si definisce *restrizione* della f ad A la funzione $f_{|A} : A \to Y$, tale che, per ogni $x \in A$, valga

$$f_{|A}(x) = f(x) \ .$$

Quindi la restrizione di una funzione f è diversa dalla f perché ha un diverso dominio (e quindi un diverso codominio) ma nel suo dominio 'ristretto' coincide con la f. Se una funzione non ammette inversa perché non biiettiva può essere invertibile una sua restrizione.

Esempio 8. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ di equazione $y = x^2 - 1$; essa non è né iniettiva né suriettiva; è una funzione pari infatti per ogni x reale vale $f(-x) = f(x)$ e quindi non è iniettiva, inoltre vale $f(\mathbb{R}) \subsetneq \mathbb{R}$ e quindi non è suriettiva. Si consideri la restrizione della f a $\mathbb{R}_+$:

$$f_{|\mathbb{R}_+} : \mathbb{R}_+ \to \{y \mid y \geq -1\} \ ;$$

si tratta di una funzione biiettiva avente come inversa la funzione $f^{-1}_{|\mathbb{R}_+} : \{y \mid y \geq -1\} \to \mathbb{R}_+$ di equazione

$$y = \sqrt{x+1} \ .$$

La situazione è rappresentata nella figura 3.3.

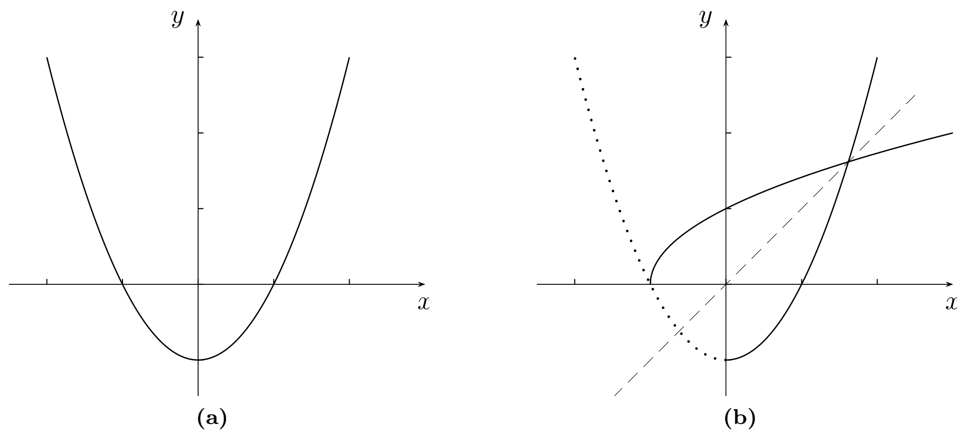


Figura 3.3: La restrizione rende la funzione invertibile

3.3. Funzioni monotòne

Definizione 3.12 (Monotonia)**.** Una funzione $f : X \to Y$ si dice *monotòna crescente* se per $x_1, x_2 \in X$

$$x_1 \leq x_2 \quad \longrightarrow \quad f(x_1) \leq f(x_2) \ .$$

Una funzione $f : X \to Y$ si dice *monotòna decrescente* se per $x_1, x_2 \in X$

$$x_1 \leq x_2 \quad \longrightarrow \quad f(x_1) \geq f(x_2) \ .$$

Una funzione $f : X \to Y$ si dice *monotòna crescente in senso stretto*, o *strettamente crescente*, se per $x_1, x_2 \in X$

$$x_1 < x_2 \quad \longrightarrow \quad f(x_1) < f(x_2) \ .$$

Una funzione $f : X \to Y$ si dice *monotòna decrescente in senso stretto*, o *strettamente decrescente*, se per $x_1, x_2 \in X$

$$x_1 < x_2 \quad \longrightarrow \quad f(x_1) > f(x_2) \ .$$

Una funzione monotòna in senso stretto, crescente o decrescente, è evidentemente iniettiva, non è vero però il viceversa, esistono funzioni iniettive non strettamente monotòne, come si vede dal seguente esempio.

Esempio 9. La funzione $f : \mathbb{R}^* \in \mathbb{R}$ di equazione $y = \frac{1}{x}$ è iniettiva poiché $\frac{1}{x_1} = \frac{1}{x_2} \to x_1 = x_2$ ma non è monotòna, infatti vale la relazione $-3 < -2 < 1$ ma valgono $f(-3) > f(-2)$ e $f(-3) < f(1)$, quindi f non è né crescente né decrescente.

Vale però il seguente teorema.

Teorema 3.2. *Se $F : X \to Y$ è una funzione biiettiva e monotòna allora è monotòna in senso stretto e la sua inversa f^{-1} è anch'essa monotòna in senso stretto dello stesso tipo di monotonia di f.*

Dimostrazione (costruttiva)
Se una funzione è biiettiva è in particolare iniettiva; inoltre visto che è monotòna da $x_1 < x_2$ deve seguire $f(x_1) \leq f(x_2)$ o $f(x_1) \geq f(x_2)$; ma non può essere $f(x_1) = f(x_2)$ perché f risulterebbe

non iniettiva, quindi deve essere o $f(x_1 < f(x_2)$ o $f(x_1) > f(x_2)$ e quindi monotòna crescente o decrescente in senso stretto.
Sia quindi f crescente in senso stretto si deve dimostrare che lo è anche l'inversa f^{-1}; si considerino $y_1, y_2 \in Y$, con $y_1 < y_2$ e siano $x_1 = f^{-1}(y_1)$ e $x_2 = f^{-1}(y_2)$; se fosse $x_1 \geq x_2$ per la crescenza di f si avrebbe $f(x_1) \geq f(x_2)$ e quindi $y_1 \geq y_2$, cosa impossibile; pertanto da $y_1 < y_2$ segue $x_1 < x_2$ cioè $f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)$. La dimostrazione nel caso sia f decrescente in senso stretto è analoga e viene lasciata alla cura del lettore studioso. □

3.4. Funzioni composte

Definizione 3.13 (Funzione composta)**.** Siano $f : X \to Y$ e $g : Y \to Z$ due funzioni; si definisce *funzione composta* di f e g, e si indica con il simbolo $g \circ f$, la funzione $g \circ f : X \to Z$ di equazione

$$g \circ f(x) = g[f(x)] \ .$$

Per definire, per ogni $x \in X$, la quantità $g[f(x)]$ è sufficiente che l'immagine di f sia contenuta nel dominio di g; per questo motivo a volte, commettendo un abuso di linguaggio, si dice anche in questo caso che $g[f(x)]$ definisce la funzione composta $g \circ f$.

Esempio 10. Si considerino le funzioni $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ di equazioni

$$f(x) = x + 1 \qquad , \qquad g(y) = y^2 \ .$$

Poiché l'immagine della f è uguale al dominio della g e l'immagine della g è contenuto nel dominio della f è possibile definire le due funzione composte $g \circ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $f \circ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ di equazioni

$$g \circ f(x) = g[f(x)]) = (x+1)^2 \qquad , \qquad f \circ g(y) = f[g(y)]) = y^2 + 1 \ .$$

Esempio 11. Si considerino le funzioni $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ di equazioni

$$f(x) = x^2 - 1 \qquad , \qquad g(y) = \sqrt{y} \ .$$

L'immagine della f è l'insieme $f(\mathbb{R}) = \{x \mid x \in \mathbb{R}, x \geq -1\}$ e quindi non coincide con il (e non è nemmeno contenuto nel) dominio della g; pertanto la funzione composta $g \circ f$ non si può definire. È possibile però considerare la restrizione di f all'insieme $A = \{x \mid x \in \mathbb{R}, |x| \geq 1\}$; allora la funzione $f_{|A} : A \to \mathbb{R}$ ha l'immagine uguale al dominio della g e quindi si può definire la funzione composta $g \circ f_{|A} : A \to \mathbb{R}$ di equazione

$$g \circ f_{|A}(x) = \sqrt{x^2 - 1} \ .$$

Teorema 3.3. *Sia $f : X \to Y$ biettiva e sia $f^{-1} : Y \to X$ la sua inversa, allora la composta di f ed f^{-1} è la funzione identità:*

$$f \circ f^{-1}(y) = 1_Y(y) = y \qquad , \qquad f^{-1} \circ f(x) = 1_X(x) = x \ .$$

Dimostrazione (costruttiva)
Segue immediatamente dalla definizione di funzione inversa. □

Teorema 3.4. *Date $f : X \to Y$ e $g : Y \to Z$, siano $A \subseteq X$ e $B \subseteq Z$, valgono le relazioni*

$$g \circ f(A) = g[f(A)] \qquad , \qquad (g \circ f)^{\leftarrow}(B) = f^{\leftarrow}[g^{\leftarrow}(B)] \ .$$

Dimostrazione (costruttiva)
Che $g[f(A)] \subseteq g \circ f(A)$ è ovvio; resta da mostrare che $g \circ f(A) \subseteq g[f(A)]$. Sia quindi $z \in g \circ f(A)$, allora esiste $x \in X$ tale che $g \circ f(x) = z$ cioè $g[f(x)] = z$, pertanto $z \in g \circ f(A)$. Se $x \in (g \circ f)^{\leftarrow}(B)$ allora $g \circ f(x) \in B$ cioè $g[f(x)] \in B$ e quindi $f(x) \in g^{\leftarrow}(B)$ pertanto $x \in f^{\leftarrow}[g^{\leftarrow}(B)]$; si è cosí dimostrato che $g \circ f^{\leftarrow}(B) \subseteq f^{\leftarrow}[g^{\leftarrow}(B]$; ripercorrendo la dimostrazione all'inverso si dimostra che $f^{\leftarrow}[g^{\leftarrow}(B)] \subseteq (g \circ f)^{\leftarrow}(B)$. □

Teorema 3.5 (Composizione di funzioni iniettive e suriettive)**.** *Date $f : X \to Y$ e $g : Y \to Z$ allora*
a) se esse sono entrambe iniettive è iniettiva la composta $g \circ f$;
b) se sono entrambe suriettive allora è suriettiva la composta $g \circ f$;
c) se sono entrambe biiettive allora è biiettiva la composta $g \circ f$ e vale

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1} \ .$$

Dimostrazione (costruttiva)
a) Siano $x_1, x_2 \in X$, $x_1 \neq x_2$; allora, se f è iniettiva, vale $f(x_1) \neq f(x_2)$, ma questa disuguaglianza, se g è iniettiva, implica $g[f(x_1)] \neq g[f(x_2)]$; cioè $g \circ f(x_1) \neq g \circ f(x_2)$ e quindi la funzione composta è iniettiva.
b) Vale $g \circ f(X) = g[f(X)]$ [teorema 3.4]; se f è suriettiva si ha $f(X) = Y$ se g è suriettiva si ha $g(Y) = Z$ cioè $g[f(X)] = Z$; quindi $g \circ f(X) = Z$, cioè la funzione composta è suriettiva.
c) Se f e g sono biiettive allora anche anche la composta $g \circ f$ è biiettiva per i punti a) e b); infine, applicando il teorema 3.4 nel caso $B = \{z\} \subseteq Z$ si trova $(g \circ f)^{\leftarrow}(\{z\}) = f^{\leftarrow}[g^{\leftarrow}(\{z\})]$, ma $(g \circ f)^{\leftarrow}(\{z\}) = (g \circ f)^{-1}(z)$ e $f^{\leftarrow}[g^{\leftarrow}(\{z\})] = f^{-1}[g^{-1}(z)]$ da cui segue la tesi. □

Teorema 3.6 (Composizione di funzioni monotòne)**.** *Se le funzioni $f : X \to Y$ e $g : Y \to Z$ sono entrambe monotòne anche la funzione composta $g \circ f$ è monotòna; in particolare*
a) è (strettamente) crescente se le due funzioni componenti sono entrambe (strettamente) crescenti o entrambe (strettamente) decrescenti;
b) è (strettamente) decrescente se una delle due è (strettamente) crescente e l'altra è (strettamente) decrescente.

Dimostrazione (costruttiva)
a) siano $x_1, x_2 \in X$, $x_1 \leq x_2$; se f è crescente segue $f(x_1) \leq f(x_2)$ da cui se g è crescente segue $g[f(x_1)] \leq g[f(x_2)]$ e quindi $g \circ f(x_1) \leq g \circ f(x_2)$ e quindi $g \circ f$ è crescente; se viceversa f è decrescente segue $f(x_1) \geq f(x_2)$ da cui se g è decrescente segue $g[f(x_1)] \leq g[f(x_2)]$ e quindi $g \circ f(x_1) \leq g \circ f(x_2)$ e quindi $g \circ f$ è ancora crescente. Per dimostrare il caso di monotonia stretta basta sostituire il simbolo $<$ a $\leq$ e il simbolo $>$ a $\geq$.
La dimostrazione del caso b) è analoga e si lascia al lettore studioso. □

3.5. Classificazione delle funzioni

Con riguardo agli elementi delle loro immagini le funzioni reali di variabile reale si classificano in *reali algebriche* e *reali trascendenti.*
Le funzioni algebriche sono quelle la cui immagine è costituita da numeri reali algebrici[1]; queste, a loro volta si suddividono in:
funzioni algebriche intere; sono i polinomi del tipo

$$P(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n \ ;$$

funzioni algebriche razionali; sono le frazioni di polinomi della forma

$$\frac{P(x)}{Q(x)} \ ;$$

[1] Si ricorda che sono detti reali algebrici tutti i numeri che sono soluzione di un'equazione algebrica di qualsiasi grado a coefficienti interi; si dice trascendente un numero che non lo è.

funzioni algebriche irrazionali: sono quelle in cui x compare sotto un segno di radice.
Le funzioni reali trascendenti sono quelle nella cui immagine sono presenti numeri reali trascendenti; fra queste si ricordano qui le *funzioni goniometriche*, le *funzioni esponenziali* e le *funzioni logaritmiche*.

Definizione 3.14 (Funzione periodica)**.** Data la funzione $f : x \to Y$, il minore dei numeri reali $T \neq 0$ per cui valga per ogni $x \in X$ si ha $x \pm T \in X$ e

$$f(x+T) = f(x) \; .$$

si dice *periodo* di f. Una funzione che ammetta un periodo si dice *periodica*.

Sono periodiche tutte le funzioni goniometriche elementari.

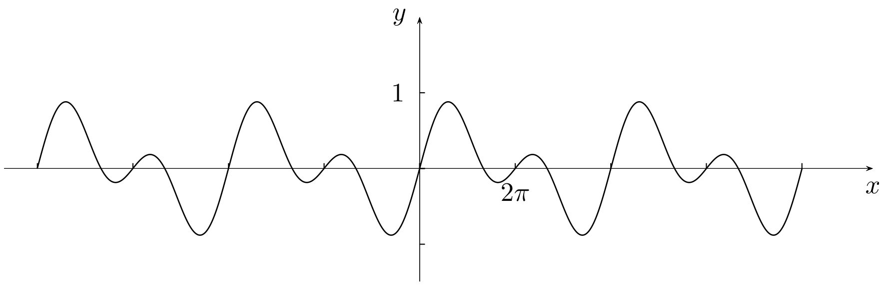


Figura 3.4: Esempio di funzione periodica

Esempio 12. Si consideri ad esempio la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ di equazione

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(\operatorname{sen}\frac{1}{2}x + \operatorname{sen} x\right) \; .$$

f è periodica di periodo 4π, infatti, ricordando che vale $\operatorname{sen}(\alpha + 2k\pi) = \operatorname{sen}\alpha$ per ogni k intero, si ha

$$\begin{aligned} f(x+4\pi) &= \frac{1}{2}\left[\operatorname{sen}\frac{x+4\pi}{2} + \operatorname{sen}(x+4\pi)\right] = \frac{1}{2}\left[\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}+2\pi\right) + \operatorname{sen}(x+4\pi)\right] = \\ &= \frac{1}{2}\left(\operatorname{sen}\frac{1}{2}x + \operatorname{sen} x\right) \; . \end{aligned}$$

In figura 3.4 è riportato il grafico della funzione per $-8\pi \leq x \leq 8\pi$.

4

TOPOLOGIA DELLA RETTA

L'insieme dei numeri reali, oltre ad avere la struttura algebrica di corpo completo, ha anche una *struttura topologica* che viene analizzata in questo capitolo.

4.1. Intervalli in $\mathbb{R}$

Definizione 4.1 (Intervallo)**.** Dati $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$, si dice *intervallo* di estremi a e b l'insieme

$$]a, b[= \{x \mid x \in \mathbb{R} \ , \ a < x < b\} \ .$$

Si noti che un intervallo A è un *insieme convesso*, cioè se $x_1, x_2 \in A$, $x_1 < x_2$, allora ogni x compreso fra x_1 e x_2 appartiene a A.

Definizione 4.2 (Intorno)**.** Dato $x_0 \in \mathbb{R}$ si dice *intorno* di x_0, e si indica con il simbolo $I(x_0)$, ogni insieme che contenga un intervallo contenente x_0.

Definizione 4.3 (Intorno circolare)**.** Dato $x_0 \in \mathbb{R}$ e $r > 0$, si dice *intorno circolare* di centro x_0 e raggio r l'insieme $I(x_0, r)$ definito da

$$I(x_0, r) = \{x \mid x \in \mathbb{R}, |x - x_0| < r\} \ .$$

Si noti che l'intorno circolare $I(x_0, r)$ è un intervallo contenente x_0.

4.2. Relazioni fra punto e insieme

Definizione 4.4 (Punto interno)**.** Dato un insieme $A \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ è detto *interno* ad A se esiste un intorno $I(x_0)$ contenuto in A. L'insieme dei punti interni di A si dice *interno* di A e si indica con $\operatorname{int}(A)$.

Definizione 4.5 (Punto esterno)**.** Dato un insieme $A \subseteq \mathbb{R}$ e detto $A^C = \mathbb{R} \setminus A$ il suo complementare in $\mathbb{R}$, si dice che $x_0 \in \mathbb{R}$ è esterno ad A se è interno ad A^C.

Definizione 4.6 (Punto di frontiera)**.** Dato un insieme $A \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ è detto punto *di frontiera* di A se in ogni intorno di x_0 esistono sia punti di A che punti di A^C. L'insieme dei punti di frontiera di A si dice *frontiera* di A e si indica con $\operatorname{fr}(A)$.

Si noti che un punto di frontiera non è interno né ad A né ad A^C.

Definizione 4.7 (Punto isolato)**.** Dato un insieme $A \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ è detto punto *isolato* di A se esiste un intorno $I(x_0)$, tale che $A \cap I(x_0) = \{x_0\}$.

Definizione 4.8 (Punto di accumulazione)**.** Dato un insieme $A \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ è detto punto *di accumulazione* di A se in ogni intorno di x_0 esiste almeno un punto di A distinto da x_0. L'insieme dei punti di accumulazione di A si dice *derivato* di A e si indica con $\operatorname{Der}(A)$.

Definizione 4.9 (Punto di chiusura)**.** Dato un insieme $A \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ è detto punto *di chiusura* di A se in ogni intorno di x_0 esiste almeno un punto di A. L'insieme dei punti di chiusura di A è detto *chiusura* di A, e si indica con il simbolo $\bar{A}$.

Dalle definizioni sopra date seguono immediatamente le seguenti proprietà.

1. I punti interni, di frontiera, isolati e di accumulazione appartengono alla chiusura.
2. Un punto di chiusura o è interno o è di frontiera.
3. Un punto di chiusura o è di accumulazione o è isolato.
4. I punti di frontiera e i punti di accumulazione possono non appartenere all'insieme.
5. Un punto di frontiera per A è anche di frontiera per A^C.
6. L'estremo superiore e l'estremo inferiore di un insieme, se esistono, sono punti di accumulazione.
7. In un intorno di un punto di accumulazione esistono infiniti elementi dell'insieme.
8. Tutti i punti di un intervallo $]a, b[$ sono punti interni e di accumulazione; la sua frontiera è l'insieme $\{a, b\}$.

Definizione 4.10 (Segmento)**.** La sua chiusura dell'intervallo $]a, b[$ si indica con il simbolo $[a, b]$ e viene detta *segmento* di estremi a e b:

$$[a, b] = \{x \mid x \in \mathbb{R}, a \leq x \leq b\} \ .$$

Si usa distinguere fra intervallo e segmento usando anche le locuzioni *intervallo aperto* e *intervallo chiuso*.

Esempio 13. Tutti i punti dell'insieme

$$A = \{x|x \in \mathbb{R}, x = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\} = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\right\}$$

sono punti isolati; l'unico punto di accumulazione è $x = 0$ che non appartiene all'insieme.

Esempio 14. L'insieme $\mathbb{Q}$ dei numeri razionali e l'insieme dei numeri irrazionali $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ è costituito da tutti punti di accumulazione; inoltre tali insiemi non hanno punti interni né punti esterni, infatti in ogni intorno di un razionale esiste sempre un irrazionale [Teorema 1.10].

Teorema 4.1 (Insiemi a frontiera vuota)**.** *I soli sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ aventi frontiera vuota sono $\mathbb{R}$ e $\varnothing$.*

Dimostrazione (costruttiva)
Che $\mathbb{R}$ e $\varnothing$ abbiano frontiera vuota è ovvio; resta da mostrare che sono gli unici sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ con questa proprietà. Sia infatti A un sottoinsieme di $\mathbb{R}$ e A^C il suo complementare e si considerino $a \in A$ e $b \in A^C$, sia inoltre $a < b$; si consideri quindi l'insieme

$$B = \{x \mid x \in \mathbb{R}, [a, x] \subseteq A\} \ ;$$

B è non vuoto (contiene a) ed ammette il maggiorante b, quindi ammette estremo superiore $\lambda = \sup(B)$ [teorema 1.5]; quindi in ogni intorno di λ esistono punti di A (quelli minori di λ) e punti di A^C (quelli maggiori di λ). □

4.3. Insiemi aperti

Definizione 4.11 (Insieme aperto)**.** Un sottoinsieme A di $\mathbb{R}$ si dice *aperto* se non ha punti in comune con la sua frontiera.

Si noti che i punti di un insieme aperto sono tutti interni.

Esempio 15. Sono aperti $\mathbb{R}$, $\varnothing$, gli intervalli, gli intorni circolari.

Teorema 4.2 (Unione di aperti). *L'unione di un numero qualunque (anche infinito) di insiemi aperti di $\mathbb{R}$ è un insieme aperto.*

Dimostrazione (costruttiva)
Siano $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ insiemi aperti di $\mathbb{R}$; se a appartiene all'unione di tali insiemi vuol dire che esiste un naturale k per cui $a \in A_k$, ma A_k è aperto quindi a è interno ad A_k e quindi è interno all'unione di tutti gli insiemi. □

Teorema 4.3 (Intersezione di aperti). *L'intersezione di un numero finito di aperti di $\mathbb{R}$ è un insieme aperto.*

Dimostrazione (costruttiva)
Per la proprietà associativa dell'intersezione di insiemi è possibile limitare la dimostrazione all'intersezione di due soli insiemi, cioè se è vero per $A_1 \cap A_2$, allora è vero per $A_1 \cap A_2 \cap A_3 = (A_1 \cap A_2) \cap A_3$ e cosí via. Siano dunque A_1 e A_2 due aperti di $\mathbb{R}$; se la loro intersezione è vuota il teorema è vero. Sia dunque $a \in A_1 \cap A_2$, quindi a appartiene sia ad A_1 che ad A_2 e quindi è interno ad entrambi, quindi esistono due intorni circolari $I_1(a, r_1)$ ed $I_2(a, r_2)$ contenuti rispettivamente in A_1 e A_2, ma allora posto $r = \min(\{r_1, r_2\})$, l'intorno circolare $I(a, r)$ è contenuto sia in A_1 che in A_2, quindi a è interno all'intersezione $A_1 \cap A_2$, che quindi risulta un insieme aperto. □

4.4. Insiemi chiusi

Definizione 4.12 (Insieme chiuso). Un sottoinsieme A di $\mathbb{R}$ si dice *chiuso* se il suo complementare in $\mathbb{R}$ è aperto.

Teorema 4.4. *Un sottoinsieme A di $\mathbb{R}$ è chiuso se e solo se contiene tutti i suoi punti di accumulazione.*

Dimostrazione (costruttiva)
Se un punto è di accumulazione o è interno o è di frontiera; ma un insieme contiene tutti i suoi punti interni e tutti i suoi punti di frontiera se e solo se è chiuso. □

Si noti che un insieme chiuso contiene tutti i punti della sua frontiera e tutti i suoi punti di accumulazione. Un insieme chiuso, quindi, coincide con la sua chiusura.

Esempio 16. Sono chiusi gli insiemi $\mathbb{R}$, $\varnothing$, i segmenti.

Si noti che $\mathbb{R}$ e $\varnothing$ sono sia aperti che chiusi.

Esempio 17. L'insieme $\mathbb{Z}$ degli interi è chiuso, infatti è il complementare dell'unione infinita degli intervalli aperti $]n, n+1[$. Similmente, anche l'insieme $\mathbb{N}$ dei naturali è chiuso.

Esempio 18. L'insieme $\mathbb{Q}$ dei razionali non è chiuso perché non contiene tutti i suoi punti di accumulazione; tutti i numeri irrazionali sono infatti punti di accumulazione per $\mathbb{Q}$ [teorema 1.10]; ne segue l'insieme degli irrazionali $\mathbb{Q}^C = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ non è aperto. D'altra parte, similmente, l'insieme degli irrazionali non è chiuso, poiché tutti i razionali sono punti di accumulazione per $\mathbb{Q}^C$ [teorema 1.10]; ne segue che $\mathbb{Q}$ non è aperto. Quindi $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{Q}^C$ non sono né aperti né chiusi.

Teorema 4.5 (Unione e intersezione di chiusi). *L'unione di un numero finito di insiemi chiusi di $\mathbb{R}$ è un insieme chiuso. L'intersezione di un numero qualunque (anche infinito) di insiemi chiusi di $\mathbb{R}$ è un insieme chiuso.*

Dimostrazione (costruttiva)
La dimostrazione è una immediata conseguenza degli analoghi teoremi [4.2, 4.3] per gli insiemi aperti, utilizzando le leggi di De Morgan:

$$A_1 \cap A_2 = (A_1^C \cup A_2^C)^C \qquad , \qquad A_1 \cup A_2 = (A_1^C \cap A_2^C)^C \ . \qquad \square$$

Per futura utilità si dà la seguente definizione.

Definizione 4.13 (Retta estesa.). Si dice *retta estesa*, e si indica con il simbolo $\tilde{\mathbb{R}}$, l'insieme

$$\tilde{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\} .$$

Si noti che con l'introduzione dei punti infiniti l'insieme dei numeri reali perde la sua struttura algebrica. Tuttavia possiede una struttura topologica definita dai seguenti intorni di $+\infty$ e $-\infty$.

Definizione 4.14 (Intorni di $\pm\infty$). L'insieme $I(+\infty)$ si dice *intorno di* $+\infty$ se contiene un insieme del tipo $]a, +\infty]$, per qualche reale a.
L'insieme $I(-\infty)$ si dice *intorno di* $-\infty$ se contiene un insieme del tipo $[-\infty, a[$, per qualche reale a.

Definizione 4.15 (Spazio separato). Un insieme A con struttura topologica si dice *separato* o *di Hausdorff*[1] se per ogni coppia di elementi distinti a e b di A esistono due intorni $I(a)$ e $I(b)$ disgiunti.

Teorema 4.6 (Separatezza di $\tilde{\mathbb{R}}$). *La retta estesa* $\tilde{\mathbb{R}}$ *è uno spazio separato.*

Dimostrazione (costruttiva)
Siano infatti $a, b \in \tilde{\mathbb{R}}$ e sia $a < b$; esiste certamente $c \in \mathbb{R}$ tale che sia $a < c < b$; infatti se $a, b \in \mathbb{R}$ basta prendere $c = (a + b)/2$; se $a = -\infty$ basta prendere $c < b$; se $b = +\infty$ basta prendere $c > a$; allora gli intorni $I(a) = [-\infty, c[$ e $I(b) =]c, +\infty]$ sono gli intorni richiesti. □

[1] Felix Hausdorff (1868-1942), matematico tedesco.

5

SUCCESSIONI

5.1. Generalità

Definizione 5.1 (Successione)**.** Dato un insieme $X \subseteq \mathbb{R}$ si dice successione di X una funzione da $\mathbb{N}$ a X, $x : \mathbb{N} \to X$; viene indicata con il simbolo $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e il valore della successione per un dato naturale n si indica con $x_n = x(n)$.

Definizione 5.2 (Limite di una successione)**.** Data la successione $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ si dice che essa ha limite $\ell \in \tilde{\mathbb{R}}$ e si scrive

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = \ell$$

se, per ogni intorno $I(\ell)$, esiste un naturale k tale che, per ogni $n > k$ valga

$$x_n \in I(\ell) \ .$$

Se ℓ è finito la successione si dice *convergente*, se $\ell = \pm\infty$ si dice *divergente*. Se non è né convergente né divergente la successione è detta *indeterminata* o *oscillante*.

Si noti che, in generale, il valore del naturale k dipende dalla scelta dell'intorno $I(\ell)$. Nella pratica del calcolo conviene precisare l'intorno $I(\ell)$ utilizzando le seguenti definizioni equivalenti alla precedente.

Definizione 5.3 (Successione convergente)**.** Data la successione $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ si dice che essa ha limite finito ℓ e si scrive

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = \ell$$

se, per ogni $\epsilon > 0$, esiste un naturale k tale che, per ogni $n > k$ valga

$$|x_n - \ell| < \epsilon \ .$$

In questa definizione, quindi, l'intorno di ℓ è un intorno circolare di raggio ϵ.

Definizione 5.4 (Successione divergente a $+\infty$)**.** La successione $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ si dice che *divergente* a $+\infty$, e si indica con

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = +\infty$$

se, per ogni $a \in \mathbb{R}$, esiste un naturale k tale che, per ogni $n > k$ valga

$$x_n \geq a \ .$$

Definizione 5.5 (Successione divergente a $-\infty$)**.** La successione $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ si dice che *divergente* a $-\infty$, e si indica con

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = -\infty$$

se, per ogni $a \in \mathbb{R}$, esiste un naturale k tale che, per ogni $n > k$ valga

$$x_n \leq a \ .$$

Esempio 19 (Successione costante)**.** Se la successione $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è costante, cioè se $x_n = a$ per ogni naturale n, allora

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = a \ ;$$

infatti, scelto comunque $\epsilon > 0$, si ha $|x_n - a| = 0 < \epsilon$, per ogni naturale n.

Esempio 20 (Successione convergente)**.** La successione $x_n = \frac{n+4}{n-3}$ è convergente e vale

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n+4}{n-3} = 1 \ .$$

Per dimostrarlo occorre mostrare che, scelto un qualunque $\epsilon > 0$, la disuguaglianza

$$\left|\frac{n+4}{n-3} - 1\right| < \epsilon$$

è verificata per n piú grande di un certo naturale k. Questo è vero infatti dalla precedente disuguaglianza segue

$$\left|\frac{7}{n-3}\right| < \epsilon \qquad \longrightarrow \qquad |n-3| > \frac{7}{\epsilon}$$

basta quindi scegliere come k il primo naturale maggiore di $3 + 7/\epsilon$.

Esempio 21 (Successione divergente)**.** La successione $x_n = n^3 - 4n^2 + 1$ diverge a $+\infty$; per dimostrarlo basta mostrare che scelto $a \in \mathbb{R}$ si ha $x_n > a$ per n maggiori di un certo k. Si osservi che vale

$$x_n = n^3\left(1 - \frac{4}{n} + \frac{1}{n^3}\right) \geq n^3\left[1 - \left(\frac{4}{n} + \frac{1}{n^3}\right)\right]$$

e per $n > 8$ si ha (lo dimostri il lettore studioso risolvendo la semplice disequazione)

$$\frac{4}{n} + \frac{1}{n^3} < \frac{1}{2} \ ;$$

per tali n quindi vale

$$x_n \geq n^3\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{n^3}{2} \ ;$$

per ogni a quindi basta che sia $n > \sqrt[3]{2a}$ perché sia

$$x_n > \frac{n^3}{2} > a \ .$$

Basta quindi prendere $k = \max\{8, \sqrt[3]{2a}\}$.

Esempio 22 (Successione indeterminata)**.** La successione $x_n = (-1)^n = \{-1, 1, -1, 1, \ldots\}$ è indeterminata; non è infatti divergente a $+\infty$ poiché scelto $a > 1$ si ha $x_n < a$ per ogni n; non è divergente a $-\infty$ poiché scelta $a < -1$ si ha $x_n > a$ per ogni n; non ha limite finito poiché, scelto $\epsilon < 1$ se esistesse un ℓ per cui valga $|x_n - \ell| < \epsilon$ per ogni n maggiore di un certo k, per un tale n si avrebbero le relazioni

$$\ell - \epsilon < x_n < \ell + \epsilon \qquad , \qquad \ell - \epsilon < x_{n+1} < \ell + \epsilon \ .$$

Quindi x_n e x_{n+1} si verrebbero a trovare entrambi in un intorno circolare di ℓ di raggio $2\epsilon < 2$; ma questo è impossibile poiché $|x_n - x_{n+1}| = 2$.

Definizione 5.6 (Successioni minoranti e maggioranti)**.** La successione $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ si dice *minorante* della successione $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ se vale $a_n \leq b_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e si indica con $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \leq \{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$; in tal caso la successione $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ si dice *maggiorante* della $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Definizione 5.7 (Successione limitata). La successione $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è detta *limitata* se esiste un reale positivo M tale che valga $|x_n| \le M$, per ogni n.

Definizione 5.8 (Successione infinitesima). La successione $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ si dice *infinitesima* se converge a zero.

Teorema 5.1. *Se la successione $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a ℓ, le successioni $a_n - \ell$ e $|a_n - \ell|$ sono infinitesime.*
Dimostrazione (costruttiva)
Segue immediatamente dalla definizione 5.3 di successione convergente. □

Definizione 5.9 (Successione monotòna). Una successione $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è detta monotòna crescente se da $n < m$ segue $x_n \le x_m$. Una successione $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è detta monotòna decrescente se da $n < m$ segue $x_n \ge x_m$.

5.2. Teoremi sui limiti

Teorema 5.2 (Unicità del limite). *Se la successione $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ammette il limite $\ell \in \tilde{\mathbb{R}}$, allora tale limite è unico.*

Dimostrazione (per assurdo)
Siano infatti ℓ' ed ℓ'' due limiti distinti di x_n e siano $I(\ell')$ e $I(\ell'')$ due intorni disgiunti [teorema 4.6]; allora [definizione 5.2] esiste un naturale k' tale che per ogni $n > k'$ si ha $x_n \in I(\ell')$ ed un naturale k'' tale che per ogni $n > k''$ si ha $x_n \in I(\ell'')$; quindi posto $k = \max\{k', k''\}$ si ha $x_n \in I(\ell') \cap I(\ell'')$ per ogni $n > k$, contro l'ipotesi che i due intorni siano disgiunti. □

Teorema 5.3 (Permanenza del segno). *Se la successione $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ha limite $\ell \neq 0$ esiste un naturale k tale che, per ogni $n > k$, x_n ha lo stesso segno di ℓ.*

Dimostrazione (costruttiva)
Basta, nella definizione di limite [definizione 5.2], prendere come intorno di ℓ l'intorno circolare $I(\ell, |\ell|/2)$. □

Teorema 5.4. *Se $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sono due successioni rispettivamente di limiti ℓ ed ℓ' tali che sia $\ell \le \ell'$, allora esiste un naturale k tale che per ogni $n > k$ si ha $a_n \le b_n$.*

Dimostrazione (costruttiva)
Si scelgano due intorni disgiunti [teorema 4.6] $I(\ell)$ e $I(\ell')$, per i quali è chiaro che vale $I(\ell) \le I(\ell')$, allora per la definizione di limite esistono due naturali k' e k'' tali che per ogni $n > k'$ vale $a_n \in I(\ell)$ e per ogni $n > k''$ vale $b_n \in I(\ell'')$; quindi, detto $k = \max\{k', k''\}$, si ha che per ogni $n > k$ vale $a_n \le b_n$. □

Teorema 5.5 (Del confronto). *Se $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sono due successioni aventi rispettivamente limiti ℓ e ℓ' in $\tilde{\mathbb{R}}$ e se $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è minorante di $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ allora si ha $\ell \le \ell'$.*

Dimostrazione (per assurdo)
Se fosse $\ell > \ell'$ esisterebbe un naturale k tale che per ogni $n > k$ si avrebbe $a_n > b_n$ [teorema 5.4], contro l'ipotesi che a_n sia minorante di b_n. □

Teorema 5.6. *Ogni successione convergente è limitata.*

Dimostrazione (costruttiva)
Sia $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione convergente e sia $\ell \in \mathbb{R}$ il suo limite, allora [definizione 5.3] fissato $\epsilon = 1$ esiste un naturale k tale che per ogni $n > k$ valga $|x_n - \ell| < 1$ e quindi[1]

$$|x_n| - |\ell| \le |x_n - \ell| < 1 \qquad \longrightarrow \qquad |x_n| < 1 + |\ell| \ .$$

La condizione di limitatezza è quindi verificata per tutti gli n maggiori di k; a questo punto basta prendere $M = \max\{x_0, x_1, \ldots, x_k, 1 + |\ell|\}$ e si ha $x_n \le M$ per ogni n. □

Occorre fare attenzione alla terminologia che può essere fuorviante: esistono successioni limitate che non ammettono limite come quella presentata nell'esempio 22.

Teorema 5.7 (dei due carabinieri)**.** *Siano date tre successioni $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tali che esista un naturale k per cui valga*

$$a_n \le x_n \le b_n \qquad , \qquad \text{per } n > k$$

e tali che inoltre $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tendano allo stesso limite $\ell \in \mathbb{R}$; allora anche $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a ℓ.

Dimostrazione (costruttiva)
Fissato $\epsilon > 0$ esistono due naturali k' ed k'' tali che valgano [definizione 5.3]

$$\begin{aligned} \ell - \epsilon < a_n < \ell + \epsilon \qquad & \text{per } n > k' \\ \ell - \epsilon < b_n > \ell + \epsilon \qquad & \text{per } n > k'' \ . \end{aligned}$$

Allora, posto $k_0 = \max\{k, k', k''\}$, per $n > k_0$ le due precedenti disequazioni valgono entrambe insieme alla $a_n \le x_n \le b_n$; per tali n vale quindi

$$\ell - \epsilon < a_n \le x_n < b_n < \ell + \epsilon \ .$$

Si è quindi concluso che, fissato qualunque $\epsilon > 0$ esiste k intero tale che, per ogni $n > k_0$ vale

$$\ell - \epsilon < x_n < \ell + \epsilon$$

che è quanto si doveva dimostrare. □

Corollario 5.8. Se le successioni $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sono tali che $|a_n| \le |b_n|$ e $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è infinitesima allora anche a_n è infinitesima.

Esiste una versione del teorema precedente anche nel caso di successioni divergenti.

Teorema 5.9. *Date le successione $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, si supponga che esista un naturale k tale valga $a_n \le b_n$ per ogni $n > k$ allora se $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ diverge a $+\infty$ anche $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ diverge a $+\infty$; viceversa se $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ diverge a $-\infty$ anche $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ diverge a $-\infty$.*

Dimostrazione (costruttiva)
Nel primo caso, per definizione [definizione 5.4], per ogni a esiste un naturale k' tale che valga $a_n > a$ per ogni $n > k'$; ma, per $n > k$ vale $b_n \ge a_n$; quindi, posto $k'' = \max\{k, k'\}$, per $n > k''$ si ha

$$b_n \ge a_n > a \qquad \longrightarrow \qquad b_n > a \ .$$

L'analoga dimostrazione nel secondo caso si lascia al lettore studioso. □

Teorema 5.10. *Se la successione $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge ad ℓ allora si ha*

$$\lim_{n\to+\infty} |x_n| = |\ell| \ .$$

---
[1] Si ricorda qui che, per ogni $x, y \in \mathbb{R}$, vale la disuguaglianza $|x| - |y| \le |x - y|$.

Dimostrazione (costruttiva)
Si osservi che vale $\big||x_n| - |\ell|\big| \leq |x_n - \ell|$ e che la successione $|x_n - \ell|$ è infinitesima [teorema 5.1]; quindi la tesi segue dal corollario 5.8. □

Esempio 23. Vale
$$\lim_{n\to+\infty} (n - n^2) = -\infty \ .$$
Infatti, si osservi innanzitutto che la successione $-\frac{n^2}{2}$ diverge a $-\infty$, infatti per ogni $a \in \mathbb{R}$ basta applicare la definizione 5.5, con $k = \sqrt{2|a|}$. Quindi, posto $a_n = n - n^2$ e $b_n = -\frac{n^2}{2}$, si ha
$$a_n < b_n \qquad \text{per ogni } n > 2 \ ;$$
quindi basta applicare il teorema 5.9.

Esempio 24. Vale
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n+3}{n-3} = 1 \ .$$
Infatti vale, per ogni $n \in \mathbb{N}$, la relazione di disuguaglianza
$$1 < \frac{n+3}{n-3} < \frac{n+4}{n-3}$$
basta quindi ricordare l'esempio 20 e applicare il teorema 5.7.

Teorema 5.11. *Ogni successione monotòna ammette limite in $\tilde{\mathbb{R}}$; in particolare se la successione è crescente e superiormente limitata il limite coincide con l'estremo superiore, se illimitata il limite è $+\infty$; se è decrescente e inferiormente limitata il limite coincide con l'estremo inferiore, se illimitata il limite è $-\infty$.*

Dimostrazione (costruttiva)
Sia $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ monotòna crescente; si distinguono allora due casi a seconda che l'insieme $\{x_n\}$ al variare di n sia superiormente limitato, e quindi ammetta estremo superiore [teorema 1.5], o sia superiormente illimitato.
Sia $\sup\{x_n\} = \ell$; allora per ogni $\epsilon > 0$ esiste un intero k tale che $\ell - \epsilon < x_k$; dall'ipotesi di monotonia segue quindi
$$\ell - \epsilon < x_n \qquad \text{per ogni } n > k \ .$$
D'altra parte per definizione di estremo superiore vale $x_n \leq \ell$ per ogni naturale n; quindi
$$\ell - \epsilon < x_n < \ell < \ell + \epsilon \qquad \text{per ogni } n > k$$
e quindi
$$\lim_{n\to+\infty} x_n = \ell \ .$$
Sia ora $\{x_n\}$ superiormente illimitato; allora per ogni $a \in \mathbb{R}$ esiste un naturale k per cui $x_k > a$; dall'ipotesi di monotonia allora segue
$$x_n > a \qquad \text{per ogni } n > k$$
e quindi
$$\lim_{n\to+\infty} x_n = +\infty \ .$$
L'analoga dimostrazione nel caso la successione sia monotòna decrescente si lascia alla cura del lettore studioso. □

Corollario 5.12. Una successione monotòna converge se e solo se è limitata.

Teorema 5.13 (Numero di Nepero)**.** *Vale il limite*
$$\lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \ .$$

Dimostrazione (costruttiva)
Immediata conseguenza del teorema precedente e del teorema 2.10. □

5.3. Operazioni con i limiti finiti

Definizione 5.10 (Somma e differenza di successioni). Date due successioni $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ si definiscono la *successione somma* e la *successione differenza* ponendo

$$(a+b)(n) = a_n + b_n \qquad , \qquad (a-b)(n) = a_n - b_n \ .$$

Definizione 5.11 (Prodotto di due successioni). Date due successioni $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ si definisce la *successione prodotto* ponendo

$$(a \cdot b)(n) = a_n b_n \ .$$

Teorema 5.14 (Limite di una combinazione lineare). *Date due successioni $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, convergenti rispettivamente ai limiti ℓ_1 ed ℓ_2, e due numeri reali c_1 e c_2 vale*

$$\lim_{n\to+\infty} (c_1 a_n + c_2 b_n) = c_1\ell_1 + c_2\ell_2 \ .$$

Dimostrazione (costruttiva)
Il teorema è vero per $c_1 = c_2 = 0$; ci si può dunque limitare al caso $|c_1| + |c_2| > 0$. Per ogni $\epsilon > 0$ esistono quindi due naturali k' e k'' tale che valgano

$$\begin{aligned} |a_n - \ell_1| &< \epsilon \qquad \text{per ogni } n > k' \\ |b_n - \ell_2| &< \epsilon \qquad \text{per ogni } n > k'' \ ; \end{aligned}$$

posto dunque $k = \max\{k', k''\}$, per $n > k$ le precedenti disequazioni valgono entrambe; scelto quindi $(|c_1| + |c_2|)\epsilon > 0$ (la cui arbitrarietà, si noti, è pari a quella di ϵ) si ha quindi[2]

$$\begin{aligned} &|(c_1 a_n + c_2 b_n) - (c_1\ell_1 + c_2\ell_2)| = \\ &\qquad = |c_1(a_n - \ell_1) + c_2(b_n - \ell_2)| \leq |c_1||a_n - \ell_1| + |c_2||b_n - \ell_2| < (|c_1| + |c_2|)\epsilon \end{aligned}$$

che è quanto occorreva dimostrare. □

Corollario 5.15. Somme e differenze di successioni infinitesime sono infinitesime.

Corollario 5.16. Se la successione a_n converge a ℓ, la successione $a_n - \ell$ converge a zero e viceversa.

Teorema 5.17. *Se $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è infinitesima e $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è limitata allora il loro prodotto è infinitesimo.*

Dimostrazione (costruttiva)
Se b_n è limitata esiste un reale positivo M per cui si ha $|b_n| \leq M$; se a_n è infinitesima, fissato $\epsilon/M > 0$ esiste un naturale k tale che, per ogni $n > k$ valga $|a_n| < \epsilon/M$; quindi, per $n > k$ si ha

$$|a_n b_n| = |a_n||b_n| < \frac{\epsilon}{M} M = \epsilon \ ;$$

quindi anche $a_n b_n$ è infinitesima. □

Teorema 5.18 (Limite del prodotto). *Date due successioni $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, convergenti rispettivamente ai limiti ℓ_1 ed ℓ_2, vale*

$$\lim_{n\to+\infty} (a_n b_n) = \ell_1\ell_2 \ .$$

[2] Si ricorda che valgono $|a+b| \leq |a| + |b|$ e $|ab| = |a||b|$ per ogni a, b reali.

Dimostrazione (costruttiva)
Si consideri la serie di relazioni:

$$|a_n b_n - \ell_1 \ell_2| = |a_n b_n - a_n \ell_2 + a_n \ell_2 - \ell_1 \ell_2| \leq |a_n||b_n - \ell_2| + |a_n - \ell_1||\ell_2| \ .$$

Ora la successione $|b_n - \ell_2|$ è infinitesima [teorema 5.1] e la $|a_n|$ è limitata in quanto convergente [teorema 5.6]; quindi $|a_n||b_n - \ell_2|$ è infinitesima [teorema 5.17]; la successione $|a_n - \ell_1|$ è infinitesima [teorema 5.1] e ℓ_2 è un reale qualunque, quindi $|a_n - \ell_1||\ell_2|$ è infinitesima [teorema 5.14]; la successione $|a_n||b_n - \ell_2| + |a_n - \ell_1||\ell_2|$ quindi, essendo somma di successioni infinitesime, è infinitesima [corollario 5.15]; pertanto la successione $|a_n b_n - \ell_1 \ell_2|$ è anch'essa infinitesima [corollario 5.8]. La tesi segue quindi dal corollario 5.16. □

Teorema 5.19 (Limite del reciproco)**.** *Se la successione* $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *converge ad un limite* $\ell \neq 0$*, allora la successione* $1/a_n$ *converge a* $1/\ell$*.*

Dimostrazione (costruttiva)
Per il teorema della permanenza del segno [teorema 5.3], esiste un naturale k' per cui per $n > k'$ a_n ha lo stesso segno di ℓ, e quindi è diversa da zero. Si consideri allora la serie di uguaglianze:

$$\left| \frac{1}{a_n} - \frac{1}{\ell} \right| = \left| \frac{\ell - a_n}{a_n \ell} \right| = |a_n - \ell| \frac{1}{|a_n \ell|} \ .$$

Ora la successione $|a_n - \ell|$ è infinitesima [teorema 5.1]; si osservi che vale

$$\lim_{n\to+\infty} |a_n \ell| = |\ell^2| = \ell^2 \ ,$$

quindi, fissato $\epsilon = \ell^2/2 > 0$, esiste un naturale k'' tale che per ogni $n > k''$ vale

$$-\frac{\ell^2}{2} < |a_n \ell| - \ell^2 < \frac{\ell^2}{2} \ .$$

Quindi, fissato $k = \max\{k', k''\}$, per ogni $n > k$ vale la precedente disequazione con $a_n \ell > 0$; quindi la prima delle precedenti disequazioni diventa

$$a_n \ell > \frac{\ell^2}{2} \qquad \longrightarrow \qquad \left| \frac{1}{a_n \ell} \right| < \frac{2}{\ell^2} \ ;$$

la successione $|1/a_n \ell|$ è quindi limitata e quindi la successione $|1/a_n - 1/\ell|$ è il prodotto di una successione infinitesima e di una limitata ed è pertanto infinitesima [teorema 5.17]. □

Corollario 5.20 (Limite del quoziente)**.** Se le successioni $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $\{n_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ convergono rispettivamente ai limiti ℓ_1 ed $\ell_2 \neq 0$, allora vale

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\ell_1}{\ell_2} \ .$$

5.4. Operazioni con i limiti infiniti

Poiché la struttura algebrica di $\mathbb{R}$ non si estende alla retta estesa $\tilde{\mathbb{R}}$, i teoremi visti sopra per le operazioni nel caso di successioni convergenti non si estendono in generale al caso di successioni divergenti. Vi sono tuttavia dei casi in cui tale estensione funziona; gli altri casi prendono il nome tradizionale di *forme indeterminate*.

Teorema 5.21 (Limite della somma)**.** *Se due successioni divergono verso lo stesso limite, anche la loro somma diverge verso il medesimo limite.*

Dimostrazione (costruttiva)
Siano $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ due successioni divergenti a $+\infty$; per ogni M, vista la divergenza delle due successioni esiste un naturale k' per cui si ha $a_n > M/2$ per ogni $n > k'$ e un naturale k'' per cui si ha $b_n > M/2$ per ogni $n > k''$; posto $k = \max\{k', k''\}$, per $n > k$ si ha dunque $a_b + b_n > M/2 + M/2$ quindi $a_n + b_n > M$. La simile dimostrazione nel caso le due successioni divergano a $-\infty$ si lascia alla cura del lettore studioso. □

Teorema 5.22 (Limite della somma 2)**.** *Date due successioni, se una diverge a $+\infty$ (rispettivamente a $-\infty$) e l'altra è inferiormente (rispettivamente superiormente) limitata, allora la loro somma diverge a $+\infty$ (rispettivamente $-\infty$).*

Dimostrazione (costruttiva)
Siano $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione divergente a $+\infty$ e $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione inferiormente limitata, cioè tale che esista un numero reale b tale che $b_n \geq b$, per ogni n; allora scelto arbitrariamente il numero reale a, per la divergenza di a_n, deve esistere un naturale k tale che valga $a_n > a - b$ per ogni $n > k$; per tali n quindi vale

$$a_n + b_n > a - b + b = a$$

e quindi la successione somma diverge a $+\infty$. La dimostrazione del caso in cui si ha divergenza a $-\infty$ viene lasciata al lettore studioso. □

Teorema 5.23 (Limite del prodotto)**.** *Date due successioni, se una diverge e l'altra si mantiene lontano dallo zero allora il loro prodotto diverge.*

Dimostrazione (costruttiva)
Siano $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione divergente a $+\infty$ o $-\infty$ e $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione che si mantenga lontana dallo zero, cioè tale che esista un numero reale $b > 0$ tale che $|b_n| \geq b$, per ogni n; allora per ogni scelta del reale positivo a, la divergenza di a_n assicura l'esistenza di un naturale k tale che valga $|a_n| > a/b$ per ogni $n > k$; per tali n quindi vale

$$|a_n b_n| = |a_n||b_n| > \frac{a}{b} b = a$$

e quindi $a_n b_n > a$ o $a_n b_n < -a$; pertanto la successione prodotto diverge. □

Corollario 5.24 (Limite del prodotto 2)**.** Date due successioni, se una diverge a $+\infty$ e l'altra converge ad un numero reale positivo (negativo) o diverge a $+\infty$ ($-\infty$), allora il loro prodotto diverge a $+\infty$ ($-\infty$).

Teorema 5.25 (Limite del reciproco)**.** *La successione $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ di numeri reali non nulli è infinitesima se e solo se la successione dei reciproci $1/a_n$ è divergente.*

Dimostrazione (costruttiva)
Per ogni scelta di $a > 0$, per la convergenza a zero della successione a_n, esiste un naturale k tale che valga $|a_n| < 1/a$; per tali n vale

$$\left|\frac{1}{a_n}\right| > a$$

e quindi la successione dei reciproci è divergente. □

Corollario 5.26 (Limite del reciproco 2)**.** La successione $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ di numeri reali non nulli è divergente se e solo se la successione dei reciproci $1/a_n$ è infinitesima.

Corollario 5.27 (Limite del quoziente)**.** Siano $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione e $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ di reali non nulli; se $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ diverge e $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è limitata allora la successione a_n/b_n è infinitesima; se $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ si mantiene lontana da zero e $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è infinitesima allora a_n/b_n diverge.

Corollario 5.28 (Limite del quoziente 2)**.** Se $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge e $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ diverge allora a_n/b_n è infinitesima; se $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge ad un limite non nullo e $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è infinitesima allora a_n/b_n diverge.

Esempio 25 (Successione geometrica)**.** La successione $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, definita per ogni n da $x_n = a^n$ è detta *successione geometrica di ragione a*.
Se $a = 0$ o $a = 1$ la successione è costante e converge rispettivamente a 0 e 1.
Se $a = -1$ la successione è quella già discussa nell'esempio 22 ed è quindi indeterminata.
Se $|a| > 1$ la successione $|a|^n$ è strettamente crescente e quindi ammette limite in $\tilde{\mathbb{R}}$ [teorema 5.11]; se il limite fosse il numero reale ℓ si avrebbe

$$\ell = \lim_{n\to+\infty} |a|^n = \lim_{n\to+\infty} |a|^{n+1} = a \lim_{n\to+\infty} |a|^n = a\ell \;;$$

quindi, visto che $a \neq 1$, dovrebbe essere $\ell = 0$ ma $\ell = \sup(\{|a|^n\})$ e quindi non può essere nullo, quindi il limite non può essere finito; quindi la successione $|a|^n$ diverge. Se $a > 1$ diverge a $+\infty$, se $a < -1$ diverge oscillando fra numeri positivi e negativi.
Se $|a| < 1$ allora $|1/a| > 1$ e quindi $|1/a|^n$ diverge; pertanto la $|a|^n$ è infinitesima [teorema 5.25]; quindi anche $x_n = a^n$ è infinitesima perché, se avesse un limite $\ell \neq 0$, $|x_n| = |a|^n$ avrebbe limite $|\ell| > 0$ [teorema 5.10], il che è assurdo.

Esempio 26 (Serie geometrica)**.** La serie geometrica di ragione a,definita nel capitolo 2 [teorema 2.5], per n che tende a $+\infty$ ha o non ha limite a seconda del valore di a. In particolare, posto

$$s_n = 1 + a + a^2 + \cdots + a^n = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a} \;,$$

se $n \geq 1$ si ha

$$\lim_{n\to+\infty} s_n = +\infty$$

in tal caso infatti vale $s_n \geq na + 1$, ma $na + 1$ diverge a $+\infty$ e quindi anche s_n [teorema 5.9];
se $a \leq -1$ la serie è oscillante e quindi indeterminata;
se $|a| < 1$ la serie è convergente, infatti a^{n+1} è infinitesima, quindi

$$\lim_{n\to+\infty} s_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a} = \frac{1}{1 - a} \tag{5.1}$$

Forme indeterminate. I casi non compresi nei teoremi precedenti non hanno un comportamento generale riconducibile ad un teorema e vanno visti caso per caso; come detto sopra, tali casi vengono detti *forme indeterminate* e vengono, convenzionalmente, indicate con i simboli

$$+\infty - \infty \quad , \quad 0 \cdot \infty \quad , \quad \frac{0}{0} \quad , \quad \frac{\infty}{\infty} \;.$$

Si osservi che le espressioni precedenti vanno intese come *simboli* e non come operazioni fra numeri; si è già detto, infatti che la retta estesa ha una struttura topologica ma non una struttura algebrica e quindi in essa non sono definite le operazioni.

Esempio 27. La successione dell'esempio 20 è un caso di forma indeterminata ∞/∞ che risulta convergente; la successione dell'esempio 21 è un caso di forma indeterminata $+\infty - \infty$ che risulta divergente.

5.5. La funzione esponenziale

Teorema 5.29. *La successione* $\{e_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ *definita da*

$$e_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$

converge.

Dimostrazione (costruttiva)
Per il corollario 5.12 basta mostrare che la successione è monotona crescente e superiormente limitata. Applicando il teorema 2.7 agli $n+1$ termini

$$x_1 = \cdots = x_n = 1 + \frac{x}{n} \quad , \quad x_{n+1} = 1$$

si trova

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n < \left(\frac{n(1 + x/n) + 1}{n+1}\right)^{n+1} = \left(\frac{n + x + 1}{n+1}\right)^{n+1} = \left(1 + \frac{x}{n+1}\right)^{n+1} \quad ;$$

quindi $e_n(x)$ è strettamente crescente se è positiva, cioè se vale $n > -x$.
Si osservi ora che. per $n > |x|$, vale

$$0 < 1 - \frac{x^2}{n^2} < 1 \quad \longrightarrow \quad 0 < \left(1 - \frac{x}{n}\right)\left(1 + \frac{x}{n}\right) < 1 \quad \longrightarrow \quad 0 < \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n < 1$$

e quindi

$$e_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n < \left(1 - \frac{x}{n}\right)^{-n} \quad .$$

Ora, come visto sopra, $(1 - x/n)^n = (1 + (-x)/n)^n$ è crescente se $n > -(-x) = x$ e quindi $(1 - x/n)^{-n}$ e decrescente; pertanto $e_n(x)$ è maggiorata da una successione decrescente e quindi è limitata. Se ne conclude che $e_n(x)$ è convergente per ogni x e il suo limite è l'estremo superiore dell'insieme $\{e_n(x) \mid e_n(x) = (1 + x/n)^n, n \in \mathbb{N}\}$. □

Il precedente teorema giustifica la seguente definizione.

Definizione 5.12 (Funzione esponenziale naturale)**.** La funzione $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita dalla relazione

$$\exp(x) = \lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$

si dice funzione *esponenziale naturale.*

Teorema 5.30. *La funzione esponenziale naturale ha le seguenti proprietà.*
1. $\exp(x) > 0$*, per ogni* x *reale;*
2. $\exp(x_1 + x_2) = \exp(x_1)\exp(x_2)$*, per ogni coppia di reali* x_1, x_2*;*
3. $\exp(-x) = 1/\exp(x)$*, per ogni* x *reale e in particolare per* $x = 0$ *si ha* $\exp(0) = 1$*;*
4. vale, per ogni $x < 1, x \neq 0$*, la disuguaglianza (per ogni* $x \neq 0$ *vale solo la prima):*

$$1 + x < \exp(x) < \frac{1}{1 - x} \quad ; \tag{5.2}$$

5. per ogni coppia di reali x_1, x_2 *tali che sia* $x_1 < x_2$ *vale* $\exp(x_1) < \exp(x_2)$*.*

Dimostrazione (costruttiva)
1. Poiché $\exp(x)$ è l'estremo superiore della successione crescente $e_n(x)$, per $n > |x|$ vale

$$0 < \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n < \exp(x) \ .$$

2. Vale

$$\exp(x_1)\exp(x_2) = \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{x_1}{n}\right)^n \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{x_2}{n}\right)^n = \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{x_1+x_2}{n}+\frac{x_1x_2}{n^2}\right)^n$$

ma vale (lo verifichi il lettore studioso):

$$\left(1+\frac{x_1+x_2}{n}+\frac{x_1x_2}{n^2}\right)^n = \left(1+\frac{x_1+x_2}{n}\right)^n\left(1+\frac{x_1x_2}{n(n+x_1+x_2)}\right)^n$$

per dimostrare la tesi basta quindi mostrare che la seconda parentesi converge a 1. Infatti segue dalla doppia disuguaglianza di Bernoulli [corollario 2.3], con $x = \frac{x_1x_2}{n(n+x_1+x_2)}$:

$$1+\frac{x_1x_2}{n+x_1+x_2} < \left(1+\frac{x_1x_2}{n(n+x_1+x_2)}\right)^n < \frac{1}{1-\dfrac{x_1x_2}{n+x_1+x_2}} \ ;$$

ma i due estremi di questa disuguaglianza tendono a 1 per n che tende a $+\infty$, quindi la tesi segue per il teorema dei due carabinieri [teorema 5.7].
3. Si osservi intanto che vale $e_n(0) = 1$ per ogni naturale n e quindi si tratta di una successione costante , vale quindi $\exp(0) = 1$; quindi per $x_1 = -x_2 = x$ dalla precedente si trova

$$1 = \exp(0) = \exp(x-x) = \exp(x)\exp(-x) \qquad \longrightarrow \qquad \exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)} \ .$$

4. La disuguaglianza $1+x < \exp(x)$ è ovvia per $x \leq -1, x \neq 0$, visto il punto 1. Per $x > -1$ vale, per ogni naturale n

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n < \exp(x)$$

da cui la tesi si ottiene per $n = 1$. Posto $-x$ al posto di x, se $x < 1$, si trova

$$\exp(-x) > 1-x \qquad \longrightarrow \qquad \exp(x) < \frac{1}{1-x} \ .$$

5. Se $x_2 > x_1$ vale, usando la precedente disuguaglianza,

$$\exp(x_2-x_1) > 1+x_2-x_1 > 1$$

ma, usando la 2 e la 3, vale anche

$$\exp(x_2-x_1) = \frac{\exp(x_2)}{\exp(x_1)}$$

e quindi

$$\frac{\exp(x_2)}{\exp(x_1)} > 1 \qquad \longrightarrow \qquad \exp(x_2) > \exp(x_1) \ . \qquad \square$$

Rimane da mostrare che la funzione esponenziale naturale qui definita coincide con l'usuale funzione e^x. Questo è realizzato dal seguente teorema.

Teorema 5.31. *Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ per cui valga $f(x_1+x_2) = f(x_1)f(x_2)$ per ogni coppia di reali x_1, x_2, allora:*
1. $f(x)$ è identicamente nulla o $f(x) > 0$ per ogni reale x;
2. se $f(x)$ non è identicamente nulla, vale $f(\alpha) = [f(1)]^\alpha$ per ogni reale α;
3. se $f(x) = \exp(x)$ allora $f(1) = e$.

Dimostrazione (costruttiva)
1. Se esiste un $x_0 \in \mathbb{R}$ tale che valga $f(x_0) = 0$ allora, per ogni $x \in \mathbb{R}$, si ha

$$f(x) = f[(x-x_0)+x_0] = f(x-x_0)f(x_0) = 0$$

e quindi la funzione è identicamente nulla. Se $f(x) \neq 0$ per ogni reale x allora vale

$$f(x) = f(x/2 + x/2) = f(x/2)f(x/2) = [f(x/2)]^2 > 0$$

e quindi risulta $f(x) > 0$ per ogni x reale.
2. Poiché f è definita per ogni x reale esiste un'immagine di $x = 1$; sia quindi $f(1) = a$, con $a > 0$. Allora, per ogni x reale, vale

$$f(nx) = f(x + \cdots + x) = [f(x)]^n \ ,$$

da cui seguono, rispettivamente per $x = 1$ e per $x = 1/n$,

$$\begin{aligned} &f(n) = [f(1)]^n = a^n \\ &a = f(1) = f(n \cdot 1/n) = [f(1/n)]^n \quad \longrightarrow \quad f(1/n) = a^{1/n} \ . \end{aligned}$$

Applicando quindi entrambe le relazioni ora trovate segue che per ogni numero razionale $p = m/n$ vale

$$f(p) = f(m/n) = f(m \cdot 1/n) = [f(1/n)]^m = a^{m/n} = a^p \ .$$

La tesi è dunque dimostrata per ogni razionale p. Per la dimostrazione per un numero reale non razionale λ si consideri inizialmente il caso $a > 1$ e si considerino i sottoinsiemi di $\mathbb{R}$

$$A = \{x \mid x \in \mathbb{R}, x = a^p, p \in \mathbb{Q}\ ,\ p < \lambda\} \quad , \quad B = \{x \mid x \in \mathbb{R}, x = a^q, q \in \mathbb{Q}\ ,\ q > \lambda\} \ .$$

Poiché $a > 1$ la funzione a^p è strettamente crescente in $\mathbb{Q}$, quindi

$$p < q \qquad \longrightarrow \qquad a^p < a^q \ ,$$

pertanto vale $A < B$; A e B sono inoltre contigui; se non lo fossero, infatti, si avrebbe

$$\sup(A) < \inf(B) \ ;$$

sia quindi r il razionale tale che sia $\sup(A) < a^r < \inf(B)$ [teorema 1.10]; se $r < \lambda$ allora $a^r \in A$ contro la relazione $a^r > \sup(A)$, se $r > \lambda$ allora $a^r \in B$ contro la relazione $a^r < \inf(B)$; pertanto A e B sono contigui. Allora per l'assioma di completezza di $\mathbb{R}$, esiste un unico elemento separatore ξ dei due insiemi per cui vale $\xi = \sup(A) = \inf(B)$; ma questa è proprio la costruzione delle potenze ad esponente reale [teorema 1.14] e quindi si può porre

$$\xi = a^\lambda \ .$$

Se $0 < a < 1$ la funzione a^p è strettamente decrescente; quindi vale $A > B$, con A e B ancora contigui e si può quindi ripetere il ragionamento fatto sopra.
Se $a = 1$ la funzione a^p è costante e vale 1 per ogni p razionale, e si pone $a^\lambda = 1$.
3. Se $f(x) = \exp(x)$, per $x = 1$ si trova [teorema 5.13]:

$$\exp(1) = \lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

e quindi, utilizzando il risultato dimostrato al punto 2, $\exp(x) = e^x$. □

5.6. Sottosuccessioni

Definizione 5.13 (Sottosuccessione). Data la successione $x_n = x(n)$ e la successione strettamente crescente $n_i = n(i)$, allora la successione composta $x \circ n(i) = x_{n_i}$ si dice *sottosuccessione* della successione $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$.

Esempio 28. Sia $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione; si può definire una sottosuccessione costruita con i soli termini di indice pari prendendo $n_i = 2i$ e ottenendo la successione composta

$$x \circ n(i) = x_{n_i} = x_{2i} \qquad \text{con} \qquad x_{2i} = \{x_0, x_2, x_4, \ldots\} \ .$$

Similmente si può costruire una sottosuccessione costruita con i soli termini di posto dispari ponendo $n_i = 2i + 1$.

Teorema 5.32. *Se una successione ammette limite, finito o infinito, allora ogni sua sottosuccessione tende allo stesso limite.*

Dimostrazione (costruttiva)
Sia x_n una successione di limite $\ell \in \tilde{\mathbb{R}}$ allora per ogni intorno $I(\ell)$ esiste un naturale k per cui si ha $x_n \in I(\ell)$ per ogni $n > k$; sia n_i una successione strettamente crescente e sia $\bar{\imath}$ tale che sia $n(\bar{\imath}) \geq k$ allora per ogni $i > \bar{\imath}$ si ha $n_i > k$ e quindi $x_{n_i} \in I(\ell)$. Pertanto si è trovato che per ogni intorno $I(\ell)$ esiste un naturale $\bar{\imath}$ tale che, per ogni $i > \bar{\imath}$ vale $x \circ n(i) \in I(\ell)$, cioè la sottosuccessione x_{n_i} ha come limite ℓ. □

Il risultato precedente è molto utile per dimostrare la non esistenza del limite di una successione; basta infatti trovare due sottosuccessioni aventi limiti diversi. La questione è illustrata dal seguente esempio.

Esempio 29. La successione $x_n = \operatorname{sen}(n\pi/3)$ non ha limite; infatti la sottosuccessione ottenuta con n multiplo di 3, $\{x_{3k}\}_{k\in\mathbb{N}}$, è

$$x_{3k} = \operatorname{sen} k\pi = 0$$

si tratta quindi una successione di zeri che ha pertanto limite 0; viceversa si vede che la sottosuccessione $\{x_{6k+1}\}_{k\in\mathbb{N}}$ è

$$x_{6k+1} = \operatorname{sen} \frac{6k+1}{3}\pi = \operatorname{sen}\left(2k\pi + \frac{\pi}{3}\right) = \operatorname{sen}\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

pertanto ha limite $\sqrt{3}/2$. La successione x_n non può quindi avere limite perché ciò contrasterebbe con il teorema 5.32.

Si noti, come conseguenza dell'esempio precedente, che non è vero l'inverso del teorema 5.32, cioè è possibile che una sottosuccessione ammetta limite senza che lo abbia la successone intera.
Il seguente teorema richiede due lemmi.

Lemma 1. Se un sottoinsieme A di $\mathbb{R}$ è finito allora ammette massimo e minimo.

Dimostrazione (per induzione)
Se A ha un solo elemento il teorema è vero; supposto vero per insiemi con n elementi, si deve quindi dimostrare il teorema per insiemi con $n+1$ elementi. L'insieme A abbia quindi $n+1$ elementi e sia a uno di questi elementi, allora l'insieme $B = A \setminus \{a\}$ ha n elementi e quindi ammette il minimo m e il massimo M. Ora se $a > m$ allora $m = \min(A)$, se invece $a \leq m$ allora $a = \min(A)$; similmente se $a < M$ allora $M = \max(A)$, se invece $a \geq M$ allora $a = \max(A)$. □

Lemma 2. Un sottoinsieme A di $\mathbb{R}$ è finito se e solo ogni suo sottoinsieme non vuoto ammette massimo e minimo.

Dimostrazione (per assurdo)
Dimostrazione della sufficienza. Se A è finito lo sono anche i suoi sottoinsiemi e quindi ammettono massimo e minimo [lemma 1].
Dimostrazione della necessità. Se ogni sottoinsieme non vuoto di A ammette massimo e minimo, in particolare quindi A ammette massimo e minimo; sia $x_0 = \min(A)$; se per assurdo fosse A infinito allora $A \setminus \{x_0\}$ è un sottoinsieme non vuoto di A e quindi, per ipotesi, ammette il minimo x_1 tale che $x_1 \neq x_0$ e quindi $x_1 > x_0$; allora l'insieme $A \setminus \{x_0\} \setminus \{x_1\}$ è un sottoinsieme non vuoto di A e quindi, per ipotesi, ammette il minimo x_2 per cui vale $x_2 > x_1 > x_0$; in questo modo

si costruisce una successione $\{x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots\}$ per ogni naturale n; infatti tale costruzione si fermerebbe se fosse, per un certo n, $A \setminus \{x_0, \ldots x_n, \ldots\}$ vuoto, ma allora A sarebbe finito; è stata quindi costruita una successione strettamente crescente di elementi di A che quindi non può ammettere massimo, contro l'ipotesi. □

Teorema 5.33. *Ogni successione di numeri reali ammette una sottosuccessione monotòna.*

Dimostrazione (costruttiva)
Sia $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di numeri reali e sia $S = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ l'insieme di tutti gli elementi della successione; se S è finito deve esistere almeno un suo elemento che si ripete infinite volte, basta allora considerare la sottosuccessione formata da questi infiniti elementi tutti uguali della successione; tale successione è costante e quindi monotòna. Se S è infinito ha almeno un sottoinsieme A_0 non vuoto privo di minimo o di massimo [lemma 1]. Si supponga che non abbia minimo; sia n_0 il minimo naturale per cui $x_n \in A_0$, ma A_0 non ha minimo quindi l'insieme $A_1 = \{a \in A_0 \mid a < x_{n_0}\}$ è non vuoto. Sia allora n_1 il minimo naturale per cui $x_n \in A_1$; si osservi che valgono $n_1 > n_0$ e $x_{n_1} < x_{n_0}$; si osservi inoltre che A_1 non ha minimo perché se questo ci fosse sarebbe anche minimo di A_0, quindi l'insieme $A_2 = \{a \in A_1 \mid a < x_{n_1}\}$ è non vuoto, sia quindi n_2 il minimo naturale per cui $x_n \in A_2$; si osservi che valgono $n_2 > n_1 > n_0$ e $x_{n_2} < x_{n_1} < x_{n_0}$. Iterando il procedimento si costruisce quindi una sottosuccessione x_{n_i} di x_n monotòna strettamente decrescente. Nel caso A_0 non abbia massimo si costruisce nello stesso modo, rovesciando tutti i segni di disuguaglianza, una sottosuccessione monotòna strettamente crescente. □

Teorema 5.34. *Ogni successione limitata di numeri reali ammette una sottosuccessione convergente.*

Dimostrazione (costruttiva)
Ogni sottosuccessione di una successione limitata è limitata e ogni successione monotòna e limitata è convergente [corollario 5.12]; la tesi segue quindi dal teorema 5.33. □

5.7. Il teorema di Cantor e il metodo dicotomico

Uno strumento assai potente per la dimostrazione di teoremi riguardante la struttura topologica dei reali è il metodo dicotomico presentato in questa sezione.

Definizione 5.14 (Successione cantoriana)**.** Si dice *successione cantoriana* di segmenti [definizione 4.10], la successione $S_n = [a_n, b_n]$ tale che sia, per ogni naturale n

$$a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n \ .$$

Si noti che ogni segmento della successione è contenuto nel precedente e contiene il successivo.

Teorema 5.35 (di Cantor[3])**.** *Data una successione cantoriana S_n di segmenti, esiste almeno un numero reale λ contenuto in tutti i segmenti della successione.*

Dimostrazione (costruttiva)
Si osservi che, per ogni coppia di naturali m, n vale

$$a_m \leq b_n \ ;$$

quindi l'insieme $A = \{a_m\}$ è superiormente limitato e pertanto ammette estremo superiore $\sup(A) = \lambda'$ [teorema 1.5]; mentre l'insieme $B\{= b_n\}$ è inferiormente limitato e pertanto ammette estremo inferiore $\inf(B) = \lambda''$; vale la relazione

$$\lambda' \leq \lambda'' \ ;$$

quindi il teorema è verificato da tutti i numero reali appartenenti al segmento $[\lambda', \lambda'']$; se i due insiemi A e B sono contigui il numero previsto dal teorema è unico. □

[3] Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor (1845-1918), matematico tedesco,

Definizione 5.15 (Successioni dicotomiche)**.** Dato il segmento $S = [a, b]$, lo si divida in due segmenti uguali

$$\left[a, \frac{a+b}{2}\right] \qquad \text{e} \qquad \left[\frac{a+b}{2}, b\right] \;;$$

se ne scelga uno e lo si chiami S_1; si ripeta l'operazione su S_1 dividendolo in due segmenti uguali e se ne scelga uno e lo si chiami S_2; ripetendo indefinitamente questa procedura si costruisce la successione cantoriana S_n detta *dicotomica*.

Teorema 5.36. *Data una successione dicotomica di segmenti esiste un solo numero reale contenuto in tutti i segmenti della successione.*

Dimostrazione (costruttiva)
Per dimostrarlo basta mostrare che, indicando con a_n e b_n gli estremi del segmento S_n, cioè se $S_n = [a_n, b_n]$, gli insiemi $A = \{a_n\}$ e $B = \{b_n\}$ sono contigui [teorema 5.35]. Si osservi intanto che ogni segmento della successione dicotomica ha una lunghezza pari alla metà della lunghezza del segmento precedente; quindi la lunghezza di S_n è $(b-a)/2^n$; per mostrare la contiguità di A e B occorre quindi mostrare che $A \leq B$, il che è ovvio, e che fissato $\epsilon > 0$ esistono $a_n \in A$ e $b_n \in B$ tale che sia $b_n - a_n < \epsilon$; per questo basta trovare un segmento della successione di lunghezza minore di ϵ; basta cioè che sia

$$\frac{b-a}{2^n} < \epsilon \qquad \longrightarrow \qquad n > \log_2 \frac{b-a}{\epsilon} \;. \qquad \square$$

Corollario 5.37. Detto x_0 l'unico numero reale comune a tutti i segmenti di una successione cantoriana, ogni intervallo $I(x_0)$ contiene infiniti segmenti della successione.

Definizione 5.16. Dato un sottoinsieme A di $\mathbb{R}$ e una proprietà $\mathcal{P}$, si dice che A verifica $\mathcal{P}$ nel segmento S se gli elementi di $A \cap S$ verificano $\mathcal{P}$.

Definizione 5.17 (Proprietà dicotomica)**.** Si dice che $\mathcal{P}$ è una *proprietà dicotomica* se per ogni insieme A e per ogni segmento $S = [a, b]$ se A verifica $\mathcal{P}$ in S allora A verifica $\mathcal{P}$ in S' o (nel senso di vel, disgiunzione non esclusiva) in S'', dati da

$$S' = \left[a, \frac{a+b}{2}\right] \qquad , \qquad S'' = \left[\frac{a+b}{2}, b\right] \;.$$

Esempio 30. La proprietà di *avere infiniti elementi* è dicotomica; infatti se un insieme A ha infiniti elementi nel segmento S non è possibile che sia S' che S'' abbiano finiti elementi.

Teorema 5.38 (Principio di dicotomia)**.** *Se $\mathcal{P}$ è una proprietà dicotomica verificata da A in S, allora esiste in S un punto x_0 tale che ogni suo intorno contiene un segmento in cui A verifica $\mathcal{P}$.*

Dimostrazione (costruttiva)
Sia S_n una successione dicotomica di segmenti generata a partire dal segmento S ove A verifica la proprietà dicotomica $\mathcal{P}$ e quindi A verifica $\mathcal{P}$ in ogni segmento della successione; sia x_0 l'unico punto appartenente ad ogni S_n [teorema 5.36], allora ogni intorno $I(x_0)$ contiene infiniti segmenti della successione [corollario 5.37], in cui, come detto, A verifica $\mathcal{P}$. $\square$

A titolo di esempio del metodo dicotomico si consideri il seguente teorema.

Teorema 5.39 (di Bolzano[4])**.** *Ogni sottoinsieme infinito A di $\mathbb{R}$ contenuto in un segmento S ammette un punto di accumulazione.*

[4] Bernard Placidus Johann Nepomuk Bolzano (1781-1848), matematico boemo.

Dimostrazione (costruttiva)
La proprietà di avere infiniti elementi è dicotomica [esempio 30]; quindi esiste in S un punto x_0 in ogni intorno del quale è contenuto un segmento nel quale ci sono infiniti elementi di A; quindi x_0 è di accumulazione. □

Definizione 5.18 (Convergenza secondo Cauchy[5]). La successione $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ si dice *convergente secondo Cauchy*, o *di Cauchy*, se per ogni $\epsilon > 0$ esiste un naturale k tale si abbia

$$|x_m - x_n| < \epsilon \qquad \text{per ogni } m, n > k \ .$$

Teorema 5.40. *Se la successione $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge secondo Cauchy allora è limitata.*

Dimostrazione (costruttiva)
Se la successione è di Cauchy, scelto $\epsilon = 1 > 0$ esiste un naturale k tale che valga $|x_n - x_m| < 1$ per ogni $n, m > k$, allora per ogni $n > k$ vale

$$|x_n| - |x_{k+1}| \le |x_n - x_{k+1}| < 1 \qquad \longrightarrow \qquad |x_n| < 1 + |x_{k+1}| \ ;$$

quindi la successione è limitata per tutti gli $n > k$; ora, preso

$$\lambda = \max\{x_0, x_1, \ldots, x_k, 1 + |x_{k+1}|\} \ ,$$

vale $|x_n| \le \lambda$ per ogni n. □

Teorema 5.41 (Criterio di convergenza di Cauchy). *La successione $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge secondo Cauchy se e solo se ammette un limite finito.*

Dimostrazione (costruttiva)
Dimostrazione della sufficienza. Se $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge secondo Cauchy allora fissato $\epsilon = 1/2 > 0$ esiste una naturale n_1 tale che per ogni $m_1 > n_1$ valga

$$|x_{m_1} - x_{n_1+1}| < \frac{1}{2}$$

e quindi x_{m_1} appartiene ad un segmento S_1 di lunghezza 1; fissato $\epsilon = 1/4 > 0$ esiste un naturale n_2 tale che per ogni $m_2 > n_2$ valga

$$|x_{m_2} - x_{n_2+1}| < \frac{1}{4}$$

e quindi x_{m_2} appartiene ad un segmento S_2 di lunghezza $1/2$; si noti che non può essere $n_2 < n_1$ perché in tal caso si avrebbe $|x_{m_2} - x_{n_2+1}| > 1/2$; inoltre $S_2 \subseteq S_1$ infatti se $x_m \in S_2$ vale

$$x_{n_2+1} - \frac{1}{2} < x_{n_2+1} - \frac{1}{4} < x_m < x_{n_2+1} + \frac{1}{4} < x_{n_2+1} + \frac{1}{2} \qquad \text{per } m > n_2 > n_1$$

e quindi $x_m \in S_1$. In questo modo quindi si costruisce una successione cantoriana di segmenti $S_n = [a_n, b_n]$ di lunghezza $1/2^n$, per ciascuno dei quali vale $x_{m_n} \in S_n$ e quindi $a_n < x_{m_n} < b_n$. Si considerino dunque gli insiemi $A = \{a_n\}$ e $B = \{b_n\}$, essi sono contigui poiché $A \le B$ e fissato $\epsilon > 0$ vale $b_n - a_n < \epsilon$ non appena si scelga $n > \log_2 1/\epsilon$. Essendo contigui esiste $\ell = \sup(A) = \inf(B)$; quindi, ricordando che le due successioni a_n e b_n sono rispettivamente superiormente e inferiormente limitate e quindi ammettono estremo superiore e inferiore, vale

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \sup(A) = \ell = \inf(B) = \lim_{n\to+\infty} b_n$$

e quindi, per il teorema dei due carabinieri [teorema 5.7], anche la successione x_{m_n} che è sottosuccessione della x_n ha limite ℓ. Rimane da mostrare che anche la x_n converga a ℓ. Scelto

[5] Augustin-Louis Cauchy (1789-1857), matematico francese.

arbitrariamente $\epsilon > 0$, per la convergenza della sottosuccessione $\{x_{m_n}\}_{m,n\in\mathbb{N}}$, deve esistere un naturale k' per cui si abbia, per ogni $m_n > k'$

$$|x_{m_n} - \ell| < \frac{\epsilon}{2} \ ;$$

ma, essendo $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ di Cauchy, fissato lo stesso $\epsilon > 0$ deve esistere un naturale k'' per cui si abbia, per ogni $n, m > k''$

$$|x_n - x_m| < \frac{\epsilon}{2} \ ;$$

posto $k = \max\{k', k''\}$, per ogni $n > k$ le precedenti relazioni valgono entrambe e sia ha quindi

$$|x_n - \ell| = |x_n - x_{m_n} + x_{m_n} - \ell| \leq |x_n - x_{m_n}| + |x_{m_n} - \ell| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

e quindi anche la $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a ℓ.
Dimostrazione della necessità. Se $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge al limite ℓ, per ogni $\epsilon > 0$ esiste un naturale k per cui, per ogni $n > k$ si ha

$$|x_n - \ell| < \frac{\epsilon}{2} \ .$$

Quindi per ogni $m, n > k$ si ha

$$|x_m - x_n| = |x_m - \ell + \ell - x_n| \leq |x_m - \ell| + |\ell - x_n| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

e quindi $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è di Cauchy. □

5.8. Insiemi compatti

Si comincia con qualche teorema.

Teorema 5.42. *Dato il sottoinsieme A di $\mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$ è punto di accumulazione di A se e solo se esiste una successione di elementi di A diversi da a che converge ad a.*

Dimostrazione (costruttiva)
La sufficienza è ovvia. Si deve dunque mostrare che se a è di accumulazione esiste una successione che vi converge. La successione viene costruita induttivamente scegliendo $x_0 \in I(a,1) \cap (A \smallsetminus \{a\})$, certamente esistente essendo A di accumulazione; si scelga quindi

$$x_{n+1} \in I(a, |x_n - a|/2) \cap (A \smallsetminus \{a\}) \ ;$$

per esempio, per $x_1 \in I(a, |x_0 - a|/2) \cap (A \smallsetminus \{a\})$ si ha $0 < |x_1 - a| \leq |x_0 - a|/2 < 1/2$; per $x_2 \in I(a, |x_1 - a|/2 \cap (A \smallsetminus \{a\})$ si ha $0 < |x_2 - a| \leq |x_1 - a|/2 \leq |x_0 - a|/2^2 < 1/2^2$ e cosí via fino a $|x_n - a| < 1/2^n$. La successione $x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots$ è certamente decrescente e la relazione

$$|x_n - a| < \frac{1}{2^n} \ ,$$

sopra determinata, mostra la sua convergenza ad a. □

Teorema 5.43. *Un numero reale ℓ appartiene alla chiusura di un sottoinsieme A di $\mathbb{R}$ se e solo se esiste una successione di elementi di A che converge ad ℓ.*

Dimostrazione (costruttiva)
Dimostrazione della necessità. Sia $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di elementi di A convergente ad ℓ; fissato un qualunque intorno $I(\ell)$ esiste [definizione 4.2] un intervallo $]a, b[$ contenente ℓ contenuto in $I(\ell)$; allora, per la convergenza della successione, scelto $\epsilon = \min\{\ell - a, b - \ell\} > 0$ esiste un naturale k tale che, per ogni $n > k$ si abbia

$$|x_n - \ell| < \epsilon \ ;$$

quindi tutti gli infiniti x_n con $n > k$ appartengono al prefissato $I(\ell)$; quindi ℓ è di accumulazione per A e quindi $\ell \in \bar{A}$.
Dimostrazione della sufficienza. Sia $\ell \in \bar{A}$; allora o ℓ è di accumulazione o è isolato. Se è di accumulazione esiste una successione che vi converge [teorema 5.42] e il teorema è vero; se è isolato basta considerare la successione costante $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $x_n = \ell$. □

Corollario 5.44. Un sottoinsieme A di $\mathbb{R}$ è chiuso se e solo se ogni sua successione convergente ha limite in A.

Definizione 5.19 (Insiemi compatti per successioni)**.** Un sottoinsieme A di $\mathbb{R}$ si dice *compatto per successioni*, o *sequenzialmente compatto*, se ogni successione di elementi di A ha una sottosuccessione che converge ad un elemento di A.

Teorema 5.45 (di Bolzano-Weierstrass [6])**.** *Un sottoinsieme dei reali è sequenzialmente compatto se e solo se è chiuso e limitato.*

Dimostrazione (costruttiva e per contrapposizione)
Dimostrazione della sufficienza. Sia A un sottoinsieme di $\mathbb{R}$ chiuso e limitato e sia $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di elementi di A; essendo A limitato tale successione è a sua volta limitata e quindi ha una sottosuccessione convergente [teorema 5.34] il cui limite è quindi punto di accumulazione di A; ma A è chiuso quindi il limite della sottosuccessione appartiene ad A.
Dimostrazione della necessità. Se A non è chiuso allora esiste almeno un punto di accumulazione di A che non appartiene ad A [teorema 4.4]; esiste una successione di elementi di A convergente verso tale punto di accumulazione [teorema 5.42] e verso di esso convergono anche tutte le sottosuccessioni di tale successione [teorema 5.32] e quindi A non è sequenzialmente compatto.
Se A non è limitato è superiormente o inferiormente illimitato; nel primo caso è possibile costruire una successione di elementi di A divergente a $+\infty$, nel secondo caso è possibile costruire una successione di elementi di A divergente a $-\infty$; ogni sottosuccessione di queste successioni divergente è divergente; quindi A non è sequenzialmente compatto. □

Il teorema precedente consente una dimostrazione della sufficienza del criterio di convergenza di Cauchy assai piú spedita di quella vista sopra. Tale dimostrazione si riporta qui di seguito.
Dimostrazione (costruttiva)
Se $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione di Cauchy è limitata [teorema 5.40] quindi esiste un segmento S tale che $x_n \in S$ per ogni n; tale S è chiuso e limitato e quindi sequenzialmente compatto [teorema 5.45]; poiché x_n è contenuta in un compatto esiste una sottosuccessione x_{n_i} convergente ad un certo limite ℓ [definizione 5.19]; allora per ogni $\epsilon > 0$ esiste un naturale k' tale che , per ogni $n_i > k'$ si abbia

$$|x_{n_i} - \ell| < \frac{\epsilon}{2}\ .$$

Ma $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è di Cauchy quindi, per lo stesso ϵ, deve esistere un naturale k'' per cui, per $m, n > k''$ per cui si abbia

$$|x_m - x_n| < \frac{\epsilon}{2}\ .$$

Posto $k = \max\{k', k''\}$, quindi per $n > k$ le precedenti disuguaglianze valgono entrambe e quindi si ha

$$|x_n - \ell| = |x_n - x_{n_i} + x_{n_i} - \ell| \le |x_n - x_{n_i}| + |x_{n_i} - \ell| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon\ ;$$

e quindi la successione $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è convergente. □

Oltre alla compattezza per successioni è molto importante il concetto di *compattezza* di un insieme.

[6] Karl Theodor Wilhelm Weierstrass (1815-1897), matematico tedesco.

Definizione 5.20 (Ricoprimento di un insieme)**.** Dato un sottoinsieme A di $\mathbb{R}$, si dice *ricoprimento* di A ogni famiglia $\mathcal{F} = \{E_\alpha\}$ la cui unione contenga A, cioè tale che sia

$$A \subseteq \bigcup_\alpha E_\alpha \ .$$

Il ricoprimento si dice *aperto* se tutti gli insiemi E_α sono aperti.
Il ricoprimento si dice *finito* se gli insiemi E_α sono in numero finito.
Se la famiglia $\mathcal{F}$ costituisce un ricoprimento di A, si dice *sottoricoprimento* ogni sottofamiglia $\mathcal{F}' \subseteq \mathcal{F}$ che sia ancora un ricoprimento di A.

Definizione 5.21 (Insieme compatto)**.** Un sottoinsieme A di $\mathbb{R}$ si dice *compatto* se ogni suo ricoprimento aperto ammette un sottoricoprimento finito.

Teorema 5.46. *Se A è un sottoinsieme compatto di $\mathbb{R}$ e B è un sottoinsieme chiuso di A allora B è compatto.*

Dimostrazione (costruttiva)
Sia $\mathcal{F} = \{E_\alpha\}$ un ricoprimento aperto di B, allora l'insieme $B^C = \mathbb{R} \setminus B$ complementare di B in $\mathbb{R}$ è aperto e l'insieme

$$\mathcal{G} = \mathcal{F} \cup B^C$$

è un ricoprimento aperto di A, ma A è compatto quindi $\mathcal{G}$ ha un sottoricoprimento finito $\mathcal{G}'$ il quale ricopre anche B. Ma B^C non contiene elementi di B, quindi B è ricoperto anche da

$$\mathcal{F}' = \mathcal{G}' \cup B^C$$

che è un sottoricoprimento finito del ricoprimento $\mathcal{F}$ di B; quindi B è compatto. □

Teorema 5.47 (di Heine[7]-Pincherle[8]-Borel[9])**.** *Ogni sottoinsieme chiuso e limitato di $\mathbb{R}$ è compatto.*

Dimostrazione (per assurdo)
Sia A un sottoinsieme chiuso e limitato di $\mathbb{R}$; poiché A è limitato esiste un segmento S che lo contiene; poiché A è chiuso basta mostrare che S è compatto e usare il teorema 5.46. Si supponga quindi che S non sia compatto, allora esiste una famiglia $\mathcal{F} = \{E_\alpha\}$ di aperti che ricopre S_0 ma non ammette una sottofamiglia ricoprente. La proprietà di non ammettere una sottofamiglia finita di $\mathcal{F}$ ricoprente è dicotomica; infatti dividendo S in due segmenti uguali se questi ammettessero entrambi un sottoricoprimento finito l'unione dei due sottoricoprimenti sarebbe un sottoricoprimento finito di S contro l'ipotesi. Allora, per il principio di dicotomia [teorema 5.38] esiste $x_0 \in S$ tale che ogni suo intorno contiene un segmento che non ammette un sottoricoprimento finito di $\mathcal{F}$; ma $\mathcal{F}$ ricopre S quindi esiste un E_α aperto tale che $x_0 \in E_\alpha$; poiché E_α è aperto x_0 è interno a E_α e quindi esiste un intorno $I(x_0)$ contenuto in E_α [definizione 4.4]; in tale intorno, come visto sopra, è contenuto un segmento S' con la proprietà dicotomica di non ammettere un sottoricoprimento finito di $\mathcal{F}$, vale quindi

$$S' \subseteq I(x_0) \subseteq E_\alpha \ ;$$

quindi il solo aperto $E_\alpha \in \mathcal{F}$ ricopre S' contro il fatto che S' non ammetta un sottoricoprimento finito di $\mathcal{F}$. □

Corollario 5.48. Un insieme compatto per successioni è compatto.

Si sottolinea il fatto che è cruciale che l'insieme A sia sottoinsieme di $\mathbb{R}$, cioè di un corpo completo. Il teorema di Heine-Pincherle-Borel non è vero in $\mathbb{Q}$.

[7] Heinrich Eduard Heine (1821-1881), matematico tedesco.
[8] Salvatore Pincherle (1853-1936), matematico italiano.
[9] Félix Edouard Justin Émile Borel (1871-956), matematico francese.

6

LIMITI DELLE FUNZIONI REALI

6.1. Generalità

Definizione 6.1 (Limite di una funzione)**.** Data una funzione $f : D \to \mathbb{R}$, con $D \subseteq \mathbb{R}$, e $c \in \tilde{\mathbb{R}}$ punto di accumulazione di D, allora si dice che $\ell \in \tilde{\mathbb{R}}$ è il limite della f per x che tende a c, e si scrive

$$\lim_{x \to c} f(x) = \ell$$

se per ogni intorno $I(\ell)$ esiste un intorno $I(c)$ tale che

$$x \in I(c) \cap D \quad \longrightarrow \quad f(x) \in I(\ell) \ .$$

Si noti che non è richiesto che c appartenga ad D.
A seconda che ℓ e c siano finiti o infiniti, gli intorni presenti nella precedente definizioni possono avere una descrizione piú operativa. Vi sono quattro casi possibili che vengono di seguito esaminati.

Definizione 6.2 (Caso con c ed ℓ finiti)**.** Data una funzione $f : D \to \mathbb{R}$, con $D \subseteq \mathbb{R}$, e $c \in \mathbb{R}$ punto di accumulazione di D, allora si dice che $\ell \in \mathbb{R}$ è il limite della f per x che tende a c, e si scrive

$$\lim_{x \to c} f(x) = \ell$$

se per ogni $\epsilon > 0$ è possibile determinare un $\delta > 0$ tale che

$$0 < |x - c| < \delta \quad \longrightarrow \quad |f(x) - \ell| < \epsilon \ .$$

Si noti che la condizione $|x - c| > 0$ richiede che, in generale, sia $x \neq c$; questo perché c può non appartenere al dominio D della funzione; anzi si vedrà che i casi in cui è importante calcolare il limite di una funzione sono proprio quelli in cui $c \notin D$ visto se c appartiene al dominio si può calcolare direttamente $f(c)$ senza scomodare il calcolo del limite.

Esempio 31. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = 2x - 3$ e si consideri il limite:

$$\lim_{x \to 2} (2x - 3) = 1 \ ;$$

per ogni $\epsilon > 0$ vale infatti

$$|2x - 3 - 1| < 2 \qquad \longleftrightarrow \qquad |2x - 4| < \epsilon \qquad \longleftrightarrow \qquad |x - 2| < \frac{\epsilon}{2} \ ;$$

quindi non appena x dista da $c = 2$ meno di $\delta = \epsilon/2$ la funzione $f(x) = 2x - 3$ dista da $\ell = 1$ meno di ϵ, come previsto dalla definizione.

Esempio 32. Si consideri la funzione $f : D \to \mathbb{R}$ con $D = \{x \mid x \in \mathbb{R}, x \neq 1\}$ e si consideri il limite:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1} = -1 \ ;$$

si noti che 1, il reale a cui tende x, non appartiene a D; ciò tuttavia non è un problema visto che 1 è punto di accumulazione per D; per ogni $\epsilon > 0$ vale

$$\left| \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1} + 1 \right| = \left| \frac{x^2 - 2x + 1}{x - 1} \right| = \frac{(x - 1)^2}{|x - 1|} < \epsilon$$

da cui
$$(x-1)^2 < \epsilon|x-1| \ .$$
Questa relazione, se $x \neq 1$, si può riscrivere
$$0 < |x-1| < \epsilon$$
che è proprio la condizione cercata con $\delta = \epsilon$; limite quindi è verificato. Come si vede, la condizione è verificata solo per $x \neq 1$; questo fatto consente di considerare $x - 1 \neq 0$ e semplificare i calcoli fin dal primo passaggio e scrivere:
$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-3x+2}{x-1} = \lim_{x\to 1}(x-2) = -1$$
di verifica piú immediata.

Esempio 33. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = x^2 - 1$ e si consideri il limite:
$$\lim_{x\to 2}(x^2-1) = 3 \ ;$$
per ogni $\epsilon > 0$ vale
$$|x^2-1-3| < \epsilon \quad \longleftrightarrow \quad |x^2-4| < \epsilon \quad \longleftrightarrow \quad 4-\epsilon < x^2 < 4+\epsilon \quad \longleftrightarrow \quad \sqrt{4-\epsilon} < x < \sqrt{4+\epsilon}$$
l'ultimo passaggio è consentito solo per $\epsilon < 4$; d'altra parte, se $\epsilon > 4$ la disequazione $4 - \epsilon < x^2$ è ovviamente soddisfatta. Questo esempio illustra come, in generale, si possa considerare ϵ sufficientemente piccolo da rendere leciti tutti i passaggi matematici che un ϵ troppo grande renderebbe errati. Questo fatto si può comprendere ricordando la definizione 6.1; se l'intorno di ℓ è sufficientemente grande trovare un intorno di c che serva allo scopo è spesso banale; in particolare, se l'intorno di ℓ contiene l'immagine di $f(x)$ la definizione di limite 6.1 è vera per ogni intorno di c. Tornando alla disequazione
$$\sqrt{4-\epsilon} < x < \sqrt{4+\epsilon} \ ,$$
si vede che x appartiene ad un intorno non circolare di 2; basta scegliere δ in modo che l'intorno circolare $I(2, \delta)$ sia contenuto nell'intervallo $]\sqrt{4-\epsilon}, \sqrt{4+\epsilon}[$; è facile vedere che basta che sia $\delta < \epsilon/4$. Nella pratica, trovare un δ che faccia il servizio richiesto non è necessario; facendo sempre riferimento alla definizione 6.1, si vede che l'intorno di c non deve essere circolare; per la verifica del limite è quindi sufficiente accertarsi che l'intervallo $]\sqrt{4-\epsilon}, \sqrt{4+\epsilon}[$ contenga 2, come di fatto fa.

Definizione 6.3 (Caso con c finito e ℓ infinito)**.** Data una funzione $f : D \to \mathbb{R}$, con $D \subseteq \mathbb{R}$, e $c \in \mathbb{R}$ punto di accumulazione di D, allora si dice che il limite della f per x che tende a c è $+\infty$, e si scrive
$$\lim_{x\to c} f(x) = +\infty$$
se per ogni $M > 0$ è possibile determinare un $\delta > 0$ tale che
$$0 < |x-c| < \delta \quad \longrightarrow \quad f(x) > M \ .$$
Simmetricamente, si dice che il limite della f per x che tende a c è $-\infty$, e si scrive
$$\lim_{x\to c} f(x) = -\infty$$
se per ogni $M > 0$ è possibile determinare un $\delta > 0$ tale che
$$0 < |x-c| < \delta \quad \longrightarrow \quad f(x) < -M \ .$$

Definizione 6.4 (Caso con c infinito e ℓ finito)**.** Data una funzione $f : D \to \mathbb{R}$, con $D \subseteq \mathbb{R}$, allora si dice che $\ell \in \mathbb{R}$ è il limite della f per x che tende a $+\infty$, e si scrive

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell$$

se per ogni $\epsilon > 0$ è possibile determinare un $N > 0$ tale che

$$x > N \quad \longrightarrow \quad |f(x) - \ell| < \epsilon \ .$$

Simmetricamente, si dice che $\ell \in \mathbb{R}$ è il limite della f per x che tende a $-\infty$, e si scrive

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \ell$$

se per ogni $\epsilon > 0$ è possibile determinare un $N > 0$ tale che

$$x < -N \quad \longrightarrow \quad |f(x) - \ell| < \epsilon \ .$$

Definizione 6.5 (Caso con c ed ℓ entrambi infiniti)**.** Data una funzione $f : D \to \mathbb{R}$, con $D \subseteq \mathbb{R}$, allora si dice che il limite della f per x che tende a $+\infty$ è $+\infty$, e si scrive

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

se per ogni $M > 0$ è possibile determinare un $N > 0$ tale che

$$x > N \quad \longrightarrow \quad f(x) > M \ .$$

Gli altri tre casi in cui c o ℓ o entrambi sono $-\infty$ si lasciano alla cura del lettore studioso.
A volte, come visto per nell'esempio 33, è opportuno considerare anche definizioni 'ibride' fra quella 'topologica', che fa uso degli intorni, e quella 'metrica', che fa uso esplicito delle distanze. Si dirà quindi che vale $\lim_{x\to c} f(x) = \ell$ se per ogni $\epsilon > 0$ esiste un $I(c)$ tale che se $x \in I(c) \cap D$ allora $|f(x) - \ell| < \epsilon$. Similmente lo stesso limite vale se per ogni $I(\ell)$ esiste un reale $\delta > 0$ tale che se $0 < |x - c| < \delta$ allora $f(x) \in I(\ell)$.

Definizione 6.6 (Funzioni convergenti, infinitesime, divergenti)**.** Data una funzione $f : D \to \mathbb{R}$, con $D \subseteq \mathbb{R}$, e $c \in \mathbb{R}$ punto di accumulazione di D, se vale

$$\lim_{x\to c} f(x) = \ell$$

con ℓ finito, si dice che la funzione *converge* in c; se converge a zero si dice che la funzione è *infinitesima*. Se ℓ è $+\infty$ o $-\infty$ si dice che la funzione *diverge* in c.

Teorema 6.1. *Se la funzione $f : D \to \mathbb{R}$, con $D \subseteq \mathbb{R}$, e $c \in \mathbb{R}$ punto di accumulazione di D è divergente in c se e solo se*

$$\lim_{x\to c} |f(x)| = +\infty \ .$$

Dimostrazione (costruttiva)
Dimostrazione della sufficienza. Se $f(x)$ è divergente in c il limite vale $+\infty$ o $-\infty$; allora per ogni $M > 0$ è possibile determinare un intorno di $I(c)$ tale che, rispettivamente nei due casi, valga:

$$x \in I(c) \cap D \qquad \longrightarrow \qquad f(x) > M \quad \text{o} \quad f(x) < -M$$

in entrambi i casi quindi vale

$$x \in I(c) \qquad \longrightarrow \qquad |f(x)| > M \ ,$$

da cui la tesi.
Dimostrazione della necessità. Basta ripercorrere la dimostrazione della sufficienza all'indietro, infatti se $|f(x)| > M$ allora $f(x) > M$ o $f(x) < -M$ e quindi $f(x)$ diverge a $+\infty$ o a $-\infty$. $\square$

Teorema 6.2. *La funzione $f : D \to \mathbb{R}$, con $D \subseteq \mathbb{R}$ e $c \in \tilde{\mathbb{R}}$ punto di accumulazione di D converge a ℓ in c se e solo se $f(x) - \ell$ è infinitesima in c.*

Dimostrazione (costruttiva)
Segue immediatamente dalla definizione di limite; infatti, se f ha limite ℓ in c, per ogni $\epsilon > 0$ esiste un intorno di $I(c)$ per cui valga

$$x \in I(c) \cap D \qquad \longrightarrow \qquad |f(x) - \ell| < \epsilon \ ;$$

ma questa espressione dice che $f(x) - \ell$ è infinitesima in c, e viceversa. □

In molti casi è utile considerare il limite a cui tende la funzione quando la variabile x si trova in un intorno destro o un intorno sinistro di $c \in \mathbb{R}$; si dà quindi la seguente definizione.

Definizione 6.7 (Limite destro e sinistro)**.** Data una funzione $f : D \to \mathbb{R}$, con $D \subseteq \mathbb{R}$, e $c \in \mathbb{R}$ punto di accumulazione di D, allora si dice che il *limite destro* della f per x che tende a c è $\ell \in \tilde{\mathbb{R}}$, e si scrive

$$\lim_{x \to c^+} f(x) = \ell$$

se per ogni intorno $I(\ell)$ è possibile determinare un $\delta > 0$ tale che

$$0 < x - c < \delta \quad \longrightarrow \quad f(x) \in I(\ell) \ .$$

Simmetricamente, si dice che il *limite sinistro* della f per x che tende a c è $\ell \in \tilde{\mathbb{R}}$, e si scrive

$$\lim_{x \to c^-} f(x) = \ell$$

se per ogni intorno $I(\ell)$ è possibile determinare un $\delta > 0$ tale che

$$-\delta < x - c < 0 \quad \longrightarrow \quad f(x) \in I(\ell) \ .$$

Teorema 6.3. *Data una funzione $f : D \to \mathbb{R}$, con $D \subseteq \mathbb{R}$, e $c \in \mathbb{R}$ punto di accumulazione di D, esiste il limite*

$$\lim_{x \to c} f(x)$$

se e solo se il limite destro ed il limite destro della f in c e esistono e sono uguali.

Dimostrazione (costruttiva)
Dimostrazione della sufficienza. Se esistono il limite destro e sinistro e sono entrambi uguali a ℓ, per ogni $I(\ell)$ è possibile determinare un reale $\delta' > 0$ e un reale $\delta'' > 0$ tale che, se $0 < x - c < \delta'$ e se $-\delta'' < x - c < 0$ allora $f(x) \in I(\ell)$, quindi se x sta nell'intorno $]c - \delta'', c + \delta'[$ di c, escluso c, la funzione sta in $I(\ell)$ e quindi il limite della funzione per x che tende a c è ℓ,
Dimostrazione della necessità. Se esiste il limite ℓ della funzione f in c allora per ogni $I(\ell)$ esiste un reale $\delta > 0$ tale se $0 < |x - c| < \delta$ allora $f(x) \in I(\ell)$; quindi in particolare valgono

$$\begin{aligned} 0 < x - c < \delta \quad &\longrightarrow \quad f(x) \in I(\ell) \\ -\delta < x - c < 0 \quad &\longrightarrow \quad f(x) \in I(\ell) \end{aligned}$$

e quindi esistono sia il limite destro che il sinistro ed entrambi valgono ℓ. □

Teorema 6.4 (Limiti delle funzioni monotòne)**.** *Data una funzione monotòna $f : D \to \mathbb{R}$, con $D \subseteq \mathbb{R}$, e $c \in \tilde{\mathbb{R}}$ punto di accumulazione di D, allora i limiti destro e sinistro, se possono essere considerati, esistono in $\tilde{\mathbb{R}}$. In particolare, se f è crescente valgono*

$$\begin{aligned} &\lim_{x \to c^-} f(x) = \sup(\{y \mid y = f(x), x \in D, x < c\}) \quad \text{se } c \text{ è di accumulazione per } \{x \mid x \in D, x < c\} \\ &\lim_{x \to c^+} f(x) = \inf(\{y \mid y = f(x), x \in D, x > c\}) \quad \text{se } c \text{ è di accumulazione per } \{x \mid x \in D, x > c\} \end{aligned}$$

se f è decrescente valgono

$$\lim_{x\to c^-} f(x) = \inf(\{y \mid y = f(x), x \in D, x < c\}) \quad \text{se } c \text{ è di accumulazione per } \{x \mid x \in D, x < c\}$$
$$\lim_{x\to c^+} f(x) = \sup(\{y \mid y = f(x), x \in D, x > c\}) \quad \text{se } c \text{ è di accumulazione per } \{x \mid x \in D, x > c\}$$

Dimostrazione (costruttiva)
Sia $\ell = \sup(\{f(x) \mid x \in D, x < c\})$; se ℓ è finito, per ogni $\epsilon > 0$, esiste [definizione 1.4] $x_0 \in \{x \mid x \in D, x < c\}$ tale che $f(x_0) > \ell - \epsilon$; ma f è per ipotesi crescente quindi per ogni x tale che valga $x_0 < x < c$ si ha $f(x_0) < f(x)$ e quindi, per tali x vale la sequenza di disuguaglianze

$$\ell - \epsilon < f(x_0) < f(x) < \ell < \ell + \epsilon \ .$$

Si è cosí trovato che, per ogni $\epsilon > 0$, esiste un intorno sinistro di c, tale che se x sta in tale intorno vale $|f(x) - \ell| < \epsilon$, e quindi il limite sinistro di f in c è ℓ.
Gli altri casi si dimostrano in modo analogo e vengono lasciati alla cura del lettore studioso. □

Teorema 6.5 (Teorema ponte)**.** *Data la funzione $f : D \to \mathbb{R}$, con $d \subseteq \mathbb{R}$, sia $c \in \tilde{\mathbb{R}}$ punto di accumulazione di D e sia $\ell \in \tilde{\mathbb{R}}$; allora vale il limite*

$$\lim_{x\to c} f(x) = \ell$$

se e solo se per ogni successione $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ di elementi di D che tende a c vale

$$\lim_{x\to c} f(x_n) = \ell \ .$$

Dimostrazione (costruttiva e per assurdo)
Dimostrazione della sufficienza. Se f tende a ℓ per x che tende a c allora per ogni intorno $I(\ell)$ esiste un intorno $I(c)$ tale che valga

$$x \in I(c) \cap D \qquad \longrightarrow \qquad f(x) \in I(\ell) \ .$$

D'altra parte, se x_n tende a c, per quello stesso $I(c)$ esiste un naturale k tale che sia abbia

$$x_n \in I(c) \cap D \qquad \text{per ogni } n > k$$

e quindi, per tali n, vale

$$x_n \in I(c) \cap D \qquad \longrightarrow \qquad f(x_n) \in I(\ell) \ .$$

Dimostrazione della necessità. Se $f(x_n)$ tende a ℓ per n che tende a $+\infty$ e, per assurdo, $f(x)$ non tendesse a ℓ per x che tende a c, allora esisterebbe un intorno $I(\ell)$ tale che per ogni intorno $I(c)$ si avrebbe

$$x \in I(C) \cap D \qquad \longrightarrow \qquad f(x) \notin I(\ell)$$

ma allora se x_n è una successione che tende a c, per ciascuno di quegli stessi $I(c)$ esiste un intero k tale che valga

$$x_n \in I(c) \cap D \qquad \text{per ogni } n > k \ ;$$

ma allora, per tali n, si avrebbe che

$$x_n \in I(C) \cap D \qquad \longrightarrow \qquad f(x_n) \notin I(\ell)$$

contro l'ipotesi che $f(x_n)$ tenda a ℓ. □

Il nome di questo teorema è dovuto al fatto che permette di trasferire i risultati trovati per i limiti delle successioni ai limiti per le funzioni e viceversa. In questi appunti si ritiene piú istruttivo ridimostrare tutte le proprietà, già trovate per le successioni, anche per le funzioni.

6.2. Teoremi sui limiti

I teoremi sui limiti di funzioni sono analoghi a quelli già visti per i limiti delle successioni. Per comodità del lettore qui se ne ripetono sia gli enunciati che le dimostrazioni.

Teorema 6.6 (Unicità del limite). *Data una funzione $f : D \to \mathbb{R}$, con $D \subseteq \mathbb{R}$, e $c \in \tilde{\mathbb{R}}$ punto di accumulazione di D, allora il limite*

$$\lim_{x\to c} f(x) \ ,$$

se esiste, è unico.

Dimostrazione (per assurdo)
Si supponga che la funzione in questione abbia, per x che tende a c i due limiti $\ell_1 \neq \ell_2$; allora scelti due intorni disgiunti [teorema 4.6] $I(\ell_1)$ ed $I(\ell_2)$ allora esistono due intorni $I_1(c)$ ed $I_2(c)$ tali che si abbia

$$\begin{aligned} x \in I_1(c) \cap D \quad &\longrightarrow \quad x \in I(\ell_1) \\ x \in I_2(c) \cap D \quad &\longrightarrow \quad x \in I(\ell_2) \ . \end{aligned}$$

Si consideri allora l'intorno di c dato dall'intersezione $I(c) = I_1(c) \cap I_2(c)$; per gli $x \in I(c) \cap D$ le precedenti implicazioni valgono entrambe e quindi, per tali x si ha simultaneamente $x \in I(\ell_1)$ e $x \in I(\ell_2)$, contro il fatto che i due intorno siano stati scelti disgiunti. □

Teorema 6.7 (Permanenza del segno). *Data una funzione $f : D \to \mathbb{R}$, con $D \subseteq \mathbb{R}$, e $c \in \tilde{\mathbb{R}}$ punto di accumulazione di D, per la quale valga il limite*

$$\lim_{x\to c} f(x) = \ell$$

con $\ell \in \mathbb{R}$ e $\ell \neq 0$, allora esiste un intorno $I(c)$ nel quale la funzione ha lo stesso segno di ℓ; cioè

$$x \in I(c) \cap D \qquad \longrightarrow \qquad \ell \cdot f(x) > 0 \ .$$

Dimostrazione (costruttiva)
Se $\ell \neq 0$ allora, per la definizione di limite, scelto $\epsilon = |\ell|/2 > 0$ esiste $I(c)$ tale che si abbia

$$x \in I(c) \cap D \qquad \longrightarrow \qquad |f(x) - \ell| < \frac{|\ell|}{2} \ ;$$

quindi se $\ell > 0$ si ha, per $x \in I(c) \cap D$,

$$0 < \ell - \frac{\ell}{2} < f(x) < \ell + \frac{\ell}{2}$$

e quindi anche $f(x)$ è positiva. Se viceversa $\ell < 0$ si ha, per $x \in I(c) \cap D$,

$$\ell + \frac{\ell}{2} < f(x) < \ell - \frac{\ell}{2} < 0$$

e quindi anche $f(x)$ è negativa. □

Teorema 6.8. *Date due funzioni $f, g : D \to \mathbb{R}$, con $D \subseteq \mathbb{R}$ e $c \in \tilde{\mathbb{R}}$ punto di accumulazione di D, che abbiano per $x \to c$ rispettivamente i limiti ℓ_1 ed ℓ_2; se vale $\ell_1 \leq \ell_2$ esiste un intorno $I(c)$ tale, per ogni $x \in I(c)$ si ha $f(x) \leq g(x)$.*

Dimostrazione (costruttiva)
Se esistono i due limiti, scelti due intorni disgiunti [teorema 4.6] $I(\ell_1)$ ed $I(\ell_2)$, per i quali è chiaro che vale $I(\ell_1) \leq I(\ell_2)$, allora esistono due intorni $I_1(c)$ ed $I_2(c)$ tali che valgano

$$\begin{aligned} x \in I_1(c) \cap D \quad &\longrightarrow \quad f(x) \in I(\ell_1) \\ x \in I_2(c) \cap D \quad &\longrightarrow \quad g(x) \in I(\ell_2) \ ; \end{aligned}$$

definito quindi $I(c) = I_1(c) \cap I_2(c)$, che è anch'esso un intorno di c, per tutti gli x in $I(c)$ le precedenti implicazioni valgono entrambe e quindi si ha

$$x \in I(c) \cap D \qquad \longrightarrow \qquad f(x) \in I(\ell_1), g(x) \in I(\ell_2) \ .$$

Ma, come osservato, vale $I(\ell_1) \leq I(\ell_2)$ e quindi $f(x) \leq g(x)$. □

Teorema 6.9 (Del confronto). *Date due funzioni $f, g : D \to \mathbb{R}$, con $D \subseteq \mathbb{R}$ e $c \in \tilde{\mathbb{R}}$ punto di accumulazione di D, tali che esista un intorno $I(c)$ tale che valga $f(x) \leq g(x)$ per ogni $x \in I(c)$; allora se esistono i limiti ℓ_1 ed ℓ_2 delle due funzioni, per x che tende a c, vale*

$$\ell_1 = \lim_{x \to c} f(x) \leq \lim_{x \to c} g(x) = \ell_2 \ .$$

Dimostrazione (per assurdo)
Se fosse $\ell_1 > \ell_2$ esisterebbe un intorno $I(c)$ tale che, per ogni $x \in I(c)$ si avrebbe $f(x) > g(x)$ [teorema 6.8] contro l'ipotesi. □

Teorema 6.10 (Dei due carabinieri). *Date tre funzioni $f, g, h : D \to \mathbb{R}$, con $D \subseteq \mathbb{R}$ e $c \in \tilde{\mathbb{R}}$ punto di accumulazione di D, tali che esista un intorno $I(c)$ tale che valga $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ per ogni $x \in I(c) \cap D$; se g e h tendono allo stesso limite finito ℓ per x che tende a c allora anche il limite di f è ℓ.*

Dimostrazione (costruttiva)
Per ogni $I(\ell)$ esistono due intorni $I_1(c)$ e $I_2(c)$ tali che valgano

$$\begin{aligned} x \in I_1(c) \cap D \qquad &\longrightarrow \qquad \ell - \epsilon < g(x) < \ell + \epsilon \\ x \in I_2(c) \cap D \qquad &\longrightarrow \qquad \ell - \epsilon < h(x) < \ell + \epsilon \ . \end{aligned}$$

Allora posto $I'(c) = I(c) \cap I_1(c) \cap I_2(c)$, anch'esso intorno di c, per ogni $x \in I(c) \cap D$ le precedenti valgono entrambe insieme alla $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$; quindi, per tali x vale

$$\ell - \epsilon < g(x) \leq f(x) \leq h(x) < \ell + \epsilon \ .$$

Si è trovato quindi che $x \in I'(c)$ implica $|f(x) - \ell| < \epsilon$ e quindi anche f ha come limite ℓ se x tende a c. □

Di questo teorema esiste una versione nel caso di funzioni divergenti.

Teorema 6.11. *Date due funzioni $f, g : D \to \mathbb{R}$, con $D \subseteq \mathbb{R}$ e $c \in \tilde{\mathbb{R}}$ punto di accumulazione di D, tali che esista un intorno $I(c)$ tale che valga $f(x) \leq g(x)$ per ogni $x \in I(c)$; allora se $f(x)$ diverge a $+\infty$ anche $g(x)$ diverge a $+\infty$; se $g(x)$ diverge a $-\infty$ anche $f(x)$ diverge a $-\infty$.*

Dimostrazione (costruttiva)
Nel primo caso, se f diverge a $+\infty$ per x che tende a c, per ogni $M > 0$ esiste un intorno $I'(c)$ tale se $x \in I'(c) \cap D$ allora $f(x) > M$; definito allora $I''(c) = I(c) \cap I'(c)$, anch'esso intorno di c, per ogni $x \in I''(c)$ valgono sia la $f(x) \leq g(x)$ che $f(x) > M$ e quindi, per tali x si ha

$$g(x) \geq f(x) > M$$

e quindi la g diverge a $+\infty$.
L'analoga dimostrazione nel secondo caso si lascia alla cura del lettore studioso. □

Teorema 6.12. *Date due funzioni $f, g : D \to \mathbb{R}$, con $D \subseteq \mathbb{R}$ e $c \in \tilde{\mathbb{R}}$ punto di accumulazione di D; se $f(x)$ è infinitesima in c e g è limitata, cioè esiste un intorno $I(c)$ tale per ogni $x \in I(c)$ si abbia $|g(x)| \leq M$, per un qualche reale positivo M, allora la funzione prodotto fg è infinitesima in c.*

Dimostrazione (costruttiva)
Se f è infinitesima in c, fissato $\epsilon/M > 0$ (la cui arbitrarietà, si noti, equivale a quella di ϵ) esiste un intorno $I'(c)$ tale si abbia

$$x \in I'(c) \cap D \qquad \longrightarrow \qquad |f(x)| < \frac{\epsilon}{M} \ ;$$

definito allora $I''(c) = I(c) \cap I'(c)$, anch'esso intorno di c, per ogni $x \in I''(c)$ valgono sia la $|g(x)| < M$ che $|f(x)| \leq \epsilon/M$ e quindi, per tali x si ha

$$|f(x)g(x)| = |f(x)||g(x)| < \frac{\epsilon}{M} M = \epsilon$$

che dimostra che la funzione prodotto fg è infinitesima. □

6.3. Operazioni con i limiti

Le seguenti proprietà dei limiti sono analoghe a quelle già viste per i limiti delle successioni; per comodità del lettore se ne riporta enunciato e dimostrazione.

Teorema 6.13 (Limite di una funzione costante). *Data una funzione $f : D \to \mathbb{R}$, con $D \subseteq \mathbb{R}$ e $c \in \tilde{\mathbb{R}}$ punto di accumulazione di D; se $f(x)$ è costante allora il suo limite per x che tende a c è uguale alla costante.*

Dimostrazione (costruttiva)
Sia infatti $f(x) = k$, con $k \in \mathbb{R}$, allora fissato $\epsilon > 0$, per qualsiasi intorno di c vale

$$|f(x) - k| = |k - k| = 0 < \epsilon \ .$$ □

Teorema 6.14 (Limite di una somma 1). *Date due funzioni $f, g : D \to \mathbb{R}$, con $D \subseteq \mathbb{R}$ e $c \in \tilde{\mathbb{R}}$ punto di accumulazione di D; se f e g sono convergenti in c rispettivamente ai limiti ℓ_1 ed ℓ_2 allora la somma $f + g$ converge alla somma dei limiti $\ell_1 + \ell_2$.*

Dimostrazione (costruttiva)
Fissato $\epsilon > 0$, è possibile determinare due intorni $I'c$ e $I''(c)$ tali che

$$\begin{aligned} x \in I'(c) \cap D \qquad &\longrightarrow \qquad |f(x) - \ell_1| < \epsilon \\ x \in I''(c) \cap D \qquad &\longrightarrow \qquad |g(x) - \ell_2| < \epsilon \ . \end{aligned}$$

Definito allora $I(c) = I'(c) \cap I''(c)$, anch'esso intorno di c, per ogni $x \in I(c)$ le precedenti implicazioni valgono entrambe; scelto quindi $2\epsilon > 0$, si trova, per ogni $x \in I(c)$,

$$\big|\big[f(x) + g(x)\big] - (\ell_1 + \ell_2)\big| = \big|\big[f(x) - \ell_1\big] + (g(x) - \ell_2)\big| \leq |f(x) - \ell_1| + |g(x) - \ell_2| < 2\epsilon \ ,$$

che è quanto occorreva mostrare. □

Teorema 6.15 (Limite di una somma 2). *Date due funzioni $f, g : D \to \mathbb{R}$, con $D \subseteq \mathbb{R}$ e $c \in \tilde{\mathbb{R}}$ punto di accumulazione di D; se f e g sono divergenti in c entrambe a $+\infty$ o entrambe a $-\infty$ allora la somma $f + g$ diverge rispettivamente a $+\infty$ o a $-\infty$.*

Dimostrazione (costruttiva)
Se le due funzioni divergono entrambe a $+\infty$, per ogni $M > 0$ è possibile determinare due intorni $I'(c)$ e $I''(c)$ tali che valgano:

$$\begin{aligned} x \in I'(c) \cap D \qquad &\longrightarrow \qquad f(x) > M \\ x \in I''(c) \cap D \qquad &\longrightarrow \qquad g(x) > M \ . \end{aligned}$$

Allora, definito $I(c) = I'(c) \cap I''(c)$, anch'esso intorno di c, per ogni $x \in I(c)$ le precedenti valgono entrambe, quindi scelto $2M$, la cui arbitrarietà equivale a quella di M, vale

$$x \in I(c) \cap D \qquad \longrightarrow \qquad |f(x) + g(x) > 2M \ ,$$

che è quanto si doveva mostrare; la simile dimostrazione del caso in cui le due funzioni divergono a $-\infty$ si lascia alla cura del lettore studioso. □

Teorema 6.16 (Limite di una somma 3). *Date due funzioni $f, g : D \to \mathbb{R}$, con $D \subseteq \mathbb{R}$ e $c \in \tilde{\mathbb{R}}$ punto di accumulazione di D; se f converge in c ad un reale ℓ e g è divergente in c a $+\infty$ a $-\infty$ allora la somma $f + g$ diverge rispettivamente a $+\infty$ o a $-\infty$.*

Dimostrazione (costruttiva)
Fissati $\epsilon > 0$ e $M > 0$, è possibile determinare due intorni $I'c$ e $I''(c)$ tali che

$$\begin{array}{ccc} x \in I'(c) \cap D & \longrightarrow & |f(x) - \ell| < \epsilon \\ x \in I''(c) \cap D & \longrightarrow & |g(x)| > M \ . \end{array}$$

Si osservi che vale $|f(x)| - |\ell| \leq |f(x) - \ell|$; quindi dalla prima delle precedenti si trova facilmente $-|f(x)| > -(|\ell| + \epsilon)$; definito allora $I(c) = I'(c) \cap I''(c)$, anch'esso intorno di c, per ogni $x \in I(c)$ le precedenti implicazioni valgono entrambe; in particolare quindi si ha, per ogni $x \in I(c)$,

$$|f(x) + g(x)| \geq |g(x)| - |f(x)| > M - (|\ell| + \epsilon)$$

che, vista l'arbitrarietà di $M - (|\ell| + \epsilon)$, è quanto si doveva dimostrare. □

Teorema 6.17 (Limite del prodotto per una costante 1). *Data una funzione $f : D \to \mathbb{R}$, con $D \subseteq \mathbb{R}$ e $c \in \tilde{\mathbb{R}}$ punto di accumulazione di D e un numero reale $k \neq 0$; se f converge in c ad un reale ℓ allora il prodotto kf converge a $k\ell$.*

Dimostrazione (costruttiva)
Fissato $\epsilon > 0$ è possibile determinare un intorno $I(c)$ tale che valga

$$x \in I(c) \cap D \qquad \longrightarrow \qquad |f(x) - \ell| < \epsilon \ .$$

Ma allora, scelto $|k|\epsilon > 0$, vale

$$x \in I(c) \cap D \qquad \longrightarrow \qquad |kf(x) - k\ell| = |k||f(x) - \ell| < |k|\epsilon \ ,$$

che è quando si doveva dimostrare. □

Teorema 6.18 (Limite del prodotto per una costante 2). *Data una funzione $f : D \to \mathbb{R}$, con $D \subseteq \mathbb{R}$ e $c \in \tilde{\mathbb{R}}$ punto di accumulazione di D e un numero reale $k \neq 0$; se f in c diverge a $+\infty$ o $-\infty$ allora il prodotto kf diverge rispettivamente a $+\infty$ o $-\infty$ se $k > 0$ e rispettivamente a $-\infty$ o $+\infty$ se $k < 0$.*

Dimostrazione (costruttiva)
Se $f(x)$ diverge a $+\infty$, fissato $M > 0$ è possibile determinare un intorno $I(c)$ tale che valga

$$x \in I(C) \cap D \qquad \longrightarrow \qquad f(x) > M \ .$$

Ma allora, scelto $|k|M > 0$ vale

$$x \in I(C) \cap D \qquad \longrightarrow \qquad \begin{cases} kf(x) > |k|M & \text{se } k > 0 \\ kf(x) < -|k|M & \text{se } k < 0 \ , \end{cases}$$

che è quando si doveva dimostrare. La simile dimostrazione del caso in cui $f(x)$ diverge a $-\infty$ si lascia alla cura del lettore studioso. □

Corollario 6.19 (Limite di una combinazione lineare). Date due funzioni $f, g : D \to \mathbb{R}$, con $D \subseteq \mathbb{R}$ e $c \in \tilde{\mathbb{R}}$ punto di accumulazione di D e due reali non nulli α e β; se f e g sono convergenti in c rispettivamente ai limiti ℓ_1 ed ℓ_2 allora la combinazione lineare $\alpha f + \beta g$ converge in c alla combinazione lineare dei limiti $\alpha\ell_1 + \beta\ell_2$.

Teorema 6.20 (Limite del prodotto 1). *Date due funzioni $f, g : D \to \mathbb{R}$, con $D \subseteq \mathbb{R}$ e $c \in \tilde{\mathbb{R}}$ punto di accumulazione di D; se f e g sono convergenti in c rispettivamente ai limiti ℓ_1 ed ℓ_2 allora il prodotto fg converge al prodotto dei limiti $\ell_1\ell_2$.*

Dimostrazione (costruttiva)
Si dimostra prima il caso $\ell_1 = \ell_2 = 0$; in tal caso, per ogni $\sqrt{\epsilon} > 0$, esistono due intorni $I'(c)$ e $I''(c)$ tali che valgano

$$\begin{array}{ccc} x \in I'(c) \cap D & \longrightarrow & |f(x)| < \sqrt{\epsilon} \\ x \in I''(c) \cap D & \longrightarrow & |g(x)| < \sqrt{\epsilon} \; . \end{array}$$

Definito allora $I(c) = I'(c) \cap I''(c)$, anch'esso intorno di c, per ogni $x \in I(c)$ le precedenti implicazioni valgono entrambe; quindi, moltiplicandole membro a membro, si trova

$$x \in I(c) \cap D \qquad \longrightarrow \qquad |f(x)g(x)| = |f(x)||g(x)| < \epsilon \; ;$$

quindi fg è infinitesima.
Nel caso generale, applicando il teorema 6.2, si ha

$$\lim_{x \to c}[f(x) - \ell_1] = 0 \qquad , \qquad \lim_{x \to c}[g(x) - \ell_2] = 0 \; ;$$

quindi, per il caso ora visto di limiti entrambi nulli,

$$\lim_{x \to c}[f(x) - \ell_1][g(x) - \ell_2] = 0 \; .$$

Si consideri ora la funzione infinitesima

$$\phi(x) = [f(x) - \ell_1][g(x) - \ell_2] = f(x)g(x) - f(x)\ell_2 - g(x)\ell_1 + \ell_1\ell_2 \; ;$$

usando la quale si può scrivere

$$f(x)g(x) = \phi(x) + f(x)\ell_2 + g(x)\ell_1 - \ell_1\ell_2 \; ;$$

quindi, passando al limite, e utilizzando il corollario 6.19 si trova

$$\lim_{x \to c}[f(x)g(x)] = \lim_{x \to c}[\phi(x) + f(x)\ell_2 + g(x)\ell_1 - \ell_1\ell_2] = 0 + \ell_1\ell_2 + \ell_2\ell_1 - \ell_1\ell_2$$

e pertanto

$$\lim_{x \to c}[f(x)g(x)] = \ell_1\ell_2 \; .$$

□

Teorema 6.21 (Limite del prodotto 2)**.** *Date due funzioni $f, g : D \to \mathbb{R}$, con $D \subseteq \mathbb{R}$ e $c \in \tilde{\mathbb{R}}$ punto di accumulazione di D; se f e g sono divergenti in c allora il prodotto fg diverge a $+\infty$ se i limiti sono concordi e a $-\infty$ se sono discordi.*

Dimostrazione (costruttiva)
Se f e g divergono entrambe a $+\infty$, per ogni $M > 0$ è possibile determinare due intorni $I'(c)$ e $I''(c)$ tali che

$$\begin{array}{ccc} x \in I'(c) \cap D & \longrightarrow & f(x) > M \\ x \in I''(c) \cap D & \longrightarrow & g(x) > M \; . \end{array}$$

Definito allora $I(c) = I'(c) \cap I''(c)$, anch'esso intorno di c, per ogni $x \in I(c)$ le precedenti implicazioni valgono entrambe; scelto quindi $M^2 > 0$, moltiplicando membro a membro le disequazioni precedenti si trova, per ogni $x \in I(c)$,

$$f(x)g(x) > M^2 \; ,$$

che è quanto occorreva mostrare.
Se f diverge a $+\infty$ e g a $-\infty$, per ogni $M > 0$ è possibile determinare due intorni $I'c$ e $I''(c)$ tali che

$$\begin{array}{ccc} x \in I'(c) \cap D & \longrightarrow & f(x) > M \\ x \in I''(c) \cap D & \longrightarrow & g(x) < -M \; . \end{array}$$

Definito allora $I(c) = I'(c) \cap I''(c)$, anch'esso intorno di c, per ogni $x \in I(c)$ le precedenti implicazioni valgono entrambe; si noti che la seconda disuguaglianza si può riscrivere nella forma $-g(x) > M$ nella quale entrambi i membri sono positivi; quindi, scelto $M^2 > 0$, moltiplicando membro a membro questa con la $f(x) > M$ si trova, per ogni $x \in I(c)$,

$$-f(x)g(x) > M^2 \qquad \longrightarrow \qquad f(x)g(x) < -M^2 \ ,$$

che è quanto occorreva mostrare. Gli altri due casi si lasciano alla cura del lettore studioso. □

Corollario 6.22 (Limite della potenza)**.** Data una funzione $f : D \to \mathbb{R}$, con $D \subseteq \mathbb{R}$ e $c \in \tilde{\mathbb{R}}$ punto di accumulazione di D; se f converge in c al limite ℓ allora la funzione potenza f^n converge alla potenza del limite ℓ^n.

Lemma 3. Data una funzione $f : D \to \mathbb{R}$, con $D \subseteq \mathbb{R}$ e $c \in \tilde{\mathbb{R}}$ punto di accumulazione di D; se f converge in c al limite ℓ esiste un intorno $I(c)$ tale che valga

$$x \in I(c) \cap D \qquad \longrightarrow \qquad |f(x)| > \frac{|\ell|}{2} \ .$$

Dimostrazione (costruttiva)
Se $\ell = 0$ il teorema è ovvio; sia quindi $\ell \neq 0$. Fissato $\epsilon = |\ell|/2 > 0$, esiste un intorno $I(c)$ tale che valga

$$x \in I(c) \cap D \qquad \longrightarrow \qquad \ell - \frac{|\ell|}{2} < f(x) < \ell + \frac{|\ell|}{2} \ .$$

Per $\ell > 0$, dalla prima delle due disequazioni precedenti, si trova

$$\ell - \frac{|\ell|}{2} < f(x) \qquad \longrightarrow \qquad \ell - \frac{\ell}{2} < f(x) \qquad \longrightarrow \qquad f(x) > \frac{\ell}{2} > 0 \ .$$

Per $\ell < 0$, dalla seconda delle due disequazioni, si trova

$$f(x) < \ell + \frac{|\ell|}{2} \qquad \longrightarrow \qquad f(x) < \ell - \frac{\ell}{2} \qquad \longrightarrow \qquad f(x) < \frac{\ell}{2} < 0 \ .$$

In entrambi i casi quindi vale

$$|f(x)| > \frac{|\ell|}{2} \ .$$ □

Teorema 6.23 (Limite del reciproco)**.** *Data una funzione $f : D \to \mathbb{R}$, con $D \subseteq \mathbb{R}$ e $c \in \tilde{\mathbb{R}}$ punto di accumulazione di D; se f converge in c al limite $\ell \neq 0$ allora la funzione reciproco $1/f$ converge al reciproco del limite $1/\ell$.*

Dimostrazione (costruttiva)
Per l'esistenza del limite della f, fissato $|\ell|^2\epsilon/2 > 0$ esiste un intorno $I(c)$ tale che

$$x \in I(c) \cap D \qquad \longrightarrow \qquad |f(x) - \ell| < \frac{|\ell|^2}{2}\epsilon \ ;$$

quindi, utilizzando anche il lemma 3, si trova

$$x \in I(c) \cap D \qquad \longrightarrow \qquad \left| \frac{1}{f(x)} - \frac{1}{\ell} \right| = \frac{|l - f(x)|}{|\ell f(x)|} = \frac{|f(x) - \ell|}{|f(x)||\ell|} < \frac{\frac{|\ell|^2}{2}\epsilon}{\frac{|\ell|}{2}|\ell|} < \epsilon \ .$$ □

Corollario 6.24 (Limite del quoziente)**.** Date due funzioni $f, g : D \to \mathbb{R}$, con $D \subseteq \mathbb{R}$ e $c \in \tilde{\mathbb{R}}$ punto di accumulazione di D; se f e g sono convergenti in c rispettivamente ai limiti ℓ_1 ed $\ell_2 \neq 0$ allora il quoziente f/g converge al quoziente dei limiti ℓ_1/ℓ_2, cioè

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\ell_1}{\ell_2} \ .$$

Teorema 6.25 (Limite della radice 1). *Data una funzione $f : D \to \mathbb{R}$, con $D \subseteq \mathbb{R}$ e $c \in \tilde{\mathbb{R}}$ punto di accumulazione di D; se f converge in c al limite ℓ allora se $\ell > 0$ con n pari e con qualsiasi ℓ con n è dispari, vale*

$$\lim_{x\to c} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\ell} \ .$$

Dimostrazione (costruttiva)
Si ponga $\sqrt[n]{f(x)} = \phi(x)$ e quindi $f(x) = [\phi(x)]^n$. Si noti che questa posizione è senz'altro lecita per n dispari; per n pari, deve essere $\ell > 0$ e quindi, per il teorema della permanenza del segno, deve esistere un intorno di c in qui la funzione $f(x)$ è positiva: in tale intorno la posizione fatta è lecita anche per n pari. Allora, usando il corollario 6.22, si ha

$$\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} [\phi(x)]^n = \left[\lim_{x\to c} \phi(x)\right]^n$$

e quindi, per ipotesi,

$$\left[\lim_{x\to c} \phi(x)\right]^n = \ell \qquad \longrightarrow \qquad \sqrt[n]{\ell} = \lim_{x\to c} \phi(x) = \lim_{x\to c} \sqrt[n]{f(x)} \ . \qquad \square$$

Teorema 6.26 (Limite della radice 2). *Data una funzione $f : D \to \mathbb{R}$, con $D \subseteq \mathbb{R}$ e $c \in \tilde{\mathbb{R}}$ punto di accumulazione di D; se f diverge in c a $+\infty$ con n pari vale*

$$\lim_{x\to c} \sqrt[n]{f(x)} = +\infty$$

e se f diverge a $\pm\infty$ con n è dispari vale

$$\lim_{x\to c} \sqrt[n]{f(x)} = \pm\infty \ .$$

Dimostrazione (costruttiva)
Se f diverge in c a $+\infty$ allora per ogni $M > 0$ esiste un intorno $I(c)$ tale che valga

$$x \in I(c) \cap D \qquad \longrightarrow \qquad f(x) > M \ .$$

Quindi scelto $\sqrt[n]{M}$, prendendo la radice n-esima di entrambi i membri positivi della precedente disequazione si trova

$$x \in I(c) \cap D \qquad \longrightarrow \qquad \sqrt[n]{f(x)} > \sqrt[n]{M} \ ,$$

che è quanto si doveva dimostrare. Il caso con n dispari si lascia alla cura del lettore studioso. $\square$

Teorema 6.27 (Limite del valore assoluto 1). *Data una funzione $f : D \to \mathbb{R}$, con $D \subseteq \mathbb{R}$ e $c \in \tilde{\mathbb{R}}$ punto di accumulazione di D; se f converge in c al limite ℓ allora $|f(x)|$ converge a $|\ell|$.*

Dimostrazione (costruttiva)
Per la convergenza di f, fissato $\epsilon > 0$, esiste un intorno $I(c)$ tale che

$$x \in I(c) \cap D \qquad \longrightarrow \qquad |f(x) - \ell| < \epsilon \ .$$

Ora basta osservare che, per ogni $a, b \in \mathbb{R}$ vale $\big||a| - |b|\big| \leq |a - b|$, quindi, in particolare si ha

$$x \in I(c) \cap D \qquad \longrightarrow \qquad \big||f(x)| - |\ell|\big| \leq |f(x) - \ell| < \epsilon \ ;$$

da cui la tesi. $\square$

Teorema 6.28 (Limite del valore assoluto 2). *Data una funzione $f : D \to \mathbb{R}$, con $D \subseteq \mathbb{R}$ e $c \in \tilde{\mathbb{R}}$ punto di accumulazione di D; se f diverge in c a $\pm\infty$ allora $|f(x)|$ diverge a $+\infty$.*

Dimostrazione (costruttiva)
Se f diverge in c a $\pm\infty$ allora per ogni $M > 0$ esiste un intorno $I(c)$ tale che valga

$$x \in I(c) \cap D \qquad \longrightarrow \qquad |f(x)| > M \ ;$$

quindi $|f|$ diverge in c a $+\infty$. □

Teorema 6.29. *Data una funzione $f : D \to \mathbb{R}$, con $D \subseteq \mathbb{R}$ e $c \in \tilde{\mathbb{R}}$ punto di accumulazione di D; se f è infinitesima in c allora la funzione reciproca $1/f(x)$ è divergente in c.*

Dimostrazione (costruttiva)
Se f è infinitesima in c, per ogni $\epsilon > 0$ esiste un intorno di $I(c)$ per cui valga

$$x \in I(c) \cap D \qquad \longrightarrow \qquad |f(x)| < \epsilon \qquad \longrightarrow \qquad \left|\frac{1}{f(x)}\right| > \frac{1}{\epsilon} \ ;$$

quindi la funzione reciproca $1/f$ è divergente [teorema 6.1]. □

Teorema 6.30. *Data una funzione $f : D \to \mathbb{R}$, con $D \subseteq \mathbb{R}$ e $c \in \tilde{\mathbb{R}}$ punto di accumulazione di D; se f diverge in c allora la funzione reciproca $1/f(x)$ è infinitesima in c.*

Dimostrazione (costruttiva)
Se f diverge in c [teorema 6.1], per ogni $M > 0$ esiste un intorno di $I(c)$ per cui valga

$$x \in I(c) \cap D \qquad \longrightarrow \qquad |f(x)| > M \qquad \longrightarrow \qquad \left|\frac{1}{f(x)}\right| < \frac{1}{M} \ ;$$

quindi la funzione reciproca $1/f$ è infinitesima. □

Corollario 6.31. Data una funzione $f : D \to \mathbb{R}$, con $D \subseteq \mathbb{R}$, di equazione $f(x) = x^p$, con p intero, valgono

$$\lim_{x\to 0^\pm} x^p = \begin{cases} 0 & \text{se } p > 0 \\ 1 & \text{se } p = 0 \\ \pm\infty & \text{se } p < 0 \end{cases} \qquad , \qquad \lim_{x\to \pm\infty} x^p = \begin{cases} \pm\infty & \text{se } p > 0 \\ 1 & \text{se } p = 0 \\ 0 & \text{se } p < 0 \ . \end{cases}$$

Teorema 6.32 (Limite della funzione composta o cambio di variabile)**.** *Date due funzioni $f : D \to \mathbb{R}$, $g : E \to D$ con $D, E \subseteq \mathbb{R}$, e $c, a \in \tilde{\mathbb{R}}$ punti di accumulazione rispettivamente di D ed E, e sia g biiettiva; valgono allora i seguenti due risultati.*

1. *Se $\lim_{t\to a} g(t) = c$ e $\lim_{x\to c} f(x) = \ell$ allora*

$$\lim_{t\to a} f \circ g(t) = \ell \ .$$

2. *Se $\lim_{x\to c} g^{-1}(x) = a$ e $\lim_{t\to a} f \circ g(t) = \ell$ allora*

$$\lim_{x\to c} f(x) = \ell \ .$$

Dimostrazione (costruttiva)
Dimostrazione del punto 1. Per l'esistenza del limite della f, per ogni intorno $I(\ell)$ esiste un intorno $I(c)$ tale che

$$x \in I(C) \cap D \qquad \longrightarrow \qquad f(x) \in I(\ell) \ .$$

Per l'esistenza del limite della g, per il precedente intorno $I(c)$, esiste un intorno $I(a)$ tale che

$$t \in I(a) \cap E \qquad \longrightarrow \qquad g(t) \in I(c) \ .$$

Occorre qui fare attenzione in quanto la f può non essere definita in c, cioè può essere $c \notin D$; per ovviare a questo problema si noti che la g è iniettiva, quindi può assumere il valore c al piú una volta, se non lo assume non c'è problema, se lo assume sia $b \in E$ tale $g(b) = c$; in tal caso l'intorno $I(a)$ deve essere scelto in modo da non contenere b [teorema 4.6]; in questo modo, per ogni t in $I(a)$ si ha $g(t)$ in D. Per ogni $I(\ell)$ quindi, esiste un intorno $I(a)$, scelto con le precauzioni ora illustrate, per il quale si ha

$$t \in I(a) \cap E \qquad \longrightarrow \qquad g(t) \in I(c) \cap D \qquad \longrightarrow \qquad f[g(t)] \in I(\ell) \ .$$

Dimostrazione del punto 2. Basta ripercorrere la dimostrazione vista al punto 1, utilizzando al posto di f e g le funzioni $f \circ g$ e g^{-1}, osservando che vale $(f \circ g) \circ g^{-1} = f$. □

Il precedente teorema consente di effettuare un cambio di variabile nel calcolo dei limiti e, come si vedrà, è utilissimo nel calcolo di molti limiti.

Teorema 6.33. *Vale*

$$\lim_{x \to \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e \ .$$

Dimostrazione (costruttiva)
Ricordando la definizione di funzione parte intera [definizione 3.5], si ha $[x] \le x < [x+1]$, quindi, posto $a_n = (1 + 1/n)^n$, valgono

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \le \left(1 + \frac{1}{[x]}\right)^{[x+1]} = \left(1 + \frac{1}{[x]}\right) a_{[x]}$$

e

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \ge \left(1 + \frac{1}{[x]+1}\right)^{[x]} = \left(1 + \frac{1}{[x]+1}\right)^{-1} a_{[x+1]} \ ;$$

quindi, complessivamente,

$$\left(1 + \frac{1}{[x]+1}\right)^{-1} a_{[x+1]} \le \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \le \left(1 + \frac{1}{[x]}\right) a_{[x]} \ .$$

Le funzioni $[x]$ e $[x+1]$ divergono per x che tende a $+\infty$, infatti per ogni $M > 0$, se $x > M$ si hanno le relazioni $[x] > M - 1$ e $[x+1] > M$; quindi le funzioni reciproche $1/[x]$ e $1/([x+1])$ sono infinitesime per x che tende a $+\infty$ [teorema 6.30]; quindi valgono [corollario 6.19, teorema 6.23]

$$\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{[x]+1}\right)^{-1} = \lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{[x]}\right) = 1 \ .$$

Inoltre, ricordando che $\lim\limits_{[x] \to +\infty} a_{[x]} = e$, si ha che fissato $\epsilon > 0$ esiste un naturale k per cui, per ogni $[x] > k$ si ha

$$|a_{[x]} - e| < \epsilon \ ;$$

quindi, ricordando che $x \ge [x]$, se $k > M$, la precedente disequazione vale anche per $x > M$ e quindi vale

$$\lim_{x \to +\infty} a_{[x]} = e \ .$$

Con il cambio di variabile $x = g(t) = t - 1$ si ha anche [teorema 6.32]

$$\lim_{[x] \to +\infty} a_{[x+1]} = \lim_{[t] \to +\infty} a_{[t]} = e$$

La $(1 + 1/x)^x$ quindi è compresa fra due funzioni il cui limite all'infinito vale e; quindi il teorema è dimostrato [teorema 6.10].
Il caso in per x che tende a $-\infty$ si fa con il cambio di variabile $x = -t - 1$, nel qual caso si trova

$$\lim_{t \to -\infty} \left(1 + \frac{1}{-t-1}\right)^{-t-1} = \lim_{t \to -\infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^{t+1} = \lim_{t \to -\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{t}\right)^t \left(1 + \frac{1}{t}\right)\right] = e \ . \qquad □$$

6.4. Forme indeterminate

I casi non compresi nei teoremi precedenti si dicono *forme indeterminate* e, similmente a quanto già visto per le successioni, vengono convenzionalmente indicate con i simboli

$$+\infty - \infty \quad , \quad 0 \cdot \infty \quad , \quad \frac{0}{0} \quad , \quad \frac{\infty}{\infty} \; .$$

Non c'è un metodo standard per trattare le forme indeterminate e la soluzione è diversa caso per caso. Esistono tuttavia alcune funzioni che presentano forme indeterminate risolubili in maniera standard. Il limite di alcune di queste funzioni si dicono limiti notevoli e verranno esaminati nel prossimo capitolo. Qui si enunciano due teoremi sulle forme indeterminate delle funzioni razionali.

Teorema 6.34. *Sia $f : D \to \mathbb{R}$ una funzione razionale di equazione*

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0}$$

allora

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{p(x)}{q(x)} = \begin{cases} \pm\infty & \text{se } n > m \\ \dfrac{a_n}{b_m} & \text{se } n = m \\ 0 & \text{se } n < m \; . \end{cases}$$

Dimostrazione (costruttiva)
Vale

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^n\left(a_n + \dfrac{a_{n-1}}{x} + \cdots + \dfrac{a_1}{x^{n-1}} + \dfrac{a_0}{x^n}\right)}{x^m\left(b_m + \dfrac{b_{m-1}}{x} + \cdots + \dfrac{b_1}{x^{m-1}} + \dfrac{b_0}{x^m}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} x^{(n-m)} \frac{a_n + \dfrac{a_{n-1}}{x} + \cdots + \dfrac{a_1}{x^{n-1}} + \dfrac{a_0}{x^n}}{b_m + \dfrac{b_{m-1}}{x} + \cdots + \dfrac{b_1}{x^{m-1}} + \dfrac{b_0}{x^m}} \; .$$

Tutte le frazioni al numeratore e al denominatore sono infinitesime [teorema 6.30], la tesi quindi segue dal corollario 6.31. □

Teorema 6.35. *Sia $f : D \to \mathbb{R}$ una funzione razionale di equazione*

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_p x^p}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_q x^q}$$

allora

$$\lim_{x\to 0} \frac{p(x)}{q(x)} = \begin{cases} 0 & \text{se } p > m \\ \dfrac{a_p}{b_q} & \text{se } p = q \\ \pm\infty & \text{se } p < q \; . \end{cases}$$

Dimostrazione (costruttiva)
Vale

$$\lim_{x\to 0} \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_p x^p}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_q x^q} = \lim_{x\to 0} \frac{x^p\left(a_n x^{n-p} + \cdots + a_{p+1}x + a_p\right)}{x^q\left(b_m x^{m-q} + \cdots + b_{q+1}x + b_q\right)} =$$

$$= \lim_{x\to 0} x^{(p-q)} \frac{a_n x^{n-p} + \cdots + a_{p+1}x + a_p}{b_m x^{m-q} + \cdots + b_{q+1}x + b_q} \; .$$

Tutte le potenze di x al numeratore e al denominatore sono infinitesime [corollario 6.22], la tesi quindi segue dal corollario 6.31. □

Il contenuto dei due teoremi precedenti può essere riassunto nel modo seguente. Per il rapporto di funzioni polinomiali, se il limite è calcolato per x che tende all'infinito in ciascun polinomio dominano i monomi con le potenze maggiori; se il limite è calcolato per x che tende a zero dominano i monomi con le potenze minori. I seguenti esempi chiariranno ulteriormente la questione.

Esempio 34. Si consideri il seguente limite:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{4x^2+5x-2}{1-3x^2} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2\left(4+\dfrac{5}{x}-\dfrac{2}{x^2}\right)}{x^2\left(-3+\dfrac{1}{x^2}\right)} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{4+\dfrac{5}{x}-\dfrac{2}{x^2}}{-3+\dfrac{1}{x^2}} = -\frac{4}{3} \,.$$

Esempio 35. Si consideri il seguente limite:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x^3-4x^2+3x-1}{-5x^2+3x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3\left(2-\dfrac{4}{x}+\dfrac{3}{x^2}-\dfrac{1}{x^3}\right)}{x^2\left(-5+\dfrac{3}{x}\right)} = \lim_{x\to\pm\infty} x\frac{2-\dfrac{4}{x}+\dfrac{3}{x^2}-\dfrac{1}{x^3}}{-5+\dfrac{3}{x}} = \mp\infty \,.$$

Si noti che il cambio di segno davanti a ∞ è dovuto al fatto che l'unica parte non infinitesima della frazione è negativa.

Esempio 36. Si consideri il seguente limite:

$$\lim_{x\to 0^\pm} \frac{3x^3-4x^2-2x}{5x^3+x^2} = \lim_{x\to 0^\pm} \frac{x(3x^2-4x-2)}{x^2(5x+1)} = \lim_{x\to 0^\pm} \frac{1}{x}\cdot\frac{3x^2-4x-2}{5x+1} = \mp\infty \,.$$

Si noti anche qui il cambio di segno dovuto alla frazione negativa.

7

FUNZIONI CONTINUE

Per procedere nello studio delle funzioni e dei loro limiti è necessaria la nozione di continuità in un punto.

7.1. Definizione

Definizione 7.1 (Funzione continua)**.** La funzione $f : D \to \mathbb{R}$, con $D \subseteq \mathbb{R}$, si dice *continua* in $c \in D$ se per ogni intorno $I[f(c)]$ esiste un intorno $I(c)$ tale che si abbia

$$x \in I(c) \cap D \qquad \longrightarrow \qquad f(x) \in I[f(c)] \ .$$

Questa definizione ha due immediate conseguenze a seconda che c sia isolato o di accumulazione.

Teorema 7.1. *Dati la funzione $f : D \to \mathbb{R}$, con $D \subseteq \mathbb{R}$, e $c \in D$ allora:*
1. se c è isolato f è continua in c;
2. se c è di accumulazione f è continua in c se vale

$$\lim_{x \to c} f(x) = f(c) \ .$$

Dimostrazione (costruttiva)
Dimostrazione del punto 1. Se $c \in D$ è isolato, allora esiste in intorno $I(c)$ tale che $I(c) \cap D = \{c\}$; per ogni intorno $I[f(c)]$ vale quindi

$$x \in I(c) \cap D \qquad \longrightarrow \qquad x = c \qquad \longrightarrow \qquad f(x) = f(c) \in I[f(c)] \ .$$

Dimostrazione del punto 2. È ovvia, tenuto conto della definizione di limite 6.1. □

Teorema 7.2. *Sia $f : D \to \mathbb{R}$, con $D \subseteq \mathbb{R}$, una funzione continua in c; allora, per ogni successione $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, con $x_n \in D$, che converge a c, vale*

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = f(c) \ .$$

Dimostrazione (Costruttiva)
Poiché f è continua, per ogni intorno $I[f(c)]$ esiste un intorno $I(c)$ tale che valga $f[D \cap I(c)] \subseteq I[f(c)]$. Sia quindi $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ la successione convergente a c; per ogni $I(c)$ esiste quindi un naturale k tale che valga $x_n \in I(c)$ per ogni $n > k$; quindi, se $n > k$, x_n appartiene sia a D che a $I(c)$ e quindi vale

$$f(x_n) \in f[D \cap I(c)] \subseteq I[f(c)] \ ,$$

che è quanto si doveva dimostrare. □

Definizione 7.2. Dati la funzione $f : D \to \mathbb{R}$, con $D \subseteq \mathbb{R}$, e c punto di accumulazione di D allora se valgono

$$\lim_{x \to c^-} f(x) = f(c) \quad \text{o} \quad \lim_{x \to c^+} f(x) = f(c)$$

la funzione si dice rispettivamente *continua a sinistra* o *continua a destra.*

Teorema 7.3. *Dati la funzione $f : D \to \mathbb{R}$, con $D \subseteq \mathbb{R}$, e c punto di accumulazione di D, la funzione f è continua in c se è ivi continua sia a destra che a sinistra.*

Dimostrazione (costruttiva)
Discende immediatamente dalla precedente definizione e dal teorema 6.3. □

Definizione 7.3. Una funzione $f : D \to \mathbb{R}$, con $D \subseteq \mathbb{R}$, si dice continua nell'insieme $A \subseteq D$ se è continua in ogni $c \in A$.

7.2. Prolungamento per continuità

Dalla definizione data, segue che una funzione f può essere continua solo nei punti del suo dominio D. Tuttavia se $c \notin D$, ma esiste il limite finito ℓ di f per x che tende a c, allora è possibile definire la funzione $\bar{f}$ continua in c ponendo

$$\bar{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \neq c \\ \ell & \text{se } x = c\ . \end{cases}$$

La funzione $\bar{f}$ è detta *prolungamento per continuità* della funzione f in c.

Esempio 37. Si consideri la funzione $f : D \to \mathbb{R}$ di equazione

$$f(x) = \frac{4x^2 - 5x + 1}{x - 1}\ .$$

Essa ha per dominio l'insieme $D = \{x \mid x \in \mathbb{R}, x \neq 1\}$; il punto 1 è di accumulazione per D ed esiste il limite della funzione in 1; vale infatti

$$\lim_{x \to 1} \frac{4x^2 - 5x + 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1}(4x - 1) = 3\ ;$$

è quindi possibile prolungare per continuità la funzione f mediante la funzione $\bar{f} : D \cup \{1\} \to \mathbb{R}$ di equazione

$$\bar{f}(x) = \begin{cases} \dfrac{4x^2 - 5x + 1}{x - 1} = 4x - 1 & \text{se } x \neq 1 \\ 3 & \text{se } x = 1\ . \end{cases}$$

7.3. Punti di discontinuità

Definizione 7.4. Se la funzione $f : D \to \mathbb{R}$ non è continua per $x = c$, c è detto *punto di discontinuità* per f.

Si usa classificare i punti di discontinuità nei seguenti tre tipi.
Primo tipo. Si verifica quando il limite destro e il limite sinistro della funzione in c sono finiti ma diversi. In questo caso si dice che la funzione ha un *salto* in c.
Secondo tipo. Si verifica quando il limite sinistro o il limite destro della funzione in c o entrambi sono infiniti o non esistono.
Terzo tipo. Si verifica quando esiste il limite ℓ della funzione in c ma c non appartiene al dominio di f oppure $f(c) \neq \ell$. In questo caso si dice che la funzione ha una *discontinuità eliminabile*, è infatti sempre possibile definire il prolungamento per continuità di f in c.

Esempio 38. La funzione $f : D \to \mathbb{R}$ di equazione

$$f(x) = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} \dfrac{x}{x} = 1 & \text{se } x \geq 0 \\ \dfrac{-x}{x} = -1 & \text{se } x < 0\ . \end{cases}$$

ha dominio $D = \mathbb{R}^*$; non esiste il limite per x che tende a 0 poiché il limite destro e il limite sinistro sono diversi; vale infatti

$$\lim_{x \to 0^\pm} \frac{|x|}{x} = \pm 1 \ .$$

La funzione ha quindi in $x = 0$ un punto di discontinuità del primo tipo. In figura 7.1 è riportato il grafico della funzione.

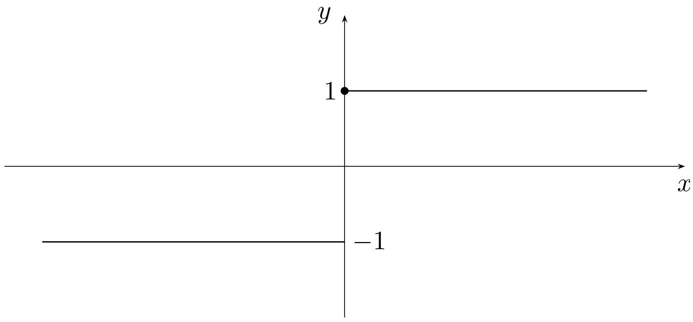


Figura 7.1: Discontinuità del primo tipo

Esempio 39. La funzione $f : D \to \mathbb{R}$ di equazione

$$f(x) = e^{1/x}$$

ha dominio $D = \mathbb{R}^*$; il limite destro per x che tende a 0 è infinito mentre il limite sinistro è nullo; vale infatti

$$\lim_{x \to 0^+} e^{1/x} = +\infty \quad , \quad \lim_{x \to o^-} e^{1/x} = 0 \ .$$

La funzione ha quindi in $x = 0$ un punto di discontinuità del secondo tipo. In figura 7.2 è riportato il grafico della funzione.

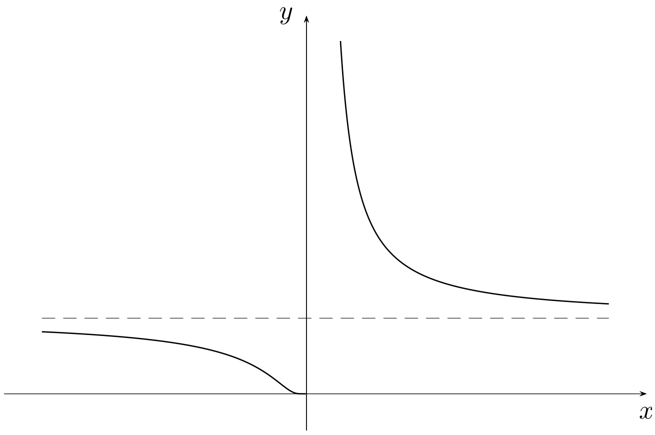


Figura 7.2: Discontinuità del secondo tipo

Esempio 40. La funzione $f : D \to \mathbb{R}$ di equazione

$$f(x) = \frac{x^3 - 4x^2 + 3x + 2}{x - 2} = \frac{(x^2 - 2x - 1)(x - 2)}{x - 2}$$

ha dominio $D = \{x \mid x \in \mathbb{R}, x \neq 2\}$; tuttavia il limite per x che tende a 2 esiste e vale:

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^3 - 4x^2 + 3x + 2}{x - 2} = \lim_{x \to 2} (x^2 - 2x - 1) = -1 \ .$$

La funzione ha quindi in $x = 0$ un punto di discontinuità del secondo tipo, eliminabile facendo il prolungamento per continuità. In figura 7.3 è riportato il grafico della funzione.

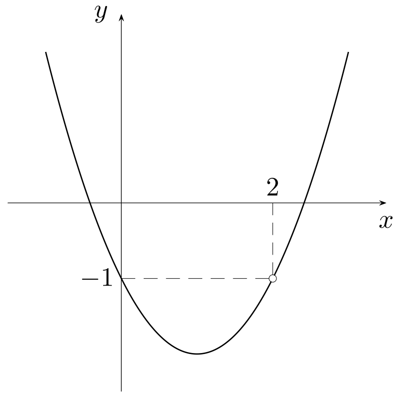


Figura 7.3: Discontinuità del terzo tipo

7.4. Alcuni teoremi sulle funzioni continue

Teorema 7.4. *Date due funzioni $f, g : D \to \mathbb{R}$, con $D \subseteq \mathbb{R}$, entrambe continue in $c \in D$ allora:*
1. per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, è continua in c la combinazione lineare $\alpha f + \beta g$;
2. la funzione valore assoluto $|f|$ è continua in c;
3. la funzione prodotto fg è continua in c;
4. per ogni $n \in \mathbb{N}$ la funzione potenza f^n è continua in c;
5. se $f(c) \neq 0$, la funzione reciproco $1/f$ è continua in c;
6. se $g(c) \neq 0$, la funzione quoziente f/g è continua in c.

Dimostrazione (costruttiva)
Se c è punto di isolato, la dimostrazione è ovvia; se c è punto di accumulazione per D, la dimostrazione è un'immediata conseguenza delle analoghe proprietà viste per i limiti. □

Teorema 7.5 (Permanenza del segno)**.** *Data la funzione $f : D \to \mathbb{R}$, con $D \subseteq \mathbb{R}$, continua in $c \in D$, se $f(c) \neq 0$ allora esiste un intorno $I(c)$ in cui f ha lo stesso segno di $f(c)$, cioè*

$$x \in I(c) \cap D \qquad \longrightarrow \qquad f(x)f(c) > 0 \ .$$

Dimostrazione (costruttiva)
Si consideri l'intorno circolare $I[f(c), f(c)/2]$; poiché f è continua in c, esiste un intorno $I(c)$ in cui

$$x \in I(c) \cap D \qquad \longrightarrow \qquad f(x) \in I[f(c), f(c)/2] \ ;$$

quindi, per ogni $x \in I(c) \cap D$, si ha: se $f(c) > 0$ allora $f(x) > f(c)/2 > 0$, se $f(x) < 0$ allora $f(x) < -f(c)/2 < 0$. □

Si noti che la dimostrazione di questo teorema è del tutto simile a quella dell'analogo teorema 6.7 già dimostrato per i limiti.

Teorema 7.6 (Continuità delle funzioni composte)**.** *Date due funzioni $f : D \to \mathbb{R}$ e $g : E \to D$ con $D; E \subseteq \mathbb{R}$, e siano g continua in $c \in E$ e f continua in $a = g(c) \in D$; allora $f \circ g$ è continua in c.*

Dimostrazione (costruttiva)
Se f è continua in a, per ogni intorno $I[f(a)]$ esiste un intorno $I(a)$ tale che valga

$$x \in I(a) \cap D \qquad \longrightarrow \qquad f(x) \in I[f(a)]$$

e, se g è continua in c, per il medesimo intorno $I(a)$ esiste un intorno $I(c)$ tale sia abbia

$$x \in I(c) \cap E \qquad \longrightarrow \qquad g(x) \in I(a) \ .$$

Quindi per ogni intorno $I[f(a)]$ esiste un intorno $I(c)$ tale che valga

$$x \in I(c) \cap E \qquad \longrightarrow \qquad g(x) \in I(a) \qquad \longrightarrow \qquad f[g(x)] \in I[f(a)]$$

e quindi $f \circ g(x) = f[g(x)]$ è continua in c. □

Nei teoremi che seguono, salvo diverso avviso, gli intervalli menzionati possono essere indifferentemente aperti o chiusi.

Teorema 7.7 (Le funzioni continue mandano intervalli in intervalli)**.** *Sia $f : D \to \mathbb{R}$ con $D \subseteq \mathbb{R}$; dato l'intervallo $I \subseteq D$, se f è continua in I, allora $f(I)$ è un intervallo.*

Dimostrazione (per assurdo)
Siano $c, d \in f(I)$ con $c < d$ e siano $a, b \in I$ tali che $f(a) = c$ e $f(b) = d$ allora si deve dimostrare che ogni ξ tale che sia $c < \xi < d$ appartiene a $f(I)$; si supponga per assurdo che sia falso, cioè che ξ non appartenga a $f(I)$ e quindi non esista alcun $x \in I$ per cui sia $f(x) = \xi$; supposto $a < b$ (la dimostrazione con $b < a$ è identica, scambiando i ruoli di a e b), si considerino gli insiemi

$$A = \{x \mid x \in [a, b], f(x) \leq \xi\} \qquad , \qquad B = \{x \mid x \in [a, b], f(x) \geq \xi\} \ ;$$

essi sono non vuoti, infatti $a \in A$ e $b \in B$; inoltre sono disgiunti e vale $[a, b] = A \cup B$. Inoltre A è superiormente limitato e quindi ammette estremo superiore [teorema 1.5], sia quindi $\zeta = \sup(A)$; ma l'estremo superiore di un insieme è punto di accumulazione per l'insieme e, poiché $[a, b]$ è chiuso, deve essere $\zeta \in [a, b]$ [teorema 4.4]; quindi o $\zeta \in A$ o $\zeta \in B$.
Sia $\zeta \in A$; allora

$$x \in]\zeta, b] \qquad \longrightarrow \qquad x \in B \qquad \longrightarrow \qquad f(x) \geq \xi \ ;$$

ma f è continua in I ed in particolare è continua in ζ, quindi deve valere

$$\lim_{x \to \zeta^+} f(x) = f(\zeta) \geq \xi$$

e quindi $\zeta \in B$, contro il fatto che A e B siano disgiunti.
Sia $\zeta \in B$; allora

$$x \in [a, \zeta[\qquad \longrightarrow \qquad x \in A \qquad \longrightarrow \qquad f(x) \leq \xi \ ;$$

ma f è continua in I ed in particolare è continua in ζ, quindi deve valere

$$\lim_{x \to \zeta^-} f(x) = f(\zeta) \leq \xi$$

e quindi $\zeta \in A$, contro il fatto che A e B siano disgiunti.
Quindi l'ipotesi che ξ non appartenga ad $f(I)$ si è dimostrata assurda. □

Corollario 7.8 (Teorema dei valori intermedi)**.** Sia $f : D \to \mathbb{R}$ con $D \subseteq \mathbb{R}$; dato l'intervallo $I \subseteq D$, se f è continua in I, e assume i valori $c, d \in f(I)$, allora assume anche tutti i valori intermedi fra c e d.

Corollario 7.9 (Teorema di esistenza degli zeri)**.** Sia $f : D \to \mathbb{R}$ con $D \subseteq \mathbb{R}$; dato l'intervallo $I \subseteq D$, se f è continua in I, ed esistono $a, b \in I$ tali che $f(a)f(b) < 0$, allora esiste $\zeta \in]a, b[$ tale che $f(\zeta) = 0$.

Teorema 7.10 (Continuità delle funzioni monotòne)**.** *Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo e sia $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione monotòna; allora f è continua in I se e solo se $f(I)$ è un intervallo.*

Dimostrazione (costruttiva)
Dimostrazione della sufficienza. Segue immediatamente dal teorema 7.7.
Dimostrazione della necessità. Si supponga f monotòna crescente e sia $c \in I$; posto $A = \{f(x) \mid x \in I, x < c\}$, si definisce

$$f(c^-) = \lim_{x \to c^-} f(x) = \sup(A)$$

per cui, per monotonia, vale $f(c^-) \le f(x)$ [teorema 6.4]. Se fosse $f(c^-) < f(c)$ i valori dell'intervallo $]f(c^-), f(c)[$ non sarebbero assunti dalla f contro l'ipotesi che $f(I)$ sia un intervallo; infatti se $x < c$ si ha $f(x) \le f(c^-)$ per definizione di $f(c^-)$, mentre per $x > c$ si ha $f(x) > f(c)$ per monotonia. Quindi non potendo essere $f(c^-) < f(c)$ deve essere $f(c^-) = f(c)$ e quindi f è continua a sinistra in c [definizione 7.2]. Similmente si dimostra che f è continua a destra in c e quindi la funzione risulta continua in c [teorema 7.3].
Analoga è la dimostrazione nel caso che f sia decrescente e si lascia alla cura del lettore studioso. □

Definizione 7.5 (Omeomorfismo)**.** Dati due sottoinsiemi A e B di $\tilde{\mathbb{R}}$ una funzione $f : A \to B$ si dice *omeomorfismo* di A su B se è continua e biettiva e se anche l'inversa $f^{-1} : B \to A$ è continua. In tal caso i due insiemi A e B si dicono *omeomorfi*.

Teorema 7.11 (di Weierstrass)**.** *Data una funzione continua $f : D \to \mathbb{R}$, con D chiuso e limitato, allora $f(D)$ ha massimo e minimo.*

Dimostrazione (costruttiva)
Sia $\lambda = \sup(\{f(x) \mid x \in D\})$, con $\lambda \in \tilde{\mathbb{R}}$ e si consideri una successione $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ che converga a λ e tale che sia, per ogni naturale n, $y_n < \lambda$; ciò è sempre possibile: se λ è finito si prende $y_n = \lambda - 1/n$, se è infinito si prende $y_n = n$.
Poiché $y_n < \lambda$ per ogni n, deve esistere un elemento di D che abbia immagine maggiore di y_n; sia x_n tale elemento, vale quindi $f(x_n) \ge y_n$. Ripetendo questa costruzione per ogni n si definisce una successione di elementi di D $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, con $x_n \in D$. Poiché D è chiuso e limitato è sequenzialmente compatto [teorema 5.45] e quindi esiste una sottosuccessione x_{n_i} convergente ad un elemento c di D. A tale sottosuccessione corrisponde la sottosuccessione $y_{n_i} = f(x_{n_i})$, anch'essa convergente a λ [teorema 5.32], per cui si ha

$$y_{n_i} \le f(x_{n_i}) \le \lambda$$

per il teorema dei due carabinieri [teorema 5.7] vale quindi

$$\lim_{i\to\infty} f(x_{n_i}) = \lambda$$

ma f è continua quindi vale anche [teorema 7.2]

$$\lim_{i\to\infty} f(x_{n_i}) = f(c) \ ,$$

pertanto, per l'unicità del limite [teorema 5.2], si ha

$$f(c) = \lambda \ ;$$

quindi $\lambda \in f(D)$ e quindi è massimo di $f(D)$.
La dimostrazione dell'esistenza del minimo segue simili linee e viene lasciata alla cura del lettore studioso. □

Teorema 7.12. *Data una funzione continua $f : D \to \mathbb{R}$, con D chiuso e limitato, allora $f(D)$ è chiuso e limitato.*

Dimostrazione (costruttiva)
Per il teorema di Weierstrass, $f(D)$ ammette un massimo e un minimo e quindi è limitato, basta pertanto dimostrare che è chiuso. Sia ξ un punto di accumulazione di $f(D)$, si consideri la funzione

$$\phi(x) = [f(x) - \xi]^2$$

che ha come estremo inferiore lo zero. Si osservi che $\phi(x)$ è continua in D poiché composta di funzioni continue, quindi, ancora per il teorema di Weierstrass, $f(D)$ ha un minimo il quale non può che coincidere con l'estremo inferiore; quindi esiste un reale $\zeta \in D$ tale che sia $\phi(\zeta) = 0$, di conseguenza, $f(\zeta) = \xi$; quindi il punto di accumulazione ξ di $f(D)$ appartiene a $f(D)$: Tale dimostrazione potendosi ripetere per ogni punto di accumulazione di $f(D)$, porta a concludere che $f(D)$ contiene tutti i suoi punti di accumulazione e quindi è chiuso. □

Teorema 7.13 (Le funzioni continue mandano segmenti in segmenti)**.** *Data una funzione continua $f : S \to \mathbb{R}$, ove S è un segmento di $\mathbb{R}$, allora anche $f(S)$ è un segmento.*

Dimostrazione (costruttiva)
Se la funzione è costante il teorema è ovvio. Se non è costante, poiché il segmento S è chiuso e limitato, per il teorema di Weierstrass esistono due reali $a, b \in S$ in cui $f(S)$ assume il suo massimo e il suo minimo, vale cioè

$$\min\big(f(S)\big) = f(a) < f(b) = \max\big(f(S)\big) \ .$$

Ma allora la funzione assume tutti i valori intermedi fra $f(a)$ ed $f(b)$ [corollario 7.8] e quindi $[f(a), f(b)] \subseteq f(S)$ e quindi, visto che $f(a)$ ed $f(b)$ sono il minimo ed il massimo di $f(S)$, vale $[f(a), f(b)] = f(S)$. □

Teorema 7.14. *Sia $S \subset \mathbb{R}$ un segmento e sia $f : S \to \mathbb{R}$ una funzione monotòna, allora f è continua se e solo $f(S)$ è un segmento.*

Dimostrazione (costruttiva)
La dimostrazione si muove sulle stesse linee della dimostrazione del teorema 7.10; se ne lasciano i dettagli alla cura del lettore studioso. □

Teorema 7.15. *Sia $f : I \to \mathbb{R}$ continua allora è iniettiva se e solo se è strettamente monotòna in I.*

Dimostrazione (per assurdo)
Condizione sufficiente. Se f è strettamente monotòna è certamente iniettiva.
Condizione necessaria. Siano $x_1, x_2, x_3 \in I$ tali che sia $x_1 < x_2 < x_3$; poiché la funzione è per ipotesi iniettiva $f(x_1), f(x_2), f(x_3)$ sono fra loro distinti; si supponga quindi che, per assurdo, che sia non sia monotòna e sia:

$$f(x_1) < f(x_3) < f(x_2) \ .$$

Si consideri ora un reale y_0 tale che sia $f(x_3) < y_0 < f(x_2)$; è chiaro che vale anche $f(x_1) < y_0 < f(x_2)$; quindi applicando il corollario 7.8 agli intervalli $[x_1, x_2]$ ed $[x_3, x_2]$ si trova che esistono due reali $a \in [x_1, x_2]$ e $b \in [x_2, x_3]$ tali che valga $f(a) = f(b) = y_0$; quindi la funzione non è iniettiva, contro l'ipotesi. □

Teorema 7.16 (Continuità della funzione inversa)**.** *Sia A un intervallo e sia $f : A \to B$ continua e iniettiva allora è un omeomorfismo.*

Dimostrazione (per costruzione)
Se A è un intervallo l'insieme B è un intervallo [teorema 7.7] ed f, essendo iniettiva, è certamente biiettiva; quindi esiste la funzione inversa $f^{-1} : B \to A$; ma la f, essendo continua e iniettiva, è monotòna [teorema 7.15] e quindi anche la f^{-1} è monotòna [teorema 3.2]; ma allora, essendo $f^{-1}(B)$ un intervallo, la f^{-1} è continua [teorema 7.10]. Quindi la funzione $f : A \to B$, essendo continua con inversa continua, è un omeomorfismo. Analoga è la dimostrazione nel caso A sia un segmento. □

Esempio 41 (Una funzione continua biettiva con inversa non continua)**.** Si consideri l'insieme $D = \{x \mid x \in \mathbb{R}, |x| > 1\} \cap \{0\}$, e la funzione $f : D \to \mathbb{R}$ di equazione $f(x) = x - \operatorname{sgn}(x)$; essa è continua, biiettiva e monotòna crescente, ma l'inversa $f^{-1} : \mathbb{R} \to D$ di equazione $f^{-1}(x) = x + \operatorname{sgn}(x)$ è discontinua per $x = 0$.

7.5. Continuità delle funzioni elementari

Teorema 7.17 (Continuità di una funzione costante). *Data una funzione $f : D \to \mathbb{R}$, con $D \subseteq \mathbb{R}$; se $f(x) = k$ per ogni $x \in D$ allora f è continua in D.*

Dimostrazione (costruttiva)
Segue immediatamente dall'analogo teorema sui limiti [teorema 6.13]. □

Teorema 7.18 (Continuità della funzione identità). *La funzione $1_D : D \to D$, con $D \subseteq \mathbb{R}$, di equazione $1_D(x) = x$ è continua in ogni $c \in D$.*

Dimostrazione (costruttiva)
Infatti, per ogni $I[f(c)] = I(c)$, l'implicazione $x \in I(c) \cap D \;\to\; x \in I[f(c)]$ è ovvia. □

Teorema 7.19 (Continuità delle funzioni algebriche intere). *Data una funzione $f : D \to \mathbb{R}$, con $D \subseteq \mathbb{R}$ che sia un polinomio in x; allora f è continua in D.*

Dimostrazione (costruttiva)
È una conseguenza immediata dei teoremi 7.18 e 7.4. □

Teorema 7.20 (Continuità delle funzioni algebriche razionali). *Data una funzione $f : D \to \mathbb{R}$, con $D \subseteq \mathbb{R}$, che sia un rapporto di funzioni polinomiali x; allora f è continua in D.*

Dimostrazione (costruttiva)
È una conseguenza immediata dei teoremi 7.19 e 7.4. □

Teorema 7.21 (Continuità della funzione seno). *La funzione $f : \mathbb{R} \to [-1, 1]$ di equazione $f(x) = \operatorname{sen} x$ è continua in $\mathbb{R}$.*

Dimostrazione (costruttiva)
Usando le formule di prostaferesi, si ha

$$|\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} c| = \left| 2\cos\left(\frac{x+c}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{x-c}{2}\right)\right| \;.$$

Ricordando che per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ valgono le disequazioni $|\cos\alpha| \le 1$ e $|\operatorname{sen}\alpha| \le |\alpha|$, dalla precedente uguaglianza si ottiene

$$|\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} c| \le 2 \cdot 1 \cdot \left|\frac{x-c}{2}\right| = |x-c| \;.$$

Quindi, per ogni $\epsilon > 0$, si ha

$$x \in I(c, \epsilon) \quad \longrightarrow \quad |x-c| < \epsilon \quad \longrightarrow \quad |\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} c| < \epsilon \;;$$

pertanto

$$\lim_{x \to c} \operatorname{sen} x = \operatorname{sen} c \;.$$ □

Teorema 7.22 (Continuità della funzione coseno). *La funzione $f : \mathbb{R} \to [-1, 1]$ avente equazione $f(x) = \cos x$ è continua in $\mathbb{R}$.*

Dimostrazione (costruttiva)
Osservando che $\cos x = \operatorname{sen}(x + \pi/2)$ la dimostrazione è immediata utilizzando i teoremi 7.21 e 7.6. □

Teorema 7.23 (Continuità delle funzioni tangente e cotangente). *Le funzioni $f : D \to \mathbb{R}$, con $D = \{x \mid x \in \mathbb{R}, x \neq (2k+1)\pi/2, k \in \mathbb{Z}\}$, e $g : E \to \mathbb{R}$, con $E = \{x \mid x \in \mathbb{R}, x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$, di equazioni $f(x) = \operatorname{tg} x = \operatorname{sen} x / \cos x$ e $g(x) = \operatorname{cotg} x = 1/\operatorname{tg} x = \cos x / \operatorname{sen} x$, sono continue nei rispettivi domini.*

Dimostrazione (costruttiva)
È una conseguenza immediata dei teoremi 7.21, 7.22 e 7.4. □

Teorema 7.24 (Continuità della funzione radice). *La funzione $f^{-1} : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ di equazione $f^{-1}(x) = \sqrt[n]{x}$ con n pari e la funzione $g^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ di equazione $g^{-1}(x) = \sqrt[n]{x}$ con n dispari sono continue nel loro dominio.*

Dimostrazione (costruttiva)
Per n pari la funzione è l'inversa della funzione potenza $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ di equazione $f(x) = x^n$ che è continua e iniettiva in ogni intervallo di $\mathbb{R}_+$; la funzione radice è quindi continua nel suo dominio [teorema 7.16]. Analoga dimostrazione si ha per n dispari. □

Teorema 7.25 (Continuità della funzione esponenziale). *La funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ di equazione $f(x) = b^x$ è continua in $\mathbb{R}$.*

Dimostrazione (costruttiva)
Si comincia con $b = e$. Per x che tende a c si può supporre che sia $x - c < 1$ e $x - c \neq 0$ e quindi si può applicare la disuguaglianza (5.2) alla funzione e^{x-c}, vale quindi

$$1 + (x - c) < e^{x-c} < \frac{1}{1 - (x - c)} \qquad \longrightarrow \qquad (x - c) < e^{x-c} - 1 < \frac{1}{1 - (x - c)} - 1$$

e quindi

$$x - c < e^{x-c} - 1 < \frac{x - c}{1 - (x - c)}$$

Osservando che i due estremi della doppia disuguaglianza tendono a zero per x che tende a c, per il teorema dei due carabinieri [teorema 6.10] si ha

$$\lim_{x \to c} (e^{x-c} - 1) = 0$$

A questo punto si ha

$$\lim_{x \to c} (e^x - e^c) = e^c \lim_{x \to c} (e^{x-c} - 1) = 0$$

e quindi [teorema 6.2]

$$\lim_{x \to c} e^x = e^c$$

che dimostra la continuità di $f(x) = e^x$. Se $b \neq e$ basta porre $b^x = e^{x \log b}$ e usare la continuità della funzione composta [teorema 7.6]. □

Teorema 7.26 (Continuità della funzione logaritmo). *La funzione $f^{-1} : \mathbb{R}^*_+ \to \mathbb{R}$ di equazione $f^{-1}(x) = \log_b x$ è continua nel suo dominio.*

Dimostrazione (costruttiva)
Usando le proprietà del logaritmo si ha

$$|\log_b x - \log_b c| < \epsilon \qquad \longrightarrow \qquad -\epsilon < \log_b \frac{x}{c} < \epsilon$$

Se $b > 1$ la funzione b^x è crescente e quindi, prendendo l'esponenziale dei tre membri della precedente disuguaglianza doppia, si ha

$$-b^\epsilon < \frac{x}{c} < b^\epsilon \qquad \longrightarrow \qquad -c\, b^\epsilon < x < c\, b^\epsilon$$

cioè x è in un intorno di c come occorreva dimostrare. Si lascia alla cura del lettore studioso la semplice modifica alla dimostrazione nel caso sia $0 < b < 1$. □

Teorema 7.27 (Continuità delle funzioni arcoseno e arcocoseno). *La funzione inversa del seno $f^{-1} : [-1, 1] \to [-\pi/2, \pi/2]$ di equazione $f^{-1}(x) = \operatorname{arcsen} x$ e la funzione inversa del coseno $g^{-1} : [-1, 1] \to [0, \pi]$ di equazione $g^{-1}(x) = \arccos x$ sono continue nel loro dominio.*

Dimostrazione (costruttiva)
La funzione f^{-1} è l'inversa della funzione $f : [-\pi/2, \pi/2] \to [-1, 1]$ di equazione $f(x) = \operatorname{sen} x$ che è continua e iniettiva in $[-\pi/2, \pi/2]$; la funzione arcsen è quindi continua nel suo dominio [teorema 7.16]. La continuità della funzione arccos segue dalla nota formula

$$\arccos x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arcsen} x \; . \qquad \square$$

Teorema 7.28 (Continuità delle funzioni arcotangente e arcocotangente)**.** *La funzione inversa della tangente $f^{-1} : \mathbb{R} \to [-\pi/2, \pi/2]$ di equazione $f^{-1}(x) = \operatorname{arctg} x$ e la funzione inversa della cotangente $g^{-1} : \mathbb{R} \to [0, \pi]$ di equazione $g^{-1}(x) = \operatorname{arccotg} x$ sono continue nel loro dominio.*

Dimostrazione (costruttiva)
La funzione f^{-1} è l'inversa della funzione $f : [-\pi/2, \pi/2] \to \mathbb{R}$ di equazione $f(x) = \operatorname{tg} x$ che è continua e monotòna in $[-\pi/2, \pi/2]$; la funzione arctg è quindi continua nel suo dominio [teorema 7.16]. La continuità della funzione arccotg segue dalla nota formula

$$\operatorname{arccotg} x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x \; . \qquad \square$$

7.6. Due disuguaglianze fondamentali

Teorema 7.29 (Disuguaglianza fondamentale della funzione logaritmo)**.** *Per ogni $x \neq 0, x > -1$ vale la disuguaglianza*

$$\frac{x}{1+x} < \log(1+x) < x \; . \tag{7.1}$$

Dimostrazione (costruttiva)
Si consideri la disuguaglianza $1 + x < e^x$ [teorema 5.30], valida per ogni reale non nullo; si prenda quindi il logaritmo naturale (che, si ricorda, è una funzione crescente) di entrambi i membri, si trova, per $x > -1$,

$$\log(1+x) < x \; .$$

Posto ora

$$x = -\frac{t}{1+t} \qquad , \qquad 1 + x = \frac{1}{1+t}$$

e sostituendo nella disuguaglianza appena trovata, si trova

$$\log\frac{1}{1+t} < -\frac{t}{1+t} \quad \longrightarrow \quad \log(1+t)^{-1} < -\frac{t}{1+t} \quad \longrightarrow \quad -\log(1+t) < -\frac{t}{1+t}$$

e quindi

$$\log(1+x) > \frac{x}{1+x} \; .$$

Pertanto, per $x \neq 0$ e $x > -1$ le disuguaglianze trovate valgono entrambe, che è quanto si doveva dimostrare. $\square$

Teorema 7.30 (Disuguaglianza fondamentale delle funzioni goniometriche)**.** *Per ogni x, inteso in radianti, tale che sia $-\pi/2 < x < \pi/2$, vale*

$$\operatorname{sen} x \leq x \leq \operatorname{tg} x \; , \tag{7.2}$$

le uguaglianze valendo solo per $x = 0$.

Dimostrazione (costruttiva)
Per $x = 0$ la relazione vale come uguaglianza. Sia quindi $x > 0$ e si consideri il settore circolare OAB di raggio r e angolo al centro $2x$, sia C il punto di intersezione delle due tangenti in A e B e D il punto di intersezione del segmento OC con l'arco del settore circolare. Com'è noto dalla geometria elementare, con riferimento alla figura 7.4, il quadrilatero $OADB$ è minore del settore circolare OAB che a sua volta e minore del quadrilatero $OACB$.

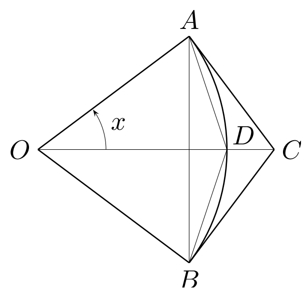


Figura 7.4: La disuguaglianza fra le funzioni goniometriche

Si osservi inoltre che le aree delle tre figure valgono rispettivamente

$$\mathcal{A}_{OADB} = r^2 \operatorname{sen} x \quad , \quad \mathcal{A}_{OAB} = r^2 x$$
$$\mathcal{A}_{OACB} = r^2 \operatorname{tg} x \ .$$

La disuguaglianza fra le tre aree quindi diventa

$$r^2 \operatorname{sen} x < r^2 x < r^2 \operatorname{tg} x$$

da cui segue la tesi. Il caso con $x < 0$ si risolve osservando che le tre funzioni in questione sono dispari. □

7.7. Limiti notevoli

I seguenti teoremi dimostrano alcuni limiti che presentano forme indeterminate ma che sono di fondamentale importanza, tanto da meritare il nome di *limiti notevoli*.

Teorema 7.31. *Vale*

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \ . \tag{7.3}$$

Dimostrazione (costruttiva)
Dalla doppia disuguaglianza dimostrata nel teorema 5.30, valida per $x \neq 0$ e $x < 1$, si ricava, sottraendo 1 ad ogni termine,

$$x < e^x - 1 < \frac{x}{1-x} \ .$$

Quindi, dividendo membro a membro per x si ha

$$1 < \frac{e^x - 1}{x} < \frac{1}{1-x} \qquad \text{per } 0 < x < 1$$
$$\frac{1}{1-x} < \frac{e^x - 1}{x} < 1 \qquad \text{per } x < 0 \ .$$

In entrambi i casi quindi la tesi segue per il teorema dei due carabinieri [teorema 6.10]. □

Teorema 7.32. *Vale*

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1 \ . \tag{7.4}$$

Dimostrazione (costruttiva)
Dalla disuguaglianza fondamentale della funzione logaritmo (7.1), valida per $x \neq 0$ e $x > -1$, dividendo membro a membro per x si ha

$$\frac{1}{1+x} < \frac{\log(1+x)}{x} < 1 \qquad \text{per } x > 0$$
$$1 < \frac{\log(1+x)}{x} < \frac{1}{1+x} \qquad \text{per } -1 < x < 0 \ .$$

In entrambi i casi quindi la tesi segue per il teorema dei due carabinieri [teorema 6.10]. □

Teorema 7.33. *Vale, per ogni numero reale α,*

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha \ . \tag{7.5}$$

Dimostrazione (costruttiva)
Usando una nota proprietà dei logaritmi, il limite si può riscrivere nella forma

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{\alpha \log(1+x)} - 1}{x} =$$
$$= \lim_{x\to 0} \left(\frac{e^{\alpha \log(1+x)} - 1}{\log(1+x)} \cdot \frac{\log(1+x)}{x} \right) = \lim_{x\to 0} \frac{e^{\alpha \log(1+x)} - 1}{\log(1+x)} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)}{x} \ .$$

Il secondo limite vale 1 [equazione (7.4)]; per calcolare il primo conviene fare un cambio di variabile e porre $t = \alpha \log(1+x)$; per x che tende a 0 anche t tende a 0, quindi il primo limite diventa, usando anche l'equazione (7.3),

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{\alpha \log(1+x)} - 1}{\log(1+x)} = \lim_{t\to 0} \frac{e^t - 1}{\dfrac{t}{\alpha}} = \alpha \lim_{t\to 0} \frac{e^t - 1}{t} = \alpha$$

da cui segue la tesi. □

Teorema 7.34. *Vale*

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1 \ . \tag{7.6}$$

Dimostrazione (costruttiva)
Dividendo i tre membri della disuguaglianza (7.2) per $\operatorname{sen} x$ si trova

$$\begin{aligned} &1 < \frac{x}{\operatorname{sen} x} < \frac{1}{\cos x} &&\text{per} \quad 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ &\frac{1}{\cos x} < \frac{x}{\operatorname{sen} x} < 1 &&\text{per} \quad -\frac{\pi}{2} < x < 0 \ . \end{aligned}$$

In entrambi i casi quindi la tesi segue per il teorema dei due carabinieri [teorema 6.10] ed il teorema 6.23. □

Corollario 7.35. Vale

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1 \ . \tag{7.7}$$

Teorema 7.36. *Vale*

$$\lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2} \ . \tag{7.8}$$

Dimostrazione (costruttiva)
Con il cambio variabile $x = 2t$ si trova

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{t\to 0} \frac{1 - \cos 2t}{4t^2} = \lim_{t\to 0} \frac{\operatorname{sen}^2 t}{2t^2} = \frac{1}{2} \lim_{t\to 0} \left(\frac{\operatorname{sen} t}{t} \right)^2$$

da cui segue la tesi grazie all'equazione (7.6), al teorema 6.17 e al corollario 6.22. □

7.8. Altri limiti importanti

Teorema 7.37. *Vale, per ogni numero reale c,*

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{cx}-1}{x} = c \ .$$

Dimostrazione (costruttiva)
Immediato per $c = 0$; per $c \neq 0$ basta calcolare il limite notevole (7.3) con il cambio di variabile $cx = t$. $\square$

Teorema 7.38. *Per ogni $a > 0$ e $a \neq 1$ vale*

$$\lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \log a \ . \tag{7.9}$$

Dimostrazione (costruttiva)
Si ottiene immediatamente dal limite del teorema precedente con $c = \log a$. $\square$

Teorema 7.39. *Per ogni $a > 0$ e $a \neq 1$, vale*

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \frac{1}{\log a} \ . \tag{7.10}$$

Dimostrazione (costruttiva)
Basta ricordare la formula del cambiamento di base e usare (7.4).

$$\log_a(1+x) = \frac{\log(1+x)}{\log a} \ .$$ $\square$

Teorema 7.40. *Per ogni $c > 0$, vale*

$$\lim_{t\to +\infty} \frac{\log x}{x^c} = 0 \ . \tag{7.11}$$

Dimostrazione (costruttiva)
Dalla disuguaglianza (7.1), si trova, per $x > 0$

$$\log x < \log(1+x) < x \qquad \longrightarrow \qquad \log x < x$$

e quindi

$$\log x^{c/2} < x^{c/2} \qquad \longrightarrow \qquad \log x < \frac{2}{c} x^{c/2}$$

dividendo per x^c, si ha, con $x > 1$,

$$0 < \frac{\log x}{x^c} < \frac{2}{c} \cdot \frac{1}{x^{c/2}}$$

la tesi quindi segue per il teorema dei due carabinieri [teorema 6.10]. $\square$

Corollario 7.41. Per ogni $c > 0$ vale

$$\lim_{x\to 0^+} x^c \log x = 0 \ . \tag{7.12}$$

Teorema 7.42. *Per ogni c vale*

$$\lim_{x\to +\infty} (x - c\log x) = +\infty \ . \tag{7.13}$$

Dimostrazione (costruttiva)
Per $c \le 0$ il teorema è ovvio. Per $c > 0$ si ha

$$\lim_{x\to+\infty}(x - c\log x) = \lim_{x\to+\infty}\left[x\left(1 - c\frac{\log x}{x}\right)\right] \ .$$

La tesi segue osservando che la quantità nella parentesi tonda converge a 1 per (7.11). □

Teorema 7.43. *Per ogni c vale*

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^c} = +\infty \ . \tag{7.14}$$

Dimostrazione (costruttiva)
Si ha, utilizzando l'identità $a^b = \exp(b\log a)$,

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^c} = \lim_{x\to+\infty}(x^{-c}e^x) = \lim_{x\to+\infty} e^{-c\log x}e^x = \lim_{x\to+\infty}\exp(x - c\log x) \ .$$

La tesi segue quindi usando (7.13). □

Corollario 7.44. Vale

$$\lim_{x\to+\infty} x^c e^{-x} = 0 \ . \tag{7.15}$$

7.9. Funzioni iperboliche

Si introducono qui certe funzioni, costruite mediante combinazioni della funzione esponenziale, dette *iperboliche*, che sono solitamente elencate nel numero delle funzioni elementari.

Definizione 7.6 (Seno iperbolico e coseno iperbolico)**.** Le funzioni $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ di equazioni

$$f(x) = \operatorname{senh} x \equiv \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad , \qquad g(x) = \cosh x \equiv \frac{e^x + e^{-x}}{2} \tag{7.16}$$

si dicono, rispettivamente, *seno iperbolico* e *coseno iperbolico.*

È immediato verificare che $\operatorname{senh} x$ è una funzione dispari, mentre $\cosh x$ è una funzione pari.

Teorema 7.45. *Per ogni x reale, valgono le identità*

$$\cosh x \pm \operatorname{senh} x = e^{\pm x} \tag{7.17}$$

$$\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x = 1 \quad . \tag{7.18}$$

Dimostrazione (costruttiva)
Segue immediatamente dalla definizione 7.6. □

In particolare, la seconda delle precedenti identità mostra che le

$$x = \cosh t \qquad , \qquad y = \operatorname{senh} t$$

sono equazioni parametriche dell'iperbole equilatera di equazione $x^2 - y^2 = 1$ esattamente allo stesso modo in cui le $x = \cos\alpha$, $y = \operatorname{sen}\alpha$ sono equazioni parametriche della circonferenza di equazione $x^2 + y^2 = 1$. Questa è l'origine dell'aggettivo 'iperboliche' assegnato a queste funzioni. La similitudine con le funzioni goniometriche (che, si ricorda, sono anche dette *funzioni circolari*) si estende anche alle seguenti formule di addizione e sottrazione.

Teorema 7.46 (Formule di addizione e sottrazione). *Per ogni a, b reali, valgono le identità*

$$\operatorname{senh}(a \pm b) = \operatorname{senh} a \cosh b \pm \cosh a \operatorname{senh} b \tag{7.19}$$

$$\cosh(a \pm b) = \cosh a \cosh b \pm \operatorname{senh} a \operatorname{senh} b \quad . \tag{7.20}$$

Dimostrazione (costruttiva)
Segue immediatamente dalla definizione 7.6. □

Questa relazione con le funzioni goniometriche suggerisce la definizione della tangente e della cotangente iperboliche.

Definizione 7.7 (Tangente e cotangente iperboliche). Le funzioni $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ di equazioni

$$f(x) = \tanh x \equiv \frac{\operatorname{senh} x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \tag{7.21}$$

$$g(x) = \coth x \equiv \frac{\cosh x}{\operatorname{senh} x} = \frac{1}{\tanh x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} \tag{7.22}$$

si dicono, rispettivamente, *tangente e cotangente iperbolica.*

È immediato verificare che sono entrambe funzioni dispari; anche per esse esistono formule di addizione e sottrazione.

Teorema 7.47. *Per ogni a, b reali valgono le identità*

$$\tanh(a \pm b) = \frac{\tanh a \pm \tanh b}{1 \pm \tanh a \tanh b} \tag{7.23}$$

$$\coth(a \pm b) = \frac{1 \pm \coth a \coth b}{\coth a \pm \coth b} \quad . \tag{7.24}$$

Dimostrazione (costruttiva)
Segue immediatamente dalla definizione 7.7. □

Teorema 7.48. *Per la funzione $f(x) = \operatorname{senh} x$ valgono le seguenti proprietà.*
1. $\operatorname{senh} x \geq 0$ *per* $x \geq 0$*;*
2. $\operatorname{senh} x$ *è strettamente crescente;*
3. $\operatorname{senh} x$ *è continua per ogni x reale e valgono i limiti*

$$\lim_{x \to \pm\infty} \operatorname{senh} x = \pm\infty \quad . \tag{7.25}$$

Dimostrazione (costruttiva)
1. Per $x = 0$ si ha immediatamente $\operatorname{senh} 0 = 0$; per $x \neq 0$ si ha

$$\operatorname{senh} x > 0 \quad \longrightarrow \quad \frac{e^x - e^{-x}}{2} > 0 \quad \longrightarrow \quad e^x > e^{-x} \quad \longrightarrow \quad e^{2x} > 1 \quad \longrightarrow \quad x > 0 \; .$$

2. Dalle formule di addizione e sottrazione si trova (con un po' di algebra che si lascia alla cura del lettore studioso, il quale si gioverà dell'analoga dimostrazione nota per le funzioni goniometriche)

$$\operatorname{senh} b - \operatorname{senh} a = 2 \operatorname{senh} \frac{b-a}{2} \cosh \frac{a+b}{2} \; .$$

Osservando che la funzione $\cosh x$ è positiva per ogni x reale in quanto è somma di funzioni positive, e usando il risultato del numero 1, si trova

$$a < b \quad \longrightarrow \quad \operatorname{senh} a < \operatorname{senh} b \; .$$

3. Risultato immediato. □

Teorema 7.49. *Per la funzione* $f(x) = \cosh x$ *valgono le seguenti proprietà.*
1. $\cosh x > 0$ *per ogni* x *reale;*
2. $\cosh x$ *è strettamente crescente per* $x > 0$ *e strettamente decrescente per* $x < 0$*;*
3. $\cosh x$ *è continua per ogni* x *reale e valgono i limiti*

$$\lim_{x\to\pm\infty} \cosh x = +\infty \ . \tag{7.26}$$

Dimostrazione (costruttiva)
1. La funzione $\cosh x$ è somma di due funzioni positive e quindi è positiva.
2. Dalle formule di addizione e sottrazione si trova

$$\cosh b - \cos a = 2 \operatorname{senh} \frac{b-a}{2} \operatorname{senh} \frac{a+b}{2} \ ;$$

quindi, usando le proprietà viste sopra della funzione senh, si trova

$$0 < a < b \quad \longrightarrow \quad \cosh a < \cosh b$$

e quindi la funzione è strettamente crescente per $x > 0$. Inoltre, ricordando che si tratta di una funzione pari, per $0 < a < b$ si ha

$$-b < -a < 0 \quad \longrightarrow \quad \cosh(-a) = \cosh a < \cosh b = \cosh(-b)$$

e quindi la funzione è strettamente decrescente per $x < 0$.
3. Risultato immediato. □

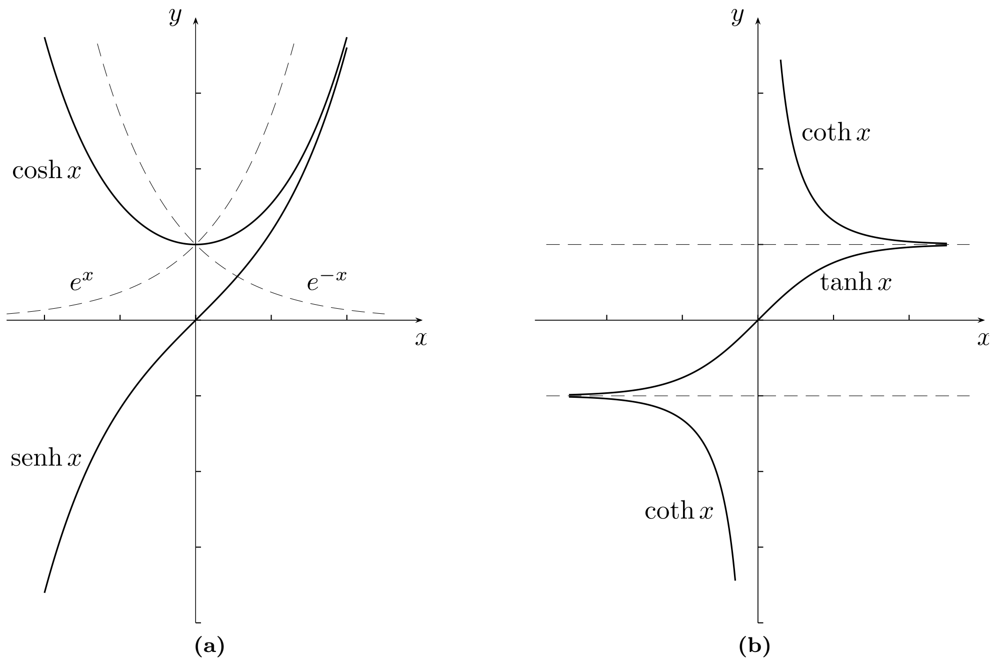


Figura 7.5: Grafici delle funzioni iperboliche.

I grafici delle funzioni $\operatorname{senh} x$ e $\cosh x$ sono riportati in figura 7.5a ove, per confronto, sono stati riportati, tratteggiati, anche i grafici delle funzioni e^x e e^{-x}.

Teorema 7.50. *Per la funzione* $f = \tanh x$ *valgono le seguenti proprietà.*
1. $\tanh x \geq 0$ *per* ≥ 0*;*
2. $\tanh x$ *è strettamente crescente ;*
3. $\tanh x$ *è continua per ogni* x *reale e valgono i limiti*

$$\lim_{x\to\pm\infty} \tanh x = \pm 1 \ .$$

Dimostrazione (costruttiva)
1. Segue direttamente dalle analoghe proprietà delle funzioni $\operatorname{senh} x$ e $\cosh x$.
2. Dalle formule di addizione e sottrazione si trova

$$\tanh b - \tanh a = \frac{\operatorname{senh}(b-a)}{\cosh a \cosh b} \ ;$$

quindi, utilizzando, la crescenza della funzione $\operatorname{senh} x$, si trova

$$a < b \qquad \longrightarrow \qquad \tanh a < \tanh b$$

e quindi $\tanh x$ risulta strettamente crescente.
3. La continuità è ovvia; il limite è immediato.

Teorema 7.51. *Per la funzione $f = \coth x$ valgono le seguenti proprietà.*
1. $\coth x \geq 0$ *per* ≥ 0*;*
2. $\coth x$ *è strettamente decrescente per* $x < 0$ *e per* $x > 0$*;*
3. $\coth x$ *è continua per ogni reale* $x \neq 0$ *e valgono i limiti*

$$\lim_{x \to 0^{\pm}} \coth x = \pm\infty \qquad , \qquad \lim_{x \to \pm\infty} \coth x = \pm 1 \ .$$

Dimostrazione (costruttiva)
1. Segue direttamente dalle analoghe proprietà delle funzioni $\operatorname{senh} x$ e $\cosh x$.
2. Dalle formule di addizione e sottrazione si trova

$$\coth b - \coth a = \frac{\operatorname{senh}(a-b)}{\operatorname{senh} a \operatorname{senh} b} \ ;$$

quindi, utilizzando, la crescenza della funzione $\operatorname{senh} x$, si trova

$$a < b < 0 \quad \longrightarrow \quad \coth a > \coth b \qquad \text{e} \qquad 0 < a < b \quad \longrightarrow \quad \coth a > \coth b$$

e quindi $\coth x$ risulta strettamente decrescente sia per $x < 0$ che per $x > 0$.
3. La continuità in $x \neq 0$ è ovvia; i limiti sono immediati.

I grafici delle funzioni $\tanh x$ e $\coth x$ sono riportati in figura 7.5b.
Le funzioni $\operatorname{senh} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $\tanh : \mathbb{R} \to \,]-1, 1[$ sono strettamente monotòne crescenti, sono quindi iniettive, inoltre i limiti all'infinito calcolati nei teoremi precedenti garantiscono la suriettività pertanto ammettono inversa. Per determinare l'equazione delle due inverse basta invertire le equazioni funzionali e scambiare x con y, come illustrato nella sezione 3.2.
Per la funzione senh, moltiplicando l'equazione $y = (e^x - e^{-x})/2$ per e^x, si trova

$$e^{2x} - 2ye^2 - 1 = 0 \qquad \longrightarrow \qquad e^x = y + \sqrt{y^2+1} \qquad \longrightarrow \qquad x = \log\left(y + \sqrt{y^2+1}\right) \ ;$$

si può quindi identificare la funzione inversa $\operatorname{settsenh} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, detta funzione *settore seno iperbolico*, di equazione

$$\operatorname{settsenh} x = \log\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) \ . \tag{7.27}$$

Per la funzione tanh, si trova

$$y = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \qquad \longrightarrow \qquad e^{2x} = \frac{1+y}{1-y} \qquad \longrightarrow \qquad x = \frac{1}{2} \log\left(\frac{1+y}{1-y}\right) \ ;$$

si può quindi identificare la funzione inversa $\operatorname{setttanh} :]-1, 1[\to \mathbb{R}$, detta funzione *settore tangente iperbolica*, di equazione

$$\operatorname{setttanh} x = \frac{1}{2} \log \frac{1+x}{1-x} \ . \tag{7.28}$$

La funzione $\cosh : \mathbb{R} \to \{x \mid x \in \mathbb{R}, x \geq 1\}$ è suriettiva ma, essendo pari, non è iniettiva; si può renderla iniettiva, e quindi invertibile, definendo la restrizione di cosh ai reali non negativi:

$\cosh_{|\mathbb{R}_+} : \mathbb{R}_+ \to \{x \mid x \in \mathbb{R}, x \geq 1\}$. Per determinare l'equazione dell'inversa si procede in modo simile a come fatto per senh fino a trovare la funzione inversa settcosh : $\{x \mid x \in \mathbb{R}, x \geq 1\} \to \mathbb{R}_+$, detta funzione *settore coseno iperbolico*, di equazione

$$\operatorname{settcosh} x = \log\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\,\right) . \tag{7.29}$$

La funzione coth : $\mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ è iniettiva ma non suriettiva; anche in questo caso la situazione si risolve per mezzo della restrizione $\coth_{|\mathbb{R}^*_+} \to \{x \mid x \in \mathbb{R}, x > 1\}$. Per determinare l'equazione dell'inversa si procede in modo simile a come fatto per tanh fino a trovare la funzione inversa settcoth : $\{x \mid x \in \mathbb{R}, x > 1\}$), detta funzione *settore cotangente iperbolica*, di equazione

$$\operatorname{settcoth} x = \frac{1}{2} \log \frac{x+1}{x-1} . \tag{7.30}$$

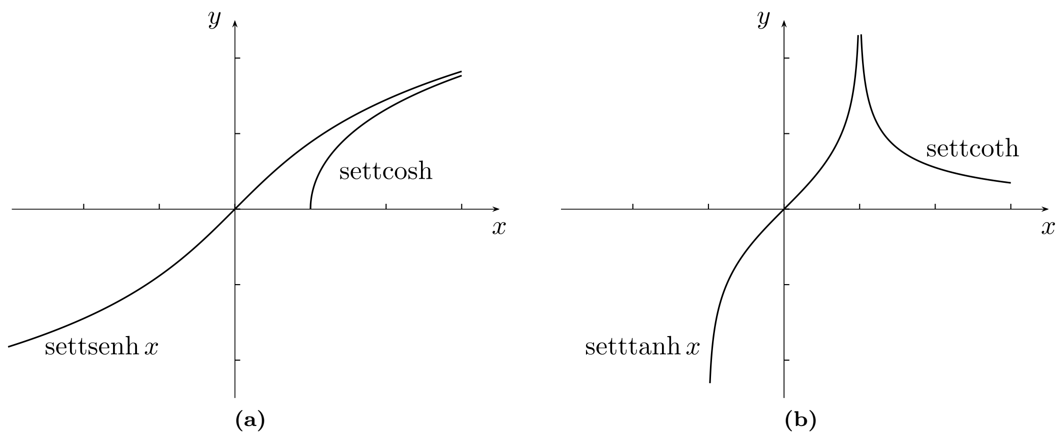


Figura 7.6: Grafici delle funzioni iperboliche inverse.

7.10. Confronto locale fra funzioni

Si illustra qui un metodo di confronto fra funzioni che semplifica molto il calcolo di certi limiti.

Definizione 7.8 (o piccolo)**.** Siano $f, g : D \in \mathbb{R}$ due funzioni definite in un intorno di $c \in \tilde{\mathbb{R}}$ tranne, al piú, in c allora si dice che f è 'o piccolo' di g, per x tendente a c, e si denota con il simbolo

$$f = o_c(g) ,$$

se esiste una funzione σ, infinitesima per x che tende a c, tale che esista un intorno $I(c)$ per il quale si abbia

$$x \in I(c) \cap D \setminus \{c\} \qquad \longrightarrow \qquad f(x) = \sigma(x) g(x) .$$

Vale il seguente teorema.

Teorema 7.52. *Se $f, g : D \in \mathbb{R}$ sono definite in un intorno di $c \in \tilde{\mathbb{R}}$ nel quale $g(x)$ non è mai nulla, allora $f(x) = o_c(g)$ se e solo se*

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = 0 .$$

Dimostrazione (costruttiva)
Segue immediatamente dalla definizione 7.8. □

Se $f = o_c(g)$ ed f e g sono entrambe infinitesime in c si dice che, per x che tende a c, f è *infinitesimo di ordine superiore* rispetto a g; se invece sono entrambe infinite si dice che f, per x che tende a c, f è infinito di ordine inferiore rispetto a g.
Se $f = o_c(g)$ si usa dire che f è *trascurabile* rispetto a g in c. Il motivo di tale espressione è illustrato dal seguente teorema.

Teorema 7.53 (Principio di eliminazione). *Siano $f, f_1, g, g_1 : D \to \mathbb{R}$ funzioni definite in un intorno $I(c)$ e si supponga che f e g siano non nulle in $I(c) \cap D$ e che $f_1 = o_c(f)$ e $g_1 = o_c(g)$ allora*

$$\lim_{x\to c} \frac{f(x) + f_1(x)}{g(x) + g_1(x)} = \lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)}$$

nel senso che il primo limite esiste se e solo se esiste il secondo e in tal caso sono uguali.

Dimostrazione (costruttiva)
Si noti che vale

$$\frac{f(x) + f_1(x)}{g(x) + g_1(x)} = \frac{f(x)}{g(x)} \cdot \frac{1 + \dfrac{f_1(x)}{f(x)}}{1 + \dfrac{g_1(x)}{g(x)}}$$

e quindi la tesi segue dal teorema 7.52. □

Esempio 42. Si consideri il limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{2x^3 - 3x}{5x^2 + 2x} .$$

Per x che tende a 0, vale $2x^3 = o_0(-3x)$ e $5x^2 = o_0(2x)$ quindi si ha

$$\lim_{x\to 0} \frac{2x^3 - 3x}{5x^2 + 2x} = \lim_{x\to 0} \frac{-3x}{2x} = -\frac{3}{2} ,$$

in accordo con il teorema 6.35.

Definizione 7.9 (Asintoticità). Siano $f, g : D \to \mathbb{R}$ due funzioni definite in un intorno di $c \in \tilde{\mathbb{R}}$ si dice che f è *asintotica* a g per x che tende a c, e si scrive

$$f \sim_c g ,$$

se $f - g = o_c(g)$.

Teorema 7.54. *Se g è non nulla in un intorno di c allora $f \sim_c g$ se e solo se*

$$\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = 1 .$$

Dimostrazione (costruttiva)
Se $f - g = o_c(g)$ allora esiste una funzione σ, infinitesima in c tale che sia

$$f(x) - g(x) = \sigma(x)g(x) \qquad \longrightarrow \qquad \frac{f(x)}{g(x)} = 1 + \sigma$$

e quindi f/g tende a 1.
Se, viceversa, f/g tende a 1, basta porre $\sigma = f/g - 1$, che è infinitesima, per avere subito

$$\sigma(x)g(x) = f(x) - g(x)$$

e quindi $f - g = o_c(g)$. □

Corollario 7.55. Condizione necessaria e sufficiente affinché si abbia

$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)} = \ell\ ,$$

con ℓ reale non nullo, è che sia $f \sim_c \ell g$.

Definizione 7.10. Siano $f, g : D \to \mathbb{R}$ due funzioni definite in un intorno di $c \in \tilde{\mathbb{R}}$ si dice che f e g sono dello stesso ordine per x che tende a c se vale

$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)} = \ell\ ,$$

con ℓ reale non nullo.
Equivalentemente, f e g sono dello stesso ordine per x che tende a c se esiste un reale ℓ non nullo per il quale si abbia $f \sim_c \ell g$.

Esempio 43. Da limiti noti seguono immediatamente le seguenti relazioni di asintoticità per $x = 0$

$$\operatorname{sen} x \sim_0 x \quad , \quad \cos x \sim_0 1 - \frac{1}{2}x^2$$

$$e^x \sim_0 1 + x \quad , \quad \log(1+x) \sim_0 x \quad , \quad (1+x)^\alpha \sim_0 1 + \alpha x \quad .$$

Esempio 44. Com'è immediato verificare, per le funzioni iperboliche valgono le seguenti relazioni di asintoticità all'infinito

$$\operatorname{senh} x \sim_{+\infty} \frac{1}{2}e^x \qquad , \qquad \cosh x \sim_{+\infty} \frac{1}{2}e^x$$

$$\operatorname{senh} x \sim_{-\infty} -\frac{1}{2}e^{-x} \qquad , \qquad \cosh x \sim_{-\infty} \frac{1}{2}e^{-x}\ .$$

Teorema 7.56 (Principio di sostituzione)**.** *Siano $f, g, h, k : D \to \mathbb{R}$ funzioni definite in un intorno di $c \in \tilde{\mathbb{R}}$ e valgano le relazioni di asintoticità $f \sim_c h$ e $g \sim_c k$ allora si ha*

$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to c}\frac{h(x)}{k(x)}$$

nel senso che il primo limite esiste se e solo se esiste il secondo ed, in tal caso, sono uguali.

Dimostrazione (costruttiva)
Si consideri l'identità

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)}{h(x)}\frac{h(x)}{k(x)}\frac{k(x)}{g(x)}\ ;$$

ricordando i teoremi 6.20 e 6.21, si trova immediatamente la tesi. □

Esempio 45. Si consideri il limite

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x - 1}{\operatorname{tg} x} = \lim_{x\to 0}\frac{e^x - 1}{\operatorname{sen} x}\cos x\ .$$

Poiché vale la relazione di asintoticità $\operatorname{sen} x \sim_0 x$, e ricordando che, per x che tende a 0, $\cos x$ tende a zero, si trova

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x - 1}{\operatorname{tg} x} = \lim_{x\to 0}\frac{e^x - 1}{x} = 1\ .$$

Si faccia attenzione. Il principio di sostituzione funziona solo nel rapporto fra funzioni come illustra l'esempio seguente

Esempio 46. Non è lecito usare la relazione di asintoticità per sostituire un addendo di un numeratore o di un denominatore; si considerino i due limiti seguenti, ove il secondo si ottiene dal primo sostituendo alla funzione $\operatorname{sen} x$ la funzione x ad essa asintotica per $x = 0$:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x - x}{x^3} \qquad , \qquad \lim_{x\to 0} \frac{x - x}{x^3} \ .$$

Essi non sono uguali: il secondo è evidentemente nullo, mentre il primo, come si vedrà in un capitolo successivo [esempio 62], vale 1/6.

Quanto visto finora, consente di costruire una utilissima scala gerarchica fra funzioni confrontando ciascuna funzione con una potenza di x.

Definizione 7.11 (Ordine di infinitesimo)**.** La funzione $f : D \to \mathbb{R}$ definita in un intorno di $c \in \tilde{\mathbb{R}}$ si dice infinitesimo di ordine minore, uguale o maggiore di r, con $r \in \mathbb{R}$, se valgono rispettivamente

$$\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{|x-c|^r} = \infty \quad , \quad \lim_{x\to c} \frac{f(x)}{|x-c|^r} = \ell \quad , \quad \lim_{x\to c} \frac{f(x)}{|x-c|^r} = 0 \ ,$$

ove ℓ è un reale non nullo.

In altre parole $f(x)$ è infinitesima di ordine minore di r in c se vale $|x-c|^r = o_c(f)$; è infinitesima di ordine r in c se vale $f(x) \sim_c |x-c|^r$; è infinitesima di ordine maggiore di r se vale $f = o_c(|x-c|^r)$.

Esempio 47. Le funzioni $\operatorname{sen} x$, $e^x - 1$, $\log(1 + x)$ sono infinitesimi di ordine 1 in 0; la funzione $\cos x - 1$ è infinitesima di ordine 2 in 0; la funzione e^x è infinito di ordine superiore di r per ogni r reale, equazione (7.14); la funzione $\log(x)$ è infinito di ordine minore di r per ogni r reale, equazione (7.11).

Definizione 7.12 (Ordine di infinito)**.** La funzione $f : D \to \mathbb{R}$ definita in un intorno di $c \in \tilde{\mathbb{R}}$ si dice infinito di ordine minore, uguale o maggiore di r, con $r \in \mathbb{R}$, se valgono rispettivamente

$$\lim_{x\to c} \left[(x-c)^r \cdot f(x)\right] = 0 \quad , \quad \lim_{x\to c} \left[(x-c)^r \cdot f(x)\right] = \ell \quad , \quad \lim_{x\to c} \left[(x-c)^r \cdot f(x)\right] = \infty \ ,$$

ove ℓ è un reale non nullo.

7.11. Continuità uniforme

Definizione 7.13 (Continuità uniforme)**.** La funzione $f : D \to \mathbb{R}$ si dice *uniformemente continua* in D se per ogni $\epsilon > 0$ esiste un $\delta > 0$ tale per ogni $x_1, x_2 \in D$ valga

$$|x_2 - x_1| < \delta \qquad \longrightarrow \qquad |f(x_2) - f(x_1)| < \epsilon \ .$$

Teorema 7.57 (di Heine-Cantor)**.** *Sia $f : D \to \mathbb{R}$ una funzione continua in D allora se D è chiuso e limitato allora f è uniformemente continua in D.*

Dimostrazione (per assurdo)
Si supponga che esista un reale $\epsilon > 0$ per il quale qualunque sia $\delta = \frac{1}{n}$, con n naturale non nullo, esistono due punti $x_n, y_n \in D$ tali che sia

$$|y_n - x_n| < \delta \qquad \text{e} \qquad |f(y_n) - f(x_n)| > \epsilon \ .$$

Al variare di n i due punti x_n e y_n individuano due successioni. Essendo D chiuso e limitato è anche sequenzialmente compatto [teorema 5.45] e quindi ciascuna delle due successioni $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ammette una sottosuccessione convergente in D [definizione 5.19]. Siano $\{x_{n_i}\}_{i\in\mathbb{N}}$ e

$\{y_{n_i}\}_{i\in\mathbb{N}}$ tali sottosuccessioni. Si supponga che la prima converga a $\bar{x}$, allora per ogni $\eta > 0$ esiste un naturale k tale che, per ogni $n > k$, valga

$$|x_{n_i} - \bar{x}| < \eta \ .$$

Ma allora si ha anche, scelto $\zeta = \eta + \frac{1}{n}$,

$$|y_{n_i} - \bar{x}| \leq |y_{n_i} - x_{n_i}| + |x_{n_i} - \bar{x}| < \frac{1}{n} + \eta = \zeta \ .$$

Quindi anche la seconda converge a $\bar{x}$. Ora, poiché f è continua in $[a, b]$ e quindi, in particolare è continua in $\bar{x}$ valgono [teorema 6.5]:

$$\lim_{i\to+\infty} f(x_{n_i}) = \lim_{i\to+\infty} f(y_{n_i}) = f(\bar{x}) \qquad \longrightarrow \qquad \lim_{i\to+\infty} \big[f(y_{n_i}) - f(x_{n_i})\big] = 0 \ ;$$

quindi per la scelta di ϵ esistente per ipotesi assurda si ha che esiste un naturale k tale che, per ogni $n >$ si abbia

$$|f(y_{n_i}) - f(x_{n_i})| < \epsilon \ ,$$

contro l'ipotesi assurda. $\square$

8

DERIVAZIONE DELLE FUNZIONI REALI

8.1. Rapporto incrementale

Per lo studio delle funzioni è importante determinare come varia il valore della funzione $f(x)$ al variare del valore della variabile indipendente x. La variazione media della funzione è descritto dal *rapporto incrementale* definito come segue.

Definizione 8.1 (Rapporto incrementale)**.** Dati la funzione $f : D \to \mathbb{R}$, con $D \subseteq \mathbb{R}$, e il punto $c \in D$ che sia punto di accumulazione di D allora per ogni $x \in D$, $x \neq c$ si definisce *rapporto incrementale* della funzione f relativo ai punti x e c la quantità

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \ .$$

Il rapporto incrementale è quindi il rapporto fra l'incremento Δf della funzione ed il corrispondente incremento Δx della variabile indipendente.

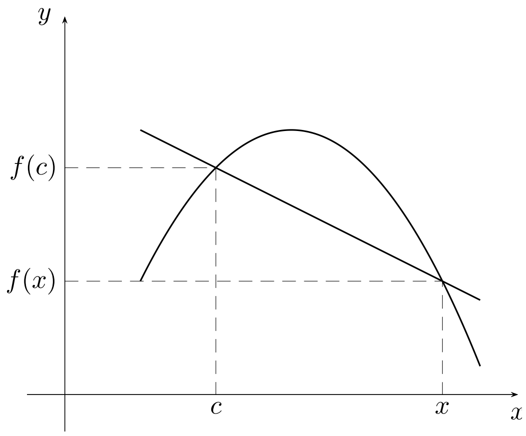


Figura 8.1: Il rapporto incrementale

A volte è utile evidenziare l'incremento della variabile indipendente, in tal caso lo si denota con la lettera h; vale quindi $x - c = h$ e il rapporto incrementale si scrive

$$\frac{f(c + h) - f(c)}{h} \ .$$

L'incremento h può essere sia positivo che negativo.
Geometricamente il rapporto incrementale rappresenta il coefficiente angolare della retta secante il grafico della funzione nei punti di coordinate $\bigl(c, f(c)\bigr)$ e $\bigl(x, f(x)\bigr)$, come rappresentato in figura 8.1.

8.2. Derivata

La variazione media definita dal rapporto incrementale a partire da un dato punto c dipende, oltre che ovviamente da f e da c, anche dall'ampiezza dell'incremento h scelto. Per dare una misura della variazione della funzione in un intorno di c in maniera che sia indipendente dalla scelta dell'incremento si definisce la *derivata* della funzione f in c.

Definizione 8.2 (Derivata)**.** Dati una funzione $f : D \to \mathbb{R}$, con $D \subseteq \mathbb{R}$ ed un punto $c \in D$ che sia di accumulazione per D, si dice che f è *derivabile* in c se esiste finito il limite del rapporto incrementale al tendere a zero dell'incremento della variabile indipendente:

$$f'(c) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \ ; \tag{8.1}$$

in tale caso il limite $f'(c)$ si dice *derivata* di f in c.

Talvolta è conveniente usare una notazione diversa con il cambio di variabile $h = x - c$ e successivamente ponendo x al posto di c; si ha cosí:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \ ; \tag{8.2}$$

il vantaggio di questa notazione è rende immediatamente esplicita la dipendenza da x della derivata. Nel seguito si useranno indifferentemente le due notazioni.

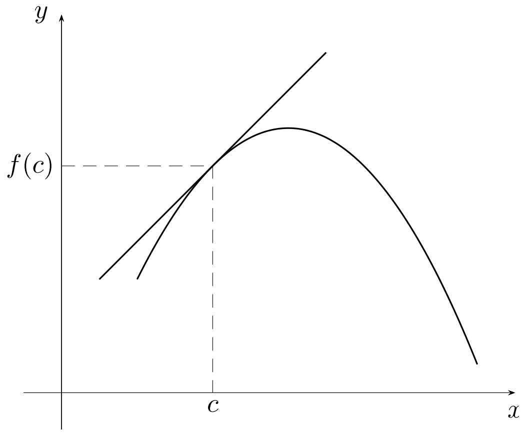


Figura 8.2: Il significato geometrico della derivata di una funzione.

Geometricamente la derivata di una funzione nel punto c rappresenta il coefficiente angolare della retta tangente al grafico della funzione f nel suo punto di coordinate $\big(c, f(c)\big)$, come rappresentato in figura 8.2.
In accordo con quanto detto, si dà la seguente definizione di retta tangente.

Definizione 8.3 (Retta tangente ad una curva)**.** Data la funzione $f : D \to \mathbb{R}$, con $D \subseteq \mathbb{R}$, derivabile in $c \in D$, allora la retta di equazione

$$y = f'(c)(x - c) + f(c)$$

si dice *retta tangente* al grafico della funzione f nel punto $P\big(c, f(c)\big)$.

Usando il linguaggio introdotto già per i limiti di funzione, se non esiste la derivata di una funzione in c possono esistere, diverse, la derivata destra e sinistra della funzione in c.

Definizione 8.4 (Derivata destra e sinistra)**.** Dati una funzione $f : D \to \mathbb{R}$, con $D \subseteq \mathbb{R}$, e un punto $c \in D$ che sia punto accumulazione di D, allora se esistono i limiti

$$f'_-(c) = \lim_{x \to c^-} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \qquad , \qquad f'_+(c) = \lim_{x \to c^+} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

si dicono rispettivamente *derivata sinistra* e *derivata destra* di f in c.

Teorema 8.1. *La funzione f è derivabile in c se e solo se esistono la derivata destra e la derivata in c e sono uguali.*

Dimostrazione (costruttiva)
Segue immediatamente dall'analogo teorema per i limiti [teorema 6.3]. □

Definizione 8.5 (Punto angoloso e cuspide)**.** Se la funzione f ha derivata sinistra e destra finite ma diverse in c, esso si dice *punto angoloso.* Se le derivate sinistra e destra sono infinite e di segno opposto in c esso si dice *cuspide.*

Teorema 8.2. *Se la funzione $f : D \to \mathbb{R}$ è derivabile in c, esiste una funzione σ, infinitesima per x che tende a c, o per h che tende a zero, per la quale vale*

$$f(x) - f(c) = f'(c)(x - c) + \sigma(x)(x - c) \quad o \quad f(x + h) - f(x) = f'(x)h + \sigma(h)h \ . \tag{8.3}$$

Dimostrazione (costruttiva)
Immediata tenendo presente la definizione di derivata e il teorema 7.52. □

La relazione fra continuità e derivabilità di una funzione è illustrata dal seguente teorema.

Teorema 8.3 (La derivabilità implica la continuità)**.** *Sia $f : D \to \mathbb{R}$, con $D \subseteq \mathbb{R}$ una funzione derivabile in $c \in D$; allora f è continua in c.*

Dimostrazione (costruttiva)
Basta scrivere [teorema 6.20]

$$\lim_{x\to c}\big[f(x) - f(c)\big] = \lim_{x\to c}\left[\frac{f(x) - f(c)}{x - c}(x - c)\right] = \lim_{x\to c}\frac{f(x) - f(c)}{x - c}\cdot\lim_{x\to c}(x - c) \ ;$$

se la funzione è derivabile il primo limite è finito; il secondo è nullo; la tesi segue quindi per il teorema 6.2. □

Non vale il viceversa; non è detto che una funzione continua sia derivabile come illustrato dal seguente esempio.

Esempio 48. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ di equazione $f(x) = |x - 2|$; essa è continua per ogni x reale ma non è derivabile per $x = 2$; vale infatti

$$\lim_{x\to 0^\pm}\frac{|x - 2| - |0|}{x - 2} = \pm 1 \ ;$$

le derivate sinistra e destra sono pertanto diverse; la funzione valore assoluto, quindi ha in $x = 0$ un punto angoloso e non è derivabile. Il grafico della funzione f è rappresentato in figura 8.3a

Esempio 49. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ di equazione $f(x) = \sqrt{|x + 1|}$; essa è continua in tutti i punti del dominio e in particolare è continua in $x = -1$, ma non è qui derivabile; vale infatti

$$\lim_{x\to -1^\pm}\frac{\sqrt{|x + 1|} - \sqrt{0}}{x + 1} = \pm\infty \ ;$$

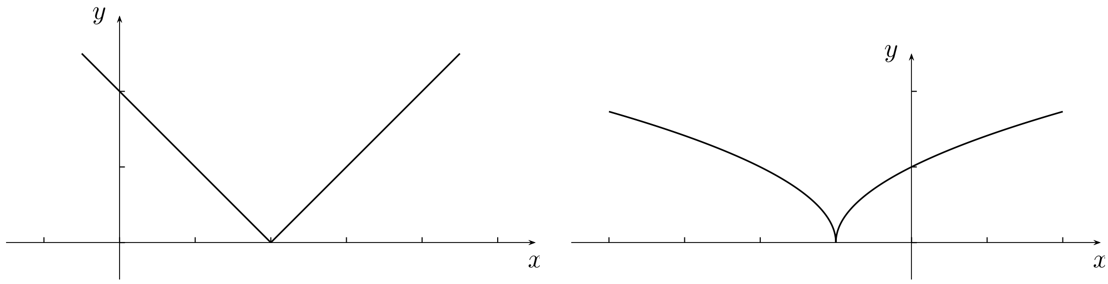
le derivate sinistra e destra sono pertanto infinite con segno opposto; la funzione ha quindi per $x = 0$ un punto di cuspide e non è derivabile. Il grafico della funzione f è rappresentato in figura 8.3b

Definizione 8.6 (Funzione derivata)**.** A tutti i punti $x \in D$ in cui la funzione f è derivabile è possibile associare il numero $f'(x)$; questo definisce una funzione $f' : D' \to \mathbb{R}$ con

$$D' = \big\{x \mid x \in D, \exists\ f'(x)\big\} \ .$$

Tale funzione si dice *funzione derivata* della funzione f.

Per indicare la funzione derivata si utilizza anche la notazione $Df(x)$.



(a) Un punto angoloso (b) Un punto di cuspide

Figura 8.3: Funzioni continue ma non derivabili.

Teorema 8.4 (Derivazione e parità). *Sia $f : D \to \mathbb{R}$, con $D \subseteq \mathbb{R}$ una funzione derivabile in $c \in D$; allora se $f(x)$ è pari la funzione è derivabile anche in $-c$ e vale $f'(-c) = -f'(c)$; se $f(x)$ è dispari allora è derivabile anche in $-c$ e vale $f'(-c) = f'(c)$.*

Dimostrazione (costruttiva)
Sia f una funzione pari e derivabile in $c \in D$, allora vale

$$f'(-c) = \lim_{x \to -c} \frac{f(x) - f(-c)}{x + c} \ ;$$

facendo il cambio di variabile $t = -x$ nel precedente limite, e usando la parità di f, si trova

$$f'(c) = \lim_{t \to c} \frac{f(-t) - f(-c)}{-t + c} = \lim_{t \to c} \frac{f(t) - f(c)}{-t + c} = -\lim_{t \to c} \frac{f(t) - f(c)}{t - c} = -f'(c) \ .$$

Analoga è la dimostrazione nel caso f sia dispari. □

Corollario 8.5. Sia $f : D \to \mathbb{R}$, con $D \subseteq \mathbb{R}$, derivabile in $D' \subseteq D$; allora se f è pari o dispari la funzione derivata $f' : D' \to \mathbb{R}$ è, corrispondentemente dispari o pari.

8.3. Le operazioni razionali e la derivazione

Teorema 8.6 (Derivata di una funzione costante). *Data la funzione costante $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, di equazione $f(x) = k$, con k reale, vale*

$$Dk = 0 \ . \tag{8.4}$$

Dimostrazione (costruttiva)
La dimostrazione è ovvia visto che il rapporto incrementale di una funzione costante è nullo per qualsiasi incremento della variabile indipendente e il limite di una funzione nulla è nullo. □

Teorema 8.7 (Derivata di una somma). *Date due funzioni $f, g : D \to \mathbb{R}$, derivabili entrambe in $x \in D$, allora la funzione somma $f + g$ è derivabile in x e vale*

$$D(f + g)(x) = Df(x) + Dg(x) \ . \tag{8.5}$$

Dimostrazione (costruttiva)
Calcolando il limite del rapporto incrementale si trova, utilizzando il teorema sul limite della somma [teorema 6.14]

$$\begin{aligned} D(f+g)(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{(f+g)(x+h) - (f+g)(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) + g(x+h) - f(x) - g(x)}{h} = \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = Df(x) + Dg(x) \ , \end{aligned}$$

come si doveva dimostrare. □

Teorema 8.8 (Derivata del prodotto per una costante). *Se la funzione $f : D \to \mathbb{R}$ è derivabile in $x \in D$, allora la funzione kf, con k reale, è derivabile in x e vale*

$$D(kf)(x) = kDf(x) \ . \tag{8.6}$$

Dimostrazione (costruttiva)
Calcolando il limite del rapporto incrementale si trova

$$\begin{aligned} D(kf) &= \lim_{h\to 0} \frac{(kf)(x+h) - (kf)(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{kf(x+h) - kf(x)}{h} = k \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \\ &= kDf(x) \ , \end{aligned}$$

come si doveva dimostrare. □

Corollario 8.9 (Linearità della derivazione). Date le funzioni $f_1, \dots f_n : D \to \mathbb{R}$, derivabili in $x \in D$, e le costanti reali $k_1, \dots, k_n$, vale la formula

$$D(k_1 f_1 + \cdots + k_n f_n)(x) = k_1 Df_1(x) + \cdots + k_n Df_n(x) \ ;$$

cioè la derivata di una combinazione lineare di funzioni derivabili è la combinazione lineare delle derivate. La derivazione è quindi un'*operazione lineare*.

Teorema 8.10 (Derivata del prodotto). *Date le funzioni $f, g : D \to \mathbb{R}$, derivabili in $x \in D$, allora la funzione prodotto fg è derivabile in x e vale*

$$D(fg)(x) = (Df)(x)g(x) + f(x)Dg(x) \ . \tag{8.7}$$

Dimostrazione (costruttiva)
Calcolando il limite del rapporto incrementale si trova

$$D(fg)(x) = \lim_{h\to 0} \frac{(fg)(x+h) + (fg)(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} \ .$$

Sommando e sottraendo al numeratore la quantità $f(x)g(x+h)$ si trova

$$\begin{aligned} D(fg)(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x+h) + f(x)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} = \\ &= \lim_{h\to 0} \left[\frac{f(x+h) - f(x)}{h} g(x+h) \right] + f(x) \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = \\ &= (Df)g + fDg \ , \end{aligned}$$

come si doveva dimostrare. □

Teorema 8.11 (Derivata del reciproco). *Data la funzione $f : D \to \mathbb{R}$, derivabile in $x \in D$ e tale che sia $f'(x) \neq 0$, allora la funzione reciproco $1/f$ è derivabile in x e vale*

$$D\left(\frac{1}{f}\right)(x) = -\frac{f'(x)}{f^2(x)} \ . \tag{8.8}$$

Dimostrazione (costruttiva)
Calcolando il limite del rapporto incrementale si trova

$$\begin{aligned} D\left(\frac{1}{f}\right)(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{\left(\frac{1}{f}\right)(x+h) - \left(\frac{1}{f}\right)(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{f(x+h)} - \frac{1}{f(x)}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x) - f(x+h)}{f(x)f(x+h)h} = \\ &= -\lim_{h\to 0} \left[\frac{1}{f(x+h)f(x)} \cdot \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right] = \\ &= -\frac{f'(x)}{f^2(x)} \ , \end{aligned}$$

come si doveva dimostrare. □

Teorema 8.12 (Derivata del rapporto)**.** *Date le funzioni $f, g : D \to \mathbb{R}$, derivabili in $x \in D$ e tale che sia $g'(x) \neq 0$, allora la funzione rapporto f/g è derivabile in x e vale*

$$D\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)} \ . \tag{8.9}$$

Dimostrazione (costruttiva)
Usando (8.7) e (8.8) si trova

$$D\left(\frac{f}{g}\right)(x) = D\left(f \cdot \frac{1}{g}\right)(x) = f'(x)\frac{1}{g(x)} + f(x)\frac{-g'(x)}{g^2(x)} = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)} \ ,$$

come si doveva dimostrare. □

Definizione 8.7 (Funzione segno)**.** Data la funzione $f : X \to Y$ si dice *funzione segno* di f, e si indica con la notazione $\operatorname{sgn}(f) : Y \smallsetminus \{0\} \to \{-1, +1\}$, la funzione definita da

$$\operatorname{sgn}[f(x)] \equiv \frac{f(x)}{|f(x)|} = \begin{cases} +1 & \text{per } f(x) > 0 \\ -1 & \text{per } f(x) < 0 \ . \end{cases}$$

Teorema 8.13 (Derivata del valore assoluto)**.** *Data funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, derivabile in $x \in D$ e tale che sia $f(x) \neq 0$ allora $|f|$ è derivabile in x e vale*

$$D|f|(x) = f'(x) \operatorname{sgn}[f(x)] \ . \tag{8.10}$$

Dimostrazione (costruttiva)
Vale

$$D|f|(x) = \left.\begin{cases} f'(x) & \text{per } f(x) > 0 \\ -f'(x) & \text{per } f(x) < 0 \end{cases}\right\} = \operatorname{sgn}[f(x)]f'(x) \ ,$$

come si doveva dimostrare. □

8.4. Derivata della funzione composta

Teorema 8.14. *Siano $f : X \to Y$ e $g : Y \to \mathbb{R}$, con $X, Y \subseteq \mathbb{R}$, due funzioni e sia f derivabile in $x \in X$ e g derivabile in $f(x) \in Y$; allora la funzione composta $g \circ f$ è derivabile in x e vale*

$$D(g \circ f)(x) = g'[f(x)]f'(x) \ . \tag{8.11}$$

Dimostrazione (costruttiva)
Per la derivabilità della funzione g in $f(x)$ vale, usando (8.3):

$$g[f(x+h) - g[f(x)] = \big[g'[f(x)] + \sigma[f(x)]\big] \cdot [f(x+h) - f(x)]$$

ove la funzione $\sigma[f(x)]$ è infinitesima per h che tende a 0. Allora il rapporto incrementale della funzione composta in x si può scrivere nella forma

$$\frac{(g \circ f)(x+h) - (g \circ f)(x)}{h} = \frac{g[f(x+h)] - g[f(x)]}{h} = \frac{g[f(x+h)] - g[f(x)]}{f(x+h) - f(x)} \cdot \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \ .$$

Sostituendo quanto trovato sopra, si ha

$$\frac{(g \circ f)(x+h) - (g \circ f)(x)}{h} = \big[g'[f(x)] + \sigma[f(x)]\big] \cdot \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

e quindi per h che tende a zero si trova

$$D(g \circ f)(x) = \frac{(g \circ f)(x+h) - (g \circ f)(x)}{h} = g'[f(x)]f'(x) \ .$$ □

Corollario 8.15. Siano $f_1 : X_1 \to X_2$, $f_2 : X_2 \to X_3$, $f_3 : X_3 \to \mathbb{R}$ tre funzioni tali che f_1 sia derivabile in $x \in X_1$, f_2 sia derivabile in $f_1(x)$, f_3 sia derivabile in $f_2[f_1(x)]$; allora la funzione composta $f_3 \circ f_2 \circ f_1$ è derivabile in x e vale

$$D(f_3 \circ f_2 \circ f_1)(x) = f_3'\{f_2[f_1(x)]\} \cdot f_2'[f_1(x)] \cdot f_1'(x) \ . \tag{8.12}$$

Questo corollario si generalizza facilmente ad un numero naturale qualunque di funzioni composte.

8.5. Derivata della funzione inversa

Teorema 8.16 (Derivata della funzione inversa)**.** *Sia $f : D \to \mathbb{R}$ una funzione continua, invertibile con inversa continua, che sia derivabile in $c \in D$ e sia $f'(c) \neq 0$; allora la funzione inversa f^{-1} è derivabile in $w = f(c)$ e vale*

$$Df^{-1}[f(c)] = Df^{-1}(w) = \frac{1}{f'(c)} \ . \tag{8.13}$$

Dimostrazione (costruttiva)
Calcolando il limite del rapporto incrementale della funzione f^{-1} corrispondente all'incremento da $w = f(c)$ a $y = f(x)$, si trova

$$Df^{-1}[f(c)] = Df^{-1}(w) = \lim_{y\to w} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(w)}{y - w} \ .$$

Con il cambio variabile $y = f(x)$ questo limite diventa

$$\lim_{x\to c} \frac{f^{-1}[f(x)] - f^{-1}[f(c)]}{f(x) - f(c)} = \lim_{x\to c} \frac{x - c}{f(x) - f(c)} = \lim_{x\to c} \frac{1}{\dfrac{f(x) - f(c)}{x - c}} = \frac{1}{f'(c)} \ .$$

Se $f'(c) \neq 0$ il limite, quindi, esiste finito solo se la funzione f^{-1} è derivabile in $f(c)$. □

8.6. Derivata delle funzioni elementari

Teorema 8.17 (Derivata di una potenza)**.** *Per ogni reale α vale*

$$Dx^\alpha = \alpha x^{\alpha-1} \ . \tag{8.14}$$

Dimostrazione (costruttiva)
Calcolando il limite del rapporto incrementale si trova

$$Dx^\alpha = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^\alpha - x^\alpha}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{x^\alpha \left[\left(1 + \dfrac{h}{x}\right)^\alpha - 1\right]}{h} \ .$$

Con il cambio di variabile $t = h/x$ si ottiene, ricordando l'equazione (7.5),

$$Dx^\alpha = x^{\alpha-1} \lim_{h\to 0} \frac{(1+t)^\alpha - 1}{t} = \alpha x^{\alpha-1} \ .$$ □

Teorema 8.18 (Derivata dell'esponenziale di base a)**.** *Per ogni reale a, tale che sia $a > 0, a \neq 1$, vale*

$$Da^x = a^x \log a \ . \tag{8.15}$$

Dimostrazione (costruttiva)
Calcolando il limite del rapporto incrementale si trova, utilizzando (7.9)

$$Da^x = \lim_{h\to 0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h} a^x \lim_{h\to 0} \frac{a^h - 1}{h} = a^x \log a \ .$$ □

Corollario 8.19 (Derivata dell'esponenziale di base e)**.** Vale

$$De^x = e^x \ . \tag{8.16}$$

Teorema 8.20 (Derivata del logaritmo naturale)**.** *Per ogni $x > 0$, vale*

$$D \log x = \frac{1}{x} \ . \tag{8.17}$$

Dimostrazione (costruttiva)
Supponendo $|h| < x$, il limite del rapporto incrementale dà

$$D\log x = \lim_{h\to 0}\frac{\log(x+h)-\log x}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\log\left(\frac{x+h}{x}\right)}{h} = \frac{1}{x}\lim_{h\to 0}\frac{\log\left(1+\frac{h}{x}\right)}{\frac{h}{x}} .$$

Con il cambio di variabile $h/x = t$, ricordando il limite notevole (7.4), si ottiene

$$D\log x = \frac{1}{x}\lim_{t\to 0}\frac{1+\log t}{t} = \frac{1}{x} .$$

Dimostrazione alternativa. La funzione di equazione $y = \log x$ è inversa della $x = e^y$, quindi [teorema 8.16]:

$$D\log x = \frac{1}{De^y} = \frac{1}{e^y} = \frac{1}{x} . \qquad \square$$

Corollario 8.21 (Derivata del logaritmo in base a)**.** Per ogni reale a, tale che sia $a > 0, a \neq 1$ e per ogni $x > 0$, vale

$$D\log_a x = \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{\log a} = \frac{1}{x}\log_a e . \tag{8.18}$$

Teorema 8.22 (Derivata del seno e del coseno)**.** *Per ogni x reale valgono*

$$D\,\text{sen}\, x = \cos x \tag{8.19}$$
$$D\cos x = -\,\text{sen}\, x . \tag{8.20}$$

Dimostrazione (costruttiva)
Utilizzando le formule di prostaferesi, si ha

$$D\,\text{sen}\, x = \lim_{h\to 0}\frac{\text{sen}(x+h)-\text{sen}\, x}{h} = \lim_{h\to 0}\left[\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)\frac{\text{sen}(h/2)}{h/2}\right] = \cos x$$
$$D\cos x = \lim_{h\to 0}\frac{\cos(x+h)-\cos x}{h} = -\lim_{h\to 0}\left[\text{sen}\left(x+\frac{h}{2}\right)\frac{\text{sen}(h/2)}{h/2}\right] = -\,\text{sen}\, x ,$$

come si doveva dimostrare. $\square$

Teorema 8.23 (Derivata della tangente e della cotangente)**.** *Per ogni x appartenenti ai rispettivi domini valgono*

$$D\,\text{tg}\, x = \frac{1}{\cos^2 x} \tag{8.21}$$
$$D\,\text{cotg}\, x = -\frac{1}{\text{sen}^2 x} . \tag{8.22}$$

Dimostrazione (costruttiva)
Utilizzando (8.19), (8.20) e (8.9) si ottengono:

$$D\,\text{tg}\, x = D\frac{\text{sen}\, x}{\cos x} = \frac{\cos x\cos x - (-\,\text{sen}\, x)\,\text{sen}\, x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$
$$D\,\text{cotg}\, x = D\frac{\cos x}{\text{sen}\, x} = \frac{-\,\text{sen}\, x\,\text{sen}\, x - \cos x\cos x}{\text{sen}^2 x} = -\frac{1}{\text{sen}^2 x} ,$$

come si doveva dimostrare. $\square$

Teorema 8.24 (Derivata delle funzioni goniometriche inverse). *Per ogni x appartenenti ai rispettivi domini valgono*

$$D\,\mathrm{arcsen}\,x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad D\arccos x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \textit{in }]-1,1[\tag{8.23}$$

$$D\,\mathrm{arctg}\,x = \frac{1}{1+x^2} \qquad D\,\mathrm{arccotg}\,x = -\frac{1}{1+x^2} \qquad \textit{in } \mathbb{R}\ . \tag{8.24}$$

Dimostrazione (costruttiva)
La funzione $f^{-1} : [-1,1] \to [-\pi/2, \pi/2]$ di equazione $y = f^{-1}(x) = \mathrm{arcsen}\,x$ è l'inversa della funzione di equazione $x = f(y) = \mathrm{sen}\,y$; è quindi derivabile ove sia $D\,\mathrm{sen}\,y = \cos y \neq 0$ [teorema 8.16], cioè per $y \neq \pm\pi/2$ e quindi $x \neq \pm 1$; pertanto in $]-1,1[$ la funzione $\mathrm{arcsen}\,x$ è derivabile e vale

$$D(\mathrm{arcsen}\,x) = \frac{1}{D\,\mathrm{sen}\,y} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\mathrm{sen}^2\,y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\ ,$$

ove si è usato il fatto che in $]-\pi/2, \pi/2[$ vale $\cos y > 0$.
Usando l'identità $\arccos x = \pi/2 - \mathrm{arcsen}\,x$ si trova, sempre in $]-1,1[$,

$$D\arccos x = D\left(\frac{\pi}{2} - \mathrm{arcsen}\,x\right) = -D\,\mathrm{arcsen}\,x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\ .$$

La funzione $f^{-1} : \mathbb{R} \to]-\pi/2, \pi/2[$ di equazione $y = f^{-1}(x) = \mathrm{arctg}\,x$ è l'inversa della funzione di equazione $x = f(y) = \mathrm{tg}\,y$; è quindi derivabile ove sia $D\,\mathrm{tg}\,y = 1/\cos^2 y \neq 0$ [teorema 8.16], cioè per ogni x reale; pertanto in $\mathbb{R}$ la funzione $\mathrm{arctg}\,x$ è derivabile e vale

$$D(\mathrm{arctg}\,x) = \frac{1}{D\,\mathrm{tg}\,y} = \frac{1}{\dfrac{1}{\cos^2 y}} = \cos^2 y = \frac{1}{1+\mathrm{tg}^2\,y} = \frac{1}{1+x^2}\ ,$$

ove si è fatto uso dell'identità $\cos^2 y = 1/(1+tg^2 y)$.
Usando l'identità $\mathrm{arccotg}\,x = \pi/2 - \mathrm{arctg}\,x$ si trova infine, sempre in $\mathbb{R}$,

$$D\,\mathrm{arccotg}\,x = D\left(\frac{\pi}{2} - \mathrm{arctg}\,x\right) = -D\,\mathrm{arctg}\,x = -\frac{1}{1+x^2}\ . \qquad \square$$

8.7. Esempi di derivate

Esempio 50. La funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ equazione $f(x) = \mathrm{sen}^2\,x$ è derivabile per ogni x reale; la derivata si può calcolare in due modi:
1. considerando la funzione come prodotto ed utilizzando (8.7):

$$D\,\mathrm{sen}^2\,x = D(\mathrm{sen}\,x \cdot \mathrm{sen}\,x) = \cos x\,\mathrm{sen}\,x + \mathrm{sen}\,x \cos x = 2\,\mathrm{sen}\,x \cos x\ .$$

2. considerando la funzione come composta della funzione seno $g(x) = \mathrm{sen}\,x$ e della funzione potenza, con esponente 2, $h(x) = x^2$, quindi $f(x) = h[g(x)]$; utilizzando (8.11), (8.19) e (8.14) si ha pertanto

$$Df(x) = D[g^2(x)] \cdot Dg(x) = 2g(x) \cdot g'(x) = 2\,\mathrm{sen}\,x \cos x\ .$$

Esempio 51. La funzione $f(x) = \log\sqrt{x^2 - 2x}$ è derivabile in ogni punto del suo dominio $D = \{x \mid x \in \mathbb{R}, x < 0, x > 2\}$; la sua derivata si può calcolare considerando la funzione come composta delle tre funzioni $g(x) = \log x$, $h(x) = \sqrt{x}$, $k(x) = x^2 - 2x$ e utilizzando (8.15) si trova

$$Df(x) = D\log[h[k(x)]] \cdot D\sqrt{k(x)} \cdot Dk(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-2x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^2-2x}} \cdot (2x-2) = \frac{x-1}{x^2-2x}\ .$$

Esempio 52. Si consideri la funzione $f^{-1} : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ di equazione $y = f^{-1}(x) = \sqrt[n]{x}$, con n pari, inversa della funzione $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ di equazione $x = f(y) = y^n$; la f^{-1} è derivabile in tutti i punti in cui sia $Dy^n = ny^{n-1} \neq 0$ cioè per $y \neq 0$ e quindi $x \neq 0$. Pertanto, per $x \neq 0$, vale

$$D\sqrt[n]{x} = \frac{1}{Dy^n} = \frac{1}{ny^{n-1}} = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}} \ .$$

Si arriva alla stessa conclusione osservando che $\sqrt[n]{x} = x^{1/n}$ e utilizzando (8.14):

$$D\sqrt[n]{x} = Dx^{1/n} = \frac{1}{n}x^{1/n-1} = \frac{1}{n}x^{-\frac{n-1}{n}} = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}} \ .$$

Tutto quanto detto vale anche per la funzione radice con indice dispari con la sola differenza che il dominio e il codominio della funzione sono l'intero insieme $\mathbb{R}$.

Esempio 53. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ di equazione

$$f(x) = x^{\operatorname{sen} x} = e^{\log(x^{\operatorname{sen} x})} = e^{\operatorname{sen} x \log x} \ .$$

Essa è derivabile in ogni punto del suo dominio e la derivata si calcola considerando la funzione come composta dell'esponenziale e del prodotto fra il seno e il logaritmo, quindi

$$\begin{aligned} Dx^{\operatorname{sen} x} &= De^{\operatorname{sen} x \log x} = De^{\operatorname{sen} x \log x} \cdot D(\operatorname{sen} x \cdot \log x) = e^{\operatorname{sen} x \log x} \cdot \left(\cos x \log x + \operatorname{sen} x \frac{1}{x}\right) = \\ &= x^{\operatorname{sen} x}\left(\cos x \log x + \frac{\operatorname{sen} x}{x}\right) \ . \end{aligned}$$

Esempio 54 (Derivata delle funzioni iperboliche)**.** Le funzioni iperboliche sono derivabili in ogni punto del loro dominio e valgono

$$\begin{aligned}
D\operatorname{senh} x &= D\frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x \\
D\cosh x &= D\frac{e^x + e^{-x}}{2} = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \operatorname{senh} x \\
D\tanh x &= D\frac{\operatorname{senh} x}{\cosh x} = \frac{\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x}{\cosh^2 x} = \frac{1}{\cosh^2 x} \\
D\coth x &= D\frac{\cosh x}{\operatorname{senh} x} = \frac{-\operatorname{senh}^2 x + \cosh^2 x}{\operatorname{senh}^2 x} = -\frac{1}{\operatorname{senh}^2 x} \\
D\operatorname{settsenh} x &= D\log\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) = \frac{1 + \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x + \sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \\
D\operatorname{settcosh} x &= D\log\left(x + \sqrt{x^2-1}\right) = \frac{1 + \dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}}{x + \sqrt{x^2-1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \\
D\operatorname{setttanh} x &= \frac{1}{2}D\log\frac{1+x}{1-x} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1-x}{1+x}\cdot\frac{1-x+1+x}{(1-x)^2} = \frac{1}{1-x^2} \\
D\operatorname{settcoth} x &= \frac{1}{2}D\log\frac{x+1}{x-1} = \frac{1}{2}\cdot\frac{x-1}{x+1}\cdot\frac{x-1-x-1}{(x-1)^2} = \frac{1}{1-x^2} \ .
\end{aligned}$$

Si faccia attenzione; le ultime due derivate hanno la stessa equazione ma dominio diverso, quindi non sono la stessa funzione.

Nella tabella 8.1 sono riassunte le proprietà di continuità e derivabilità delle principali funzioni elementari.

8.8. Differenziale

Definizione 8.8 (Differenziale)**.** Data la funzione $f : D \to \mathbb{R}$, derivabile in $x \in D$, si dice *differenziale* di f relativamente al punto x all'incremento Δx della variabile indipendente, la quantità

$$df(x) = f'(x)\Delta x \ . \tag{8.25}$$

Teorema 8.25. *Il differenziale della funzione identità $f(x) = x$, per ogni x reale, coincide con l'incremento della variabile indipendente.*

Dimostrazione (costruttiva)
Vale infatti

$$dx = Dx\ \Delta x = \Delta x \ . \qquad \square$$

funzione	dominio D	intervallo di continuità	derivata	intervallo di derivabilità
x^n, n naturale	$\mathbb{R}$	D	$\alpha x^{\alpha-1}$	D
x^α, α non naturale	$\begin{cases} \mathbb{R}_+ & \text{se } \alpha > 0 \\ \mathbb{R}_+^* & \text{se } \alpha < 0 \end{cases}$	D	$\alpha x^{\alpha-1}$	$\begin{cases} \mathbb{R}_+ & \text{se } \alpha > 1 \\ \mathbb{R}_+^* & \text{se } \alpha < 1 \end{cases}$
$\sqrt[n]{x}$, n pari	$\mathbb{R}_+$	D	$\dfrac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$	$\mathbb{R}_+^*$
$\sqrt[n]{x}$, n dispari	$\mathbb{R}$	D	$\dfrac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$	$\mathbb{R}^*$
a^x	$\mathbb{R}$	D	$a^x \log a$	D
$\log_a x$	$\mathbb{R}_+^*$	D	$\dfrac{1}{x \log a} = \dfrac{\log_a e}{x}$	D
$\operatorname{sen} x$	$\mathbb{R}$	D	$\cos x$	D
$\cos x$	$\mathbb{R}$	D	$-\operatorname{sen} x$	D
$\operatorname{tg} x$	$\mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi\right\}$	D	$\dfrac{1}{\cos^2 x}$	D
$\operatorname{cotg} x$	$\mathbb{R} \setminus \{k\pi\}$	D	$-\dfrac{1}{\operatorname{sen}^2 x}$	D
$\operatorname{arcsen} x$	$[-1, 1]$	D	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$]-1, 1[$
$\arccos x$	$[-1, 1]$	D	$-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$]-1, 1[$
$\operatorname{arctg} x$	$\mathbb{R}$	D	$\dfrac{1}{1+x^2}$	D
$\operatorname{arctg} x$	$\mathbb{R}$	D	$-\dfrac{1}{1+x^2}$	D

Tabella 8.1: Riepilogo sulla continuità e derivabilità delle funzioni elementari

Il precedente teorema consente di riscrivere il differenziale di una funzione nella forma

$$df(x) = f'(x)dx \ . \tag{8.26}$$

Questa equazione consente l'introduzione di una comoda notazione, dovuta a Leibniz[1] per la derivata della funzione f.

[1] Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646-1716), filosofo e matematico tedesco.

Definizione 8.9 (Notazione di Leibniz)**.** La derivata di una funzione viene indicata con il simbolo

$$f'(x) = \frac{df}{dx}(x) \ , \tag{8.27}$$

ove il rapporto fra i due differenziali, non essendo definito, è da intendersi in modo esclusivamente formale.

Un modo naturale di utilizzare questa notazione è di riscriverla nel modo seguente

$$f'(x) = \frac{d}{dx} f(x) \ ,$$

considerando d/dx un operatore alla stessa stregua di D.
Ricordando la (8.3) si vede che la variazione Δf di una funzione, in relativamente all'incremento Δx della variabile indipendente, si può scrivere come segue

$$\Delta f(x) = df(x) + \sigma(\Delta x)\Delta x \ ,$$

ove $\sigma(\Delta x)$ è una funzione infinitesima per Δx che tende a zero.

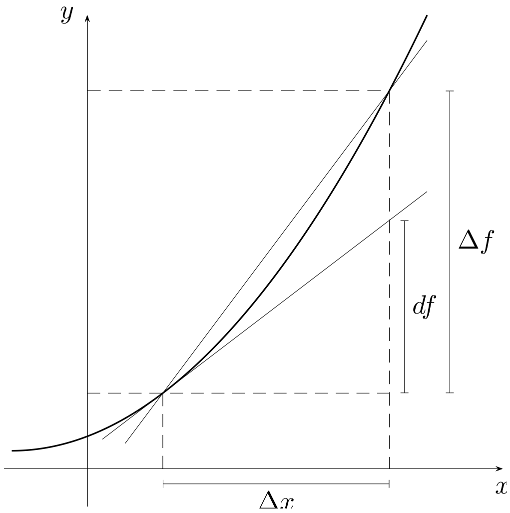


Figura 8.4: Il significato geometrico del differenziale di una funzione

Geometricamente, il differenziale $df(x)$ è il prodotto del coefficiente angolare della retta tangente al grafico della funzione nel punto di ascissa x per l'incremento Δx; si tratta quindi dell'incremento del grafico della retta tangente in corrispondenza dello stesso incremento, come rappresentato in figura 8.4.

8.9. Interpretazioni fisiche della derivata

La derivata di una funzione ha innumerevoli applicazioni in fisica; si può dire anzi che la derivazione, insieme all'integrazione cui è dedicato un successivo capitolo, è il linguaggio naturale delle leggi della fisica. Per illustrare il punto si vedono qui di seguito alcuni esempi.

Esempio 55 (Velocità istantanea)**.** La velocità istantanea è solitamente definita come la velocità media quando l'intervallo di tempo è molto piccolo. Osservando che la velocità media è il rapporto fra lo spazio percorso ed il tempo impiegato a percorrerlo, la velocità istantanea $v(t)$ al tempo t può essere scritta nel modo seguente

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} \ .$$

Si tratta quindi del limite di un rapporto incrementale, cioè della derivata della posizione rispetto al tempo. Utilizzando una notazione dovuta a Newton[2], la derivata temporale si indica ponendo un puntino sopra la grandezza che viene derivata, quindi si ha

$$v(t) = \dot{x}(t) \ .$$

Esempio 56 (Accelerazione). In modo analogo a quanto visto per la velocità istantanea, l'accelerazione è la derivata temporale della velocità, infatti vale

$$a(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v(t + \Delta t) - v(t)}{\Delta t} = \dot{v}(t) = \ddot{x}(t) \ ,$$

dove è stata utilizzata la notazione di Newton per la derivata della derivata.

Esempio 57 (Energia potenziale). Se una forza $\boldsymbol{F}$ è conservativa, il suo lavoro $\mathcal{L}$ è l'opposto della variazione dell'energia potenziale U durante il moto, vale cioè

$$\mathcal{L}_{A \to B} = U(A) - U(B) = -\Delta U \ .$$

In particolare se $\boldsymbol{F}$ è costante si sceglie l'asse delle ascisse nella direzione dello spostamento Δx, si può scrivere

$$\mathcal{L}_{A \to B} = F_x \Delta x \ ,$$

ove F_x è la componente della forza nella direzione dello spostamento. Quindi si ha

$$F_x \Delta x = -\Delta U \qquad \longrightarrow \qquad F_x = -\frac{\Delta U}{\Delta x} \ .$$

Se la forza non è costante questa equazione dà la forza media durante lo spostamento Δx; per avere la forza nella posizione x occorre calcolare il limite del rapporto incrementale, cioè la derivata:

$$F_x(x) = -\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta U}{\Delta x} = -\frac{dU}{dx} \ .$$

Questa ultima relazione chiarisce anche per quale motivo la funzione energia potenziale è definita a meno di una costante additiva; una costante sommata ad U infatti non modifica la forza, e quindi la dinamica del sistema in questione, perché la derivata della costante è nulla.

Esempio 58 (Intensità della corrente elettrica). L'intensità della corrente elettrica $i(t)$ che scorre in un filo conduttore è definita come il rapporto fra la quantità di carica Δq che attraversa una sezione del filo e l'intervallo di tempo in cui tale attraversamento ha luogo. Se l'intensità cosí definita non è costante, è necessario definire il suo valore istantaneo prendendo il limite per Δt che tende a zero e quindi fare la derivata della funzione $q(t)$, cioè

$$i(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{q(t + \Delta t) - q(t)}{\Delta t} = \dot{q}(t) \ .$$

[2] Sir Isaac Newton (1642-1727), scienziato inglese.

9

TEOREMI SULLE FUNZIONI DERIVABILI IN UN INTERVALLO

9.1. Estremi locali ed assoluti

Definizione 9.1 (Estremi assoluti)**.** Data la funzione $f : D \to \mathbb{R}$, si dicono *massimo assoluto* e *minimo assoluto* il massimo ed il minimo, se esistono, dell'immagine $f(D)$ di f. Collettivamente, massimo e minimo assoluti si dicono *estremi assoluti.*

L'esistenza degli estremi assoluti di una funzione è garantita solo se f è continua e D è chiuso e limitato [teorema 7.11].

Definizione 9.2 (Estremi locali)**.** Data la funzione $f : D \to \mathbb{R}$, il punto $c \in D$ si dice di *massimo locale* o di *minimo locale* per f se esiste un intorno $I(c)$ tale che valgano rispettivamente

$$f(x) \le f(c) \qquad , \qquad f(x) \ge f(c) \qquad\qquad \forall\, x \in I(c)\ ;$$

il punto $c \in D$ si dice di *massimo locale stretto* o di *minimo locale stretto* per f se esiste un intorno $I(c)$ tale che valgano rispettivamente

$$f(x) < f(c) \qquad , \qquad f(x) > f(c) \qquad\qquad \forall\, x \in I(c) \smallsetminus \{c\}\ .$$

Collettivamente, i massimi e i minimi locali di f si dicono *estremi locali* di f. A volte gli estremi locali sono anche detti estremi relativi.

Teorema 9.1. *Data la funzione $f : D \to \mathbb{R}$, se il punto c è punto interno di D ed è punto di estremo assoluto, allora è punto di estremo locale.*

Dimostrazione (costruttiva)
Scende immediatamente dalle definizioni di estremi assoluti e locali. □

Teorema 9.2. *Dati la funzione $f : D \to \mathbb{R}$ e $c \in D$ punto di accumulazione per D; allora*
1. se c è punto di massimo locale e se esistono le derivate destra e sinistra in c, valgono

$$f'_-(c) \ge 0 \qquad , \qquad f'_+(c) \le 0\ ;$$

2. se c è punto di minimo locale e se esistono le derivate destra e sinistra in c, valgono

$$f'_-(c) \le 0 \qquad , \qquad f'_+(c) \ge 0\ .$$

Dimostrazione (costruttiva)
1. Se c è punto di massimo locale esiste un intorno $I(c) \subseteq D$ in cui $f(x) \le f(c)$ per ogni x in $I(c)$; quindi vale

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} \ge 0 \qquad \text{per } x \in I(c),\ x < c$$
$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} \le 0 \qquad \text{per } x \in I(c),\ x > c\ .$$

Quindi, se esistono le derivate sinistra e destra in c, e quindi esistono i limiti sinistro e destro del rapporto incrementale, per il teorema del confronto [teorema 6.9], valgono $f'_-(c) \le 0$ e $f'_+(c) \ge 0$.
2. La dimostrazione nel caso c sia punto di minimo locale è analoga a quella per il caso 1, e si lascia alla cura del lettore studioso. □

Corollario 9.3 (Teorema di Fermat[1])**.** Data la funzione $f : D \to \mathbb{R}$, sia $c \in D$ di accumulazione per D un suo punto di estremo locale; allora se f è derivabile in c vale $f'(c) = 0$.

[1] Pierre de Fermat (1601-1665), matematico e magistrato francese.

9.2. Teorema di Rolle

Teorema 9.4 (di Rolle[2])**.** *Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua in $[a, b]$ e derivabile in $]a, b[$; allora se $f(a) = f(b)$ esiste $\xi \in \,]a, b[$ tale che $f'(\xi) = 0$.*

Dimostrazione (costruttiva)
Poiché f è continua nel chiuso e limitato $[a, b]$, la funzione ammette in $[a, b]$ un massimo assoluto M e un minimo assoluto m [teorema 7.11]. Se $m = M$ la funzione è costante in $[a, b]$ e quindi la sua derivata è nulla ovunque in $]a, b[$. Se $M \neq m$, almeno uno dei due estremi assoluti deve essere assunto dalla funzione in un punto interno al segmento $[a, b]$; caso contrario infatti, se fosse per esempio $m = f(a)$ e $M = f(b)$ si avrebbe, per ipotesi, $m = M$ ricadendo nel caso già trattato. Esiste quindi un punto $\xi \in \,]a, b[$ in cui la funzione assume l'estremo assoluto, che in questo caso è anche estremo locale [teorema 9.1]. La tesi quindi segue dal teorema di Fermat [corollario 9.3]. □

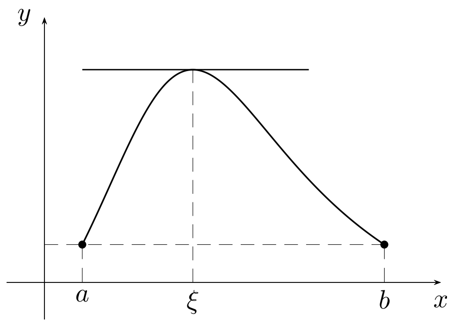


Figura 9.1: Il teorema di Rolle

Dal punto di vista geometrico il teorema di Rolle afferma che esiste un punto interno in cui la tangente al grafico della f ha coefficiente angolare nullo e quindi tale tangente è parallela all'asse delle ascisse, come illustrato in figura 9.1.

Esempio 59. Si consideri la funzione $f : [1, 3] \to \mathbb{R}$ di equazione

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x + 3}{x^2 - 3x + 3} \ ;$$

essa è continua e derivabile in $[1, 3]$ inoltre vale

$$f(1) = f(3) = 2 \ .$$

Sono quindi verificate le ipotesi del teorema di Rolle; la derivata di f è

$$f'(x) = \frac{(2x - 2)(x^2 - 3x + 3) - (2x - 3)(x^2 - 2x + 3)}{(x^2 - 3x + 3)^2} = \frac{-x^2 + 3}{(x^2 - 3x + 3)^2} \ .$$

È immediato verificare che la funzione $f'(x)$ si annulla per $x = \pm\sqrt{3}$; quindi $1 < \xi = \sqrt{3} < 3$.

Il teorema di Rolle ha un'importante conseguenza.

Teorema 9.5. *Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua in $[a, b]$ e derivabile in $]a, b[$ e sia $f'(x) \neq 0$ per ogni $x \in \,]a, b[$, allora f è strettamente monotòna e la sua derivata è strettamente positiva o strettamente negativa.*

Dimostrazione (costruttiva)
La funzione f è iniettiva; infatti se fosse $f(x_1) = f(x_2)$ con $x_1 \neq x_2$, esisterebbe, per il teorema di Rolle, un punto $\xi \in \,]x_1, x_2[$ tale che $f'(\xi) = 0$, contro l'ipotesi. Quindi essendo continua ed iniettiva, f è strettamente monotòna [teorema 7.15]. Si supponga che sia strettamente crescente

[2] Michel Rolle (1652-1718), matematico francese.

allora per ogni $x, c \in \,]a, b[$ si trova che il rapporto incrementale $[f(x) - f(c)]/(x - c)$ è strettamente positivo e quindi il limite di tale rapporto incrementale, che esiste certamente poiché la funzione è supposta derivabile in $]a, b[$, è positivo [teorema 6.9]; la derivata è quindi strettamente positiva. Allo stesso modo si dimostra che la derivata è strettamente negativa se la funzione è strettamente decrescente. $\square$

9.3. Teorema di Lagrange

Teorema 9.6 (Teorema di Lagrange[3]). *Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua in $[a, b]$ e derivabile in $]a, b[$, allora esiste un punto $\xi \in \,]a, b[$ tale che sia*

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \ . \tag{9.1}$$

Dimostrazione (costruttiva)
Si consideri la funzione

$$g(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) \ ;$$

che verifica le ipotesi del teorema di Rolle; è infatti evidentemente continua e derivabile come la f, inoltre vale

$$g(a) = g(b) = f(a) \ ;$$

quindi esiste $\xi \in \,]a, b[$ tale che sia

$$g'(\xi) = 0 \qquad \longrightarrow \qquad f'(\xi) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0 \ ,$$

che è quanto si doveva dimostrare. $\square$

Dal punto di vista geometrico il teorema di Lagrange afferma che esiste un punto interno in cui la tangente al grafico della f è parallela alla retta che passa per i punti di coordinate $\big(a, f(a)\big)$ e $\big(b, f(b)\big)$, come illustrato in figura 9.2.

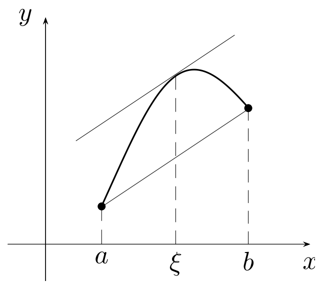


Figura 9.2: Il teorema di Lagrange

Si noti che il teorema di Rolle è un caso particolare del teorema di Lagrange.

Esempio 60. Si consideri la funzione $f : [-4, 2] \to \mathbb{R}$ di equazione

$$f(x) = \sqrt{16 - x^2} \ ;$$

essa è continua in $[-4, 2]$ e derivabile in $]-4, 2[$, sono quindi verificate le ipotesi del teorema di Lagrange; la derivata di f è

$$f'(x) = \frac{-2x}{2\sqrt{16 - x^2}} = \frac{-x}{\sqrt{16 - x^2}} \ ;$$

[3] Joseph-Louis Lagrange (1736-1813), matematico italiano.

inoltre vale
$$\frac{f(2)-f(-4)}{2-(-4)}=\frac{\sqrt{12}-0}{6}=\frac{\sqrt{3}}{3}\ .$$
Quindi il punto ξ previsto dal teorema di Lagrange si trova ponendo
$$\frac{-x}{\sqrt{16-x^2}}=\frac{\sqrt{3}}{3}\qquad\longrightarrow\qquad\sqrt{16-x^2}=-\sqrt{3}x\ .$$
Elevando al quadrato questa equazione, osservando che deve essere $x<0$, si trova
$$\begin{cases}16-x^2=3x^2\\ x<0\end{cases}\qquad\longrightarrow\qquad\begin{cases}4x^2=16\\ x<0\end{cases}\qquad\longrightarrow\qquad x=-2\ .$$
Si può quindi concludere che il punto previsto dal teorema è $\xi=-2$.

Teorema 9.7. *Sia $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ una funzione continua in $[a,b]$ e derivabile in $]a,b[$ e sia $f'(x)=0$ per ogni $x\in\,]a,b[$, allora f è costante in $[a,b]$.*

Dimostrazione (costruttiva)
Per ogni $x\in[a,b]$, si consideri l'intervallo $[a,x]$ nel quale la funzione f verifica le ipotesi del teorema di Lagrange; quindi esiste $\xi\in\,]a,x[$ tale che
$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(\xi)=0\qquad\longrightarrow\qquad f(x)=f(a)\ ;$$
pertanto $f(x)=f(a)$ per ogni $x\in[a,b]$. □

Corollario 9.8. Sia $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ una funzione continua in $[a,b]$ e derivabile in $]a,b[$; condizione necessaria e sufficiente affinché f sia costante in un intervallo contenuto in $[a,b]$ è che abbia derivata nulla in ogni punto di tale intervallo.

Corollario 9.9. Date due funzioni $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ continue in $[a,b]$ e derivabili in $]a,b[$ e sia $f'(x)=g'(x)$ per ogni $x\in\,]a,b[$, allora $f(x)-g(x)$ è costante in $[a,b]$.

Teorema 9.10. *Sia $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ una funzione continua in $[a,b]$ e derivabile in $]a,b[$, allora:*
1a. f è monotòna crescente in $[a,b]$ se e solo se $f'(x)\geq 0$ per ogni $x\in\,]a,b[$;
1b. f è monotòna strettamente crescente in $[a,b]$ se e solo se $f'(x)\geq 0$ per ogni $x\in\,]a,b[$ e l'insieme $A=\{x\mid x\in\,]a,b[,f'(x)=0\}$ è privo di punti interni.
2a. f è monotòna decrescente in $[a,b]$ se e solo se $f'(x)\leq 0$ per ogni $x\in\,]a,b[$;
2b. f è monotòna strettamente decrescente in $[a,b]$ se e solo se $f'(x)\leq 0$ per ogni $x\in\,]a,b[$ e l'insieme $\{x\mid x\in\,]a,b[,f'(x)=0\}$ è privo di punti interni.

Dimostrazione (costruttiva)
1a. Siano $x_1,x_2\in[a,b]$, allora per il teorema di Lagrange esiste $\xi\in\,]x_1,x_2[$ tale che valga
$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=f'(\xi)\ .$$
Allora se $f'(\xi)\geq 0$
$$x_1<x_2\qquad\longrightarrow\qquad f(x_1)\leq f(x_2)$$
e quindi f è monotòna crescente in $[a,b]$.
Viceversa, se f è monotòna crescente in $[a,b]$, ogni rapporto incrementale in $]a,b[$ è positivo o nullo e quindi la derivata di f è positiva o nulla in $]a,b[$ [teorema 6.9].
1b. Se è strettamente crescente allora è crescente, e quindi $f'(x)\geq 0$ per ogni $x\in\,]a,b[$ inoltre non vi sono intervalli in cui f è costante, ma se l'insieme A avesse un punto interno c ci sarebbe un intorno $I(c)$ in cui la derivata è nulla e quindi f sarebbe costante per ogni $x\in I(c)$ [corollario

9.8].
Viceversa se $f'(x) \geq 0$ per ogni $x \in]a,b[$ allora f è monotòna crescente; se poi A non ha punti interni allora f è strettamente crescente, se non lo fosse, infatti, ci sarebbe un intervallo contenuto in $]a,b[$ in cui la funzione è costante ma allora, in tale intervallo, la funzione avrebbe derivata nulla [corollario 9.8] e, quindi, tutti i punti di tale intervallo sarebbero punti interni di A.
2. La dimostrazione è analoga al caso 1 e viene lasciata alla cura del lettore studioso. □

Corollario 9.11. Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua in $[a,b]$ e derivabile in $]a,b[$, allora
1. f è strettamente crescente in $[a,b]$ se per ogni $x \in]a,b[$ si ha $f'(x) > 0$;
2. f è strettamente decrescente in $[a,b]$ se per ogni $x \in]a,b[$ si ha $f'(x) < 0$.

9.4. Teorema di Cauchy

Teorema 9.12 (di Cauchy)**.** *Siano $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ due funzioni continue in $[a,b]$ e derivabili in $]a,b[$ e sia $g'(x) \neq 0$ per ogni $x \in]a,b[$; allora esiste $\xi \in]a,b[$ tale sia*

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \ . \tag{9.2}$$

Dimostrazione (costruttiva)
Vale $g(a) \neq g(b)$; infatti diversamente ci si troverebbe nelle ipotesi del teorema di Rolle e quindi esisterebbe un punto di $]a,b[$ in cui si annulla la derivata di g, contro l'ipotesi fatta. Si consideri dunque la funzione ausiliaria

$$h(x) = [f(b)-f(a)] \cdot [g(x)-g(a)] - [g(b)-g(a)] \cdot [f(x)-f(a)] \ ,$$

continua in $[a,b]$ e derivabile in $]a,b[$ con derivata

$$h'(x) = [f(b)-f(a)]g'(x) - [g(b)-g(a)]f'(x) \ .$$

Inoltre vale

$$h(a) = h(b) = 0 \ ;$$

pertanto sono verificate le ipotesi del teorema di Rolle; quindi esiste un punto $\xi \in]a,b[$ tale che valga

$$h'(\xi) = 0 \quad \longrightarrow \quad [f(b)-f(a)]g'(\xi) - [g(b)-g(a)]f'(\xi) = 0$$

e quindi

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \ ,$$

ove l'ultimo passaggio è possibile grazie al fatto che $g'(x) \neq 0$ in $]a,b[$. □

Si osservi che il teorema di Lagrange è un caso particolare del teorema di Cauchy per $g(x) = x$.

9.5. Teorema di Darboux

Teorema 9.13 (di Darboux[4])**.** *Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua in $[a,b]$ e derivabile in $]a,b[$; allora $f'(\,]a,b[\,)$ è un intervallo.*

Dimostrazione (costruttiva)
Si deve dimostrare che, posto $\alpha = f'_+(a)$ e $\beta = f'_-(b)$, con $\alpha, \beta \in \tilde{\mathbb{R}}$ e $\alpha < \beta$ (la dimostrazione nel caso $\alpha > \beta$ è del tutto analoga), per ogni γ tale che sia $\alpha < \gamma < \beta$ esiste $c \in]a,b[$ tale che sia

[4] Jean Gaston Darboux (1842-1917), matematico francese.

$f'(c) = \gamma$.
Si consideri infatti la funzione ausiliaria

$$g(x) = \gamma x - f(x) \ ;$$

si tratta di una funzione continua in $[a, b]$ e derivabile in $]a, b[$ e la sua derivata è

$$g'(x) = \gamma - f'(x) \ .$$

Valgono le relazioni

$$g'_+(a) = \gamma - f'_+(a) = \gamma - \alpha > 0 \qquad , \qquad g'_-(b) = \gamma - f'_-(b) = \gamma - \beta < 0 \ .$$

Ma g è continua nel chiuso e limitato $[a, b]$ quindi ha, in $[a, b]$ un massimo e un minimo assoluti [teorema 7.11]; ora, essendo $g'_+(a) > 0$, esiste un intorno destro $I_+(a) =]a, a + \epsilon[$ tale che sia [teorema 6.7]

$$\frac{g(x) - g(a)}{x - a} > 0 \qquad \text{per ogni } x \in I_+(a)$$

e quindi, per $x \in I_+(a)$ vale

$$g(x) > g(a)$$

e quindi a non può essere massimo di g.
Inoltre, essendo $g'_-(b) < 0$, esiste un intorno sinistro $I_-(b) =]b - \epsilon, b[$ tale che sia [teorema 6.7]

$$\frac{g(b) - g(x)}{b - x} < 0 \qquad \text{per ogni } x \in I_-(b)$$

e quindi, per $x \in I_-(b)$ vale

$$g(x) > g(b)$$

e quindi b non può essere massimo di g. Pertanto il massimo non essendo né in a né in b deve essere in un punto $c \in]a, b[$ e quindi è un punto di estremo locale [teorema 9.1] ove la derivata è nulla [corollario 9.3]; quindi

$$g'(c) = 0 \qquad \longrightarrow \qquad \gamma - f'(c) = 0 \qquad \longrightarrow \qquad f'(c) = \gamma \ ,$$

come si doveva dimostrare. □

9.6. Teorema di de L'Hôpital

Teorema 9.14 (di de L'Hôpital[5]). *Siano $f, g : D \to \mathbb{R}$ due funzioni, sia D un intervallo e $c \in \tilde{\mathbb{R}}$ punto di accumulazione per D; siano inoltre f e g continue e derivabili in $D \setminus \{c\}$ e sia $g'(x) \neq 0$ per ogni $x \in]a, b[\setminus \{c\}$; inoltre esista, finito o infinito, il limite*

$$\lim_{x \to x} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell \ .$$

Allora:
1. se f e g sono entrambe infinitesime per x che tende a c,
2. se g diverge per x che tende a c,
esiste il limite di f/g per x che tende a c e vale

$$\lim_{x \to x} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x} \frac{f'(x)}{g'(x)} \ . \tag{9.3}$$

[5] Guillaume François Antoine de Sainte Mesme, marchese de l'Hôpital (1661-1704), matematico francese.

Dimostrazione (costruttiva)
Sia $\ell \in \mathbb{R}$. Fissato $\epsilon > 0$ esiste un intorno sinistro $I_-(c)$ tale che

$$x \in I_-(c) \smallsetminus \{c\} \qquad \longrightarrow \qquad \left|\frac{f'(x)}{g'(x)} - \ell\right| < \epsilon \; .$$

Le funzioni f e g verificano le ipotesi del teorema di Cauchy nell'intervallo $[d, x]$, con $d, x \in I_-(c)$; quindi esiste $\xi \in \,]d, x[$ tale che sia

$$\frac{f(x) - f(d)}{g(x) - g(d)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

e quindi

$$\ell - \epsilon < \frac{f(x) - f(d)}{g(x) - g(d)} < \ell + \epsilon \; . \tag{9.4}$$

Allora:
1. calcolando il limite sinistro per d che tende a c, ed utilizzando la continuità delle funzioni f e g in c si trova:

$$\lim_{d \to c^-} \frac{f(x) - f(d)}{g(x) - g(d)} = \frac{f(x)}{g(x)} \; .$$

Si osservi che $g'(x) \neq 0$ in $D \smallsetminus \{c\}$ quindi g è ivi monotòna [teorema 9.10], pertanto $g(x) = 0$ al piú in un punto di D che può essere escluso scegliendo in intorno $I_-(c)$ sufficientemente piccolo. Quindi per il teorema del confronto [teorema 6.9] si trova

$$x \in I_-(c) \qquad \longrightarrow \qquad \ell - \epsilon < \frac{f(x)}{g(x)} < \ell + \epsilon$$

e quindi

$$\lim_{x \to c^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell \; .$$

Allo stesso modo si dimostra l'esistenza del limite destro.
2. Si può supporre (ma nel caso sia $g' < 0$ l'argomento è il medesimo) che sia $g'(x) > 0$ in D e quindi che g sia crescente [teorema 9.10] e pertanto tenda a $+\infty$ per x che tende a c. Allora vale

$$d < x \qquad \longrightarrow \qquad g(x) - g(d) > 0 \; .$$

Quindi la (9.4) può essere moltiplicata per $g(x) - g(d)$ e divisa per $g(x)$, entrambe positive, ottenendo

$$(\ell - \epsilon)\left[1 - \frac{g(d)}{g(x)}\right] < \frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(d)}{g(x)} < \left[1 - \frac{g(d)}{g(x)}\right](\ell - \epsilon) \; ,$$

da cui

$$(\ell - \epsilon)\left[1 - \frac{g(d)}{g(x)}\right] + \frac{f(d)}{g(x)} < \frac{f(x)}{g(x)} < \frac{f(d)}{g(x)} + \left[1 - \frac{g(d)}{g(x)}\right](\ell - \epsilon) \; .$$

Facendo tendere x a c, tendendo fisso d, i rapporti $g(d)/g(x)$ e $f(d)/g(x)$ sono infinitesimi quindi il primo membro a sinistra della disuguaglianza tende a $\ell - \epsilon$, mentre l'ultimo a destra tende a $\ell + \epsilon$. Osservando che valgono

$$\ell - 2\epsilon < \ell - \epsilon \qquad , \qquad \ell + \epsilon > \ell + 2\epsilon \; ,$$

per il teorema del confronto [teorema 6.9] esiste un intorno $I'_-(c) \subset I_-(c)$ in cui vale

$$\ell - 2\epsilon < (\ell - \epsilon)\left[1 - \frac{g(d)}{g(x)}\right] + \frac{f(d)}{g(x)} \qquad , \qquad \frac{f(d)}{g(x)} + \left[1 - \frac{g(d)}{g(x)}\right](\ell - \epsilon) < \ell + 2\epsilon \; ;$$

pertanto sia ha

$$x \in I'_-(c) \qquad \longrightarrow \qquad \ell - 2\epsilon < \frac{f(x)}{g(x)} < \ell + 2\epsilon$$

e quindi

$$\lim_{x \to c^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell \ .$$

Allo stesso modo si dimostra l'esistenza del limite destro.
Se il limite è $+\infty$ si procede in modo simile arrivando, al posto della (9.4), alla disequazione $f'(x)/g'(x) > M$, se il limite è $-\infty$ si arriva alla disequazione $f'(x)/g'(x) < -M$ per un certo fissato $M > 0$; a questo punto la dimostrazione dei casi 1 e 2 ripercorre i passi già visti nel caso di limite finito e di cui si lasciano i dettagli alla cura del lettore studioso. □

Il teorema di de L'Hôpital si rivela estremamente utile nella risoluzione di limiti che si presentano in forme indeterminate del tipo $0/0$ o ∞/∞. Non se ne faccia tuttavia un uso indiscriminato, facendo particolare attenzione a non applicarlo nei casi in cui non siano verificate le ipotesi del teorema né ai casi in cui il limite del rapporto delle derivate sia piú complicato del limite del rapporto delle funzioni. Si osservi infine che se non esiste il limite del rapporto delle derivate non è detto che non esista il limite del rapporto delle funzioni. I seguenti esempi chiariranno la questione.

Esempio 61. Si considerino le funzioni $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ di equazioni $f(x) = x + \operatorname{sen} x$ e $g(x) = x$; esse sono continue e derivabili in ogni punto del loro dominio e $g'(x)$ è sempre diversa da zero, inoltre g diverge per x che tende a $+\infty$; però il limite

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \to +\infty} (1 + \operatorname{sen} x)$$

non esiste essendo il limite di una funzione oscillante; quindi il teorema di de L'Hôpital, caso 2, non si può applicare, mancando una delle ipotesi. D'altra parte il limite del rapporto delle funzioni è facilmente calcolabile:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x + \operatorname{sen} x}{x} = \lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{\operatorname{sen} x}{x}\right) = 1 \ .$$

Esempio 62. Si considerino le funzioni $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ di equazioni $f(x) = \operatorname{sen} x - x$ e $g(x) = x^3$; esse sono continue e derivabili in ogni punto del loro dominio, sono infinitesime per x che tende a $+\infty$ e $g'(x) \neq 0$ per $x \neq 0$, inoltre vale

$$\lim_{x \to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos x - 1}{3x^2} = \frac{1}{3} \lim_{x \to 0} \frac{\cos x - 1}{x^2} = \frac{1}{6} \ ,$$

ove è stato usato il limite notevole (7.8); si può quindi applicare il teorema di de L'Hôpital, caso 1, e concludere

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x - x}{x^3} = \frac{1}{6} \ .$$

Chi non ricordasse il limite notevole utilizzato sopra può osservare che al nuovo limite è possibile applicare ancora il teorema di de L'Hôpital:

$$\frac{1}{3} \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{2x} = \frac{1}{6} \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = \frac{1}{6} \ .$$

Anche qui è stato usato un limite notevole, ma, ancora, chi non lo ricordasse può iterare l'uso del teorema di de L'Hôpital

$$\frac{1}{6} \lim_{x \to 0} \cos x = \frac{1}{6} \ .$$

Questo risultato è stato utilizzato in precedenza per illustrare un uso scorretto del principio di sostituzione [esempio 46].

Esempio 63. Si considerino le funzioni $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ di equazioni $f(x) = e^{-x}$ e $g(x) = x^{-1}$; esse sono continue e derivabili in ogni punto del loro dominio, sono infinitesime per x che tende a $+\infty$ e $g'(x) \neq 0$ per $x \in \mathbb{R}^*$; inoltre vale

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{-x}}{x^{-2}} \;;$$

il teorema di de L'Hôpital, caso 1, sarebbe applicabile, ma la situazione è per cosí dire peggiorata essendo aumentato l'esponente della funzione al denominatore. Il calcolo del limite è piú semplice riscrivendo la funzione nella forma

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x} \;.$$

In questo caso il limite del rapporto delle derivate diventa

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{e^x} = 0 \;;$$

è quindi applicabile il teorema di de L'Hôpital, caso 2 stavolta, e si ottiene

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{-x}}{x^{-1}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x} = 0 \;.$$

9.7. Continuità della funzione derivata

Teorema 9.15. *Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua in $[a, b]$ e derivabile in tutti i punti di $]a, b[$ tranne che in $c \in\,]a, b[$; allora se esiste finito il limite*

$$\lim_{x\to c} f'(x) = \ell$$

la funzione è derivabile anche in c e vale $f'(c) = \ell$.

Dimostrazione (costruttiva e per assurdo)
Di questo teorema si danno tre diverse dimostrazioni.
1. Per ogni $x \in\,]a, b[$, tale che sia $x > c$ si consideri l'intervallo $[c, x]$ nel quale valgono le ipotesi del teorema di Lagrange (9.1); quindi esiste in $\xi \in\,]c, x[$ per il quale vale

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} = f'(\xi) \;.$$

Calcolando per entrambi i membri di questa equazione il limite per x che tende a c si trova

$$f'_+(c) = \lim_{x\to c^+} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = \lim_{x\to c^+} f'(\xi) \;.$$

Ripetendo lo stesso calcolo con $x < c$ si trova

$$f'_-(c) = \lim_{x\to c^-} f'(\xi) \;.$$

Ma, per ipotesi, esiste il limite di $f'(x)$ in c, quindi il limite destro e il limite sinistro devono coincidere, pertanto

$$\lim_{x\to c^+} f'(\xi) = \lim_{x\to c^-} f'(\xi) = \lim_{x\to c} f'(\xi) \;,$$

da cui segue che anche la derivata destra e la derivata sinistra di f in c coincidono:

$$f'_+(c) = f'_-(c) = f'(c) = \lim_{x\to c} f'(\xi) \;.$$

2. Si supponga che sia $\ell > f'(c)$. Se esiste il limite, in particolare deve esistere il limite destro in c e coincidere con ℓ; allora si scelga $\epsilon > 0$ in modo che sia $0 < \epsilon < \ell - f'(c)$, per l'esistenza del limite destro è possibile determinare un $\delta > 0$ tale che sia

$$c < x < x + \delta \qquad \longrightarrow \qquad \ell - \epsilon < f'(x) < \ell + \epsilon \ ;$$

in particolare, quindi, per $c < x < x + \delta$ vale

$$f'(c) < \ell - \epsilon < f'(x) \ .$$

Questo porta una contraddizione; infatti, poiché $f'(c + \delta) > \ell - \epsilon$, $f'(x)$ non assume nessuno dei valori compresi nell'intervallo

$$]f'(c), \ell - \epsilon[\ \subset \ ]f'(c), f'(c + \delta)[\ .$$

Quindi $f'(x)$ non assume tutti i valori compresi nell'intervallo $]f'(c), f'(c + \delta)[$, come previsto dal teorema di Darboux. La dimostrazione del caso $\ell < f'(c)$ è analoga e viene lasciata alla cura del lettore studioso.
3. Si consideri il limite del rapporto incrementale

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \ ;$$

poiché la funzione f è continua in c, il limite presenta una forma indeterminata $0/0$; si può quindi applicare il teorema di de l'Hôpital:

$$\lim_{x \to c} f'(x) \ ;$$

ma questo per ipotesi esiste e, per il teorema di de L'Hôpital, coincide con il limite del rapporto incrementale cioè con la derivata in c, quindi

$$\lim_{x \to c} f'(x) = f'(c) \ ,$$

che è quanto si doveva dimostrare. □

Corollario 9.16 (Continuità della funzione derivata)**.** Se la funzione $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ è derivabile in c ed esiste il limite

$$\lim_{x \to c} f'(x) \ ,$$

allora la funzione derivata f' è continua in c.

Se non esiste il limite della f' per x che tende a c non è detto che non esista la derivata in c, come illustra l'esempio seguente.

Esempio 64. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \to$ di equazione

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \left(2 + \operatorname{sen} \dfrac{1}{x}\right) & \text{per } x \neq 0 \\ 0 & \text{per } x = 0 \ . \end{cases}$$

Essa è continua e derivabile ovunque; in particolare vale $f'(0) = 0$, per verificarlo basta fare il limite del rapporto incrementale

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} x \left(2 + \operatorname{sen} \frac{1}{x}\right) = 0 \ .$$

Si tratta infatti del prodotto di una funzione limitata per una funzione infinitesima [teorema 6.12]. Tuttavia, non esiste il limite della f' per $x = 0$; infatti vale, per $x \neq 0$,

$$f'(x) = 2x \left(2 + \operatorname{sen} \frac{1}{x}\right) - \cos \frac{1}{x} \ .$$

Questa funzione non ha limite per x che tende a zero; infatti mentre il primo membro tende a zero [teorema 6.12], il secondo addendo non ha limite poiché $1/x$ tende all'infinito e il coseno all'infinito è oscillante.

Si noti che in questo esempio il limite destro e il limite sinistro della f' in c non esistono. Se però esistono essi sono rispettivamente (come visto nella dimostrazione del teorema precedente) la derivata destra $f'_+(c)$ e la derivata sinistra $f'_-(c)$; in tal caso se sono diversi o non finiti la funzione non è derivabile in c.
Alla luce di quanto detto, il precedente teorema costituisce un comodo criterio di derivabilità per le funzioni definite per casi, o prolungate per continuità. In questo caso infatti la funzione è derivabile se esistono il limite destro e il limite sinistro della funzione derivata. La situazione è illustrata dal seguente semplice esempio.

Esempio 65. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ di equazione

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x + 2 & \text{per } x \geq 0 \\ x^2 + 3x + 2 & \text{per } x < 0 \ . \end{cases}$$

Essa è continua per ogni x ma non è derivabile per $x = 0$ vale infatti

$$f'(x) = \begin{cases} 2x - 3 & \text{per } x > 0 \\ 2x + 3 & \text{per } x < 0 \end{cases}$$

i cui limiti destro e sinistro sono diversi:

$$\lim_{x \to 0^-} f'(x) = +3 \qquad , \qquad \lim_{x \to 0^+} f'(x) = -3 \ ;$$

la funzione quindi non è derivabile. Si noti la differenza con il caso dell'esempio precedente in cui la funzione ha potuto essere derivabile poiché $f'_\pm$ *non esistevano* mentre qui la funzione non è derivabile perché *esistono* e sono diversi.

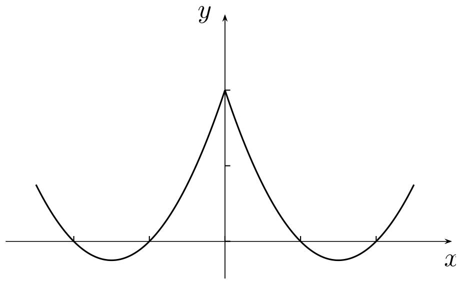


Figura 9.3: La funzione non derivabile in $x = 0$

Il grafico della funzione è riportato in figura 9.3.

9.8. Derivate successive

Se la funzione derivata $f' : D' \to \mathbb{R}$ [definizione 8.6] è continua in $I' \subseteq D'$ si dice che la funzione f è *di classe* $\mathcal{C}^1$ in I' (si legga 'ci uno') e si indica anche con $\mathcal{C}^1(I')$.
Se poi la funzione f' è a sua volta derivabile in $D'' \subseteq D'$ è possibile definire una nuova funzione $f'' : D'' \to \mathbb{R}$, detta *derivata seconda* di f (ed, evidentemente, derivata prima di f'), che si indica con uno dei seguenti simboli

$$f'' \qquad , \qquad D^2 f \qquad , \qquad f^{(2)} \ .$$

Se la derivata seconda è continua in $I'' \subseteq D''$ si dice che la funzione f è di classe $\mathcal{C}^2(I'')$. Piú in generale si dà la seguente definizione.

Definizione 9.3 (Classi di funzioni)**.** Data una funzione $f : I \to \mathbb{R}$ definita nell'intervallo $I \subseteq \mathbb{R}$; se la funzione è derivabile k volte, con derivata $f^{(k)}$ continua in I, allora si dice che la funzione f è di classe $\mathcal{C}^k(I)$.
Una funzione f continua ma non derivabile in I è di classe $\mathcal{C}^0(I)$.
Una funzione f di classe $\mathcal{C}^k(I)$ per ogni k naturale, si dice di classe $\mathcal{C}^\infty(I)$.

Teorema 9.17. *Le funzioni polinomiali, le funzioni razionali, la funzione esponenziale, la funzione logaritmo e le funzioni goniometriche dirette ed inverse sono tutte di classe $\mathcal{C}^{\infty}$ nei loro domini, con l'eccezione dell'arcoseno e dell'arcocoseno che in ± 1 sono solo continue.*

Dimostrazione (costruttiva)
La dimostrazione è immediata, consultando la tabella 8.1. □

9.9. Formule di Taylor

Le funzioni derivabili hanno la proprietà di essere approssimabili mediante polinomi di grado uguale al massimo grado di derivabilità della funzione.

Teorema 9.18 (Formula di Taylor[6] con resto di Peano[7])**.** *Sia $f : I \to \mathbb{R}$, ove $I \subseteq \mathbb{R}$ è un intervallo, una funzione derivabile k volte in $c \in I$ allora vale*

$$f(x) = f(c) + f'(c)(x-c) + \frac{1}{2!}f''(c)(x-c)^2 + \cdots + \frac{1}{k!}f^{(k)}(c)(x-c)^k + \sigma(x)(x-c)^k \ , \tag{9.5}$$

ove la funzione $\sigma(x)$ è infinitesima per x che tende a c.

Dimostrazione (costruttiva)
Si deve dunque dimostrare che vale

$$\lim_{x\to c} \frac{f(x) - \left[f(c) + f'(c)(x-c) + \frac{1}{2!}f''(c)(x-c)^2 + \cdots + \frac{1}{k!}f^{(k)}(c)(x-c)^k\right]}{(x-c)^k} = 0 \ .$$

Le funzioni al numeratore e al denominatore nel limite precedente sono infinitesime per x che tende a c, sono inoltre derivabili k volte e la funzione al denominatore è tale che nessuna delle sue k derivate si annulli in $x \neq c$; ci si trova quindi nelle condizioni di applicare il teorema di de L'Hôpital [equazione (9.3)]; derivando quindi numeratore e denominatore si trova

$$\lim_{x\to c} \frac{f'(x) - \left[f'(c) + f''(c)(x-c) + \frac{1}{2!}f'''(c)(x-c)^2 + \cdots + \frac{1}{(k-1)!}f^{(k)}(c)(x-c)^{k-1}\right]}{k(x-c)^{k-1}} \ .$$

Questo limite verifica ancora le ipotesi del teorema di de L'Hôpital e la situazione si ripete fino alla derivata $(k-1)$-esima dopo la quale il limite è diventato

$$\lim_{x\to c} \frac{f^{(k-1)}(x) - \left[f^{(k-1)}(c) + f^{(k)}(c)(x-c)\right]}{k!(x-c)} = \frac{1}{k!}\lim_{x\to c}\frac{f^{(k-1)}(x) - f^{(k-1)}(c)}{x-c} - \frac{1}{k!}f^{(k)}(c) \ .$$

Ma il limite rimasto da calcolare è il limite del rapporto incrementale della $(k-1)$-esima derivata che, visto che la funzione è supposta derivabile k volte, esiste e coincide con $f^{(k)}$. Quindi il limite è nullo e per il teorema di de L'Hôpital sono nulli tutti i limiti precedenti il che conclude la dimostrazione. □

L'ultimo addendo dell'equazione (9.5) è detto *resto di Peano*; ricordando la definizione 7.8, la precedente equazione si può riscrivere nel modo seguente

$$f(x) = \sum_{h=1}^{k} \frac{1}{h!} f^{(i)}(x-c)^h + \mathcal{O}_c[(x-c)^k] \ .$$

La formula di Taylor con resto di Peano dice che approssimando in c una funzione derivabile con un polinomio di grado k si commette un errore infinitesimo di ordine superiore a $(x-c)^k$, non dice però nulla che consente di stimare il valore dell'errore commesso. A tale necessità provvede il seguente teorema.

[6] Brook Taylor (1685-1731), matematico inglese.
[7] Giuseppe Peano (1858-1932), matematico italiano.

Teorema 9.19 (Formula di Taylor con resto di Lagrange). *Sia $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione, ove $I \subseteq \mathbb{R}$ è un intervallo; siano c e x contenuti in I e sia f di classe $\mathcal{C}^{k-1}$ in $[c, x]$ e sia $f^{(k-1)}$ derivabile in $]c, x[$ allora esiste un punto $\xi \in]c, x[$ tale che valga*

$$f(x) = f(c) + f'(c)(x-c) + \cdots + \frac{1}{(k-1)!} f^{(k-1)}(c)(x-c)^{k-1} + \frac{1}{k!} f^{(k)}(\xi)(x-c)^k \ . \tag{9.6}$$

Dimostrazione (costruttiva)
Si considerino le funzioni

$$\begin{aligned} g(x) &= f(x) - \left[f(c) + f'(c)(x-c) + \frac{1}{2!} f''(c)(x-c)^2 + \cdots + \frac{1}{(k-1)!} f^{(k-1)}(c)(x-c)^{k-1} \right] \\ h(x) &= (x-c)^k \end{aligned}$$

che verificano in $[c, x]$ le ipotesi del teorema di Cauchy [equazione (9.2)]; e, inoltre, hanno la proprietà di annullarsi, insieme alle loro prime $k-1$ derivate, per $x = c$. Per il teorema di Cauchy, quindi, esiste $\xi_1 \in]c, x[$ tale che valga

$$\frac{g(x)}{h(x)} = \frac{g(x) - g(c)}{h(x) - h(c)} = \frac{g'(\xi_1)}{h'(\xi_1)}$$

e quindi

$$\frac{g(x)}{h(x)} = \frac{g'(\xi_1)}{h'(\xi_1)} = \frac{f'(\xi_1) - \left[f'(c) + f''(c)(\xi_1 - c) + \cdots + \frac{1}{(k-2)!} f^{(k-1)}(c)(\xi_1 - c)^{k-2} \right]}{k(\xi_1 - c)^{k-1}} \ ;$$

ora le funzioni $g'(\xi_1)$ e $h'(\xi_1)$ verificano ancora le ipotesi del teorema di Cauchy e quindi esiste $\xi_2 \in]c, \xi_1[$ per il quale si abbia

$$\frac{g(x)}{h(x)} = \frac{g'(\xi_1)}{h'(\xi_1)} = \frac{g'(\xi_1 - g'(c))}{h'(\xi_1) - h'(c)} = \frac{g''(\xi_2)}{h''(\xi_2)}$$

e quindi

$$\frac{g(x)}{h(x)} = \frac{g''(\xi_2)}{h''(\xi_2)} = \frac{f''(\xi_2) - \left[f''(c) + f'''(c)(\xi_2 - c) + \cdots + \frac{1}{(k-3)!} f^{(k-1)}(c)(\xi_2 - c)^{k-3} \right]}{k(k-1(\xi_2 - c)^{k-2}} \ .$$

Iterando la procedura k volte si trova, alla fine, un $\xi \in]c, \xi_{k-1}[$ tale che sia

$$\frac{g(x)}{h(x)} = \frac{f^{(k)(\xi)}}{k!} \ ,$$

cioè

$$f(x) - \left[f(c) + f'(c)(x-c) + \cdots + \frac{1}{(k-1)!} f^{(k-1)}(c)(x-c)^{k-1} \right] = \frac{1}{k!} f^{(k)}(\xi)(x-c)^k \ ,$$

che è quanto bisognava dimostrare. □

L'ultimo addendo dell'equazione (9.6) è detto *resto di Lagrange*

Definizione 9.4 (Polinomi di Mac Laurin[8]). Se la funzione f è approssimabile per mezzo della formula di Taylor per $x = 0$, il polinomio approssimante si dice *polinomio di Mac Laurin*.

L'approssimazione polinomiale delle funzioni è assai utile in molti casi, come illustrato dai seguenti esempi.

[8] Colin Maclaurin (1698-1746), matematico scozzese.

Esempio 66 (Approssimazione di e)**.** La funzione esponenziale $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ avente equazione $f(x) = e^x$, verifica tutte le ipotesi necessarie alla formula di Taylor con resto di Lagrange [equazione (9.6)] con $c = 0$ e quindi ammette approssimazione mediante un polinomio di Mac Laurin. Per determinare tale polinomio basta osservare che, per ogni k naturale, vale vale $D^{(k)}e^x = e^x$ e quindi $f^{(k)}(0) = 1$ per ogni k naturale. Si ottiene quindi subito la formula di Taylor, con resto di Lagrange:

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + \frac{1}{(n-1)!}x^{n-1} + \frac{1}{n!}e^{\xi}x^n \qquad , \qquad \text{con } \xi \in \,]0, x[\ .$$

Volendo quindi approssimare il valore di e, per esempio fino all'ordine 6, basta fermare il precedente polinomio al grado 6 e calcolarlo per $x = 1$. Si ottiene cosí, per un $\xi \in \,]0, 1[$:

$$\begin{aligned} e &= 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} + \frac{1}{7!}e^{\xi} = \\ &= 2 + \frac{517}{720} + \frac{1}{7!}e^{\xi} = \\ &= \frac{1957}{720} + \frac{1}{7!}e^{\xi} = \\ &= 2.7180\bar{5} + \frac{1}{7!}e^{\xi}\ . \end{aligned}$$

Quindi approssimando il numero trascendente e con il numero razionale $2.7180\bar{5}$ si commette un errore uguale al resto di Lagrange. Ricordando che vale $e < 3$ [teorema 2.11], si ha la seguente disuguaglianza

$$\frac{1}{7!}e^{\xi} < \frac{1}{7!}e^{1} < \frac{3}{7!} = \frac{3}{5040} \simeq 0.0006$$

che corrisponde ad un errore dello 0.02 %.

Esempio 67. Si consideri il limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - 2\operatorname{sen} x + \operatorname{arctg} x}{x^5}\ .$$

Si tratta di una forma indeterminata che si può risolvere mediante il teorema di de L'Hôpital; occorre però fare 5 derivate e la cosa non è molto agevole. Alternativamente si possono approssimare le funzioni $\operatorname{sen} x$ e $\operatorname{arctg} x$ mediante i loro polinomi di Mac Laurin, si vedano qui sotto le equazioni (9.7) e (9.8), ottenendo

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0} \frac{x - 2\operatorname{sen} x + \operatorname{arctg} x}{x^5} &= \lim_{x\to 0} \frac{x - 2\left[x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o_0(x^5)\right] + \left[x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + o_0(x^5)\right]}{x^5} = \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{11}{60}x^5 + o_0(x^5)}{x^5} = \\ &= \frac{11}{60}\ . \end{aligned}$$

Per comodità del lettore, si riportano qui di seguito i polinomi di Mac Laurin che approssimano alcune funzioni, con il resto di Peano, la cui facile, ma noiosa, dimostrazione si lascia alla cura del lettore studioso.

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + o_0(x^n)$$

$$\log(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{1}{n}x^n + o_0(x^n)$$

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \cdots + (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!}x^{2n+1} + o_0(x^{2n+1}) \tag{9.7}$$

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + \cdots + (-1)^n \frac{1}{(2n)!}x^{2n} o_0(x^{2n})$$

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + \cdots + (-1)^n \frac{1}{2n+1}x^{2n+1} + o_0(x^{2n+1}) \tag{9.8}$$

$$\operatorname{senh} x = x + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \cdots + \frac{1}{(2n+1)!}x^{2n+1} + o_0(x^{2n+1})$$

$$\cosh x = 1 + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + \cdots + \frac{1}{(2n)!}x^{2n} + o_0(x^{2n})$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} + \cdots + \binom{\alpha}{n}x^n + o_0(x^n)$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + \cdots + (-1)^n x^n + o_0(x^n)\ .$$

10

STUDIO DEL GRAFICO DI UNA FUNZIONE

Data una funzione $f : D \to \mathbb{R}$ di equazione $y = f(x)$ si tratta di arrivare a tracciarne, con la migliore precisione possibile, il grafico $\mathcal{G}_f$ [definizione 3.2]. Si fornisce qui un elenco delle cose da studiare per riuscire a farlo.
1. La prima cosa da osservare è che il dominio D talvolta non è assegnato; in tal caso va determinato il *dominio naturale*; cioè l'insieme di tutti gli x reali per cui l'equazione $y = f(x)$ è definita. Si dovrà quindi escludere dal dominio tutti gli x per i quali si annullano i denominatori, diventano negativi gli argomenti delle radici di indice pari e cosí via.
2. Determinare se l'equazione $y = f(x)$ presenta periodicità, caratteristica delle funzioni goniometriche, o se presenta particolari simmetrie, cioè se si tratta di una funzione pari o dispari [definizione 3.3].
3. Determinare il segno della funzione, cioè per quali valori di $x \in D$ è positiva e per quali è negativa e le intersezioni del grafico con gli assi coordinati.
4. Determinare se la funzione presenta, in D dei punti di discontinuità.
5. Calcolare i limiti, destro e sinistro, della funzione in tutti i punti di accumulazione che non appartengono al dominio, fra i quali possono esserci $\pm\infty$, e in tutti i punti di discontinuità.
6. Determinare gli asintoti di $\mathcal{G}_f$, per i quali si rimanda alla discussione piú sotto, e le eventuali intersezioni di $\mathcal{G}_f$ con i suoi asintoti.
7. Determinare in quali intervalli di D la funzione è crescente e in quali è decrescente; determinare quindi gli estremi locali.
8. Determinare in quali intervalli di D la funzione sia concava e in quali sia convessa; determinare quindi i punti di flesso; anche per questa questione si rimanda alla discussione piú sotto.
9. Tracciare il grafico $\mathcal{G}_f$.
Alcune delle conoscenze necessarie a realizzare questo programma sono già state affrontate nelle pagine precedenti; le altre vengono trattate in quel che segue.

10.1. Asintoti

Definizione 10.1 (Asintoto verticale)**.** Data la funzione $f : D \to \mathbb{R}$ e il punto $c \notin D$, che sia però di accumulazione per D, si dice che la retta di equazione $x = c$ è asintoto verticale sinistro o destro per f se valgono, rispettivamente:

$$\lim_{x\to c^-} f(x) = \pm\infty \qquad , \qquad \lim_{x\to c^+} f(x) = \pm\infty \ .$$

Dalla definizione data, è evidente che gli asintoti verticali vanno cercati nei punti di discontinuità di seconda specie [definizione 7.4] del dominio.

Definizione 10.2 (Asintoto all'infinito)**.** Data la funzione $f : D \to \mathbb{R}$ definita in un intorno di $-\infty$ o, rispettivamente, di $+\infty$, di equazione $y = f(x)$, la retta r di equazione $y = mx + q$ è *asintoto all'infinito*, rispettivamente, sinistro o destro per f se la differenza delle loro equazioni è infinitesima rispettivamente a ∞ o $+\infty$, cioè se valgono

$$\lim_{x\to-\infty} \big[f(x) - (mx + q)\big] = 0 \ . \qquad , \qquad \lim_{x\to+\infty} \big[f(x) - (mx + q)\big] = 0 \ .$$

La definizione ora data ha la seguente caratterizzazione geometrica.

Teorema 10.1. *Data la funzione $f : D \to \mathbb{R}$, definita in un intorno di $-\infty$ o, rispettivamente, di $+\infty$, di equazione $y = f(x)$, la retta r di equazione $y = mx + q$ è asintoto all'infinito, rispettivamente, sinistro o destro per f se e solo se la distanza fra un punto di $\mathcal{G}_f$ e la retta r tende a zero per x che tende, rispettivamente a $-\infty$ o $+\infty$.*

Dimostrazione (costruttiva)
Il generico punto P appartenente a $\mathcal{G}_f$ ha coordinate $P\big(x, f(x)\big)$, quindi la sua distanza da r è

$$\mathrm{d}(P, r) = \frac{|f(x) - mx - q|}{\sqrt{1+m^2}} \ .$$

Pertanto vale

$$\lim_{x\to\pm\infty} \mathrm{d}(P, r) = 0 \qquad \text{se e solo se} \qquad \lim_{x\to\pm\infty} \big[f(x) - (mx+q)\big] = 0 \ ,$$

come si doveva dimostrare. □

Per determinare l'esistenza di un asintoto all'infinito, e la sua equazione cartesiana, è utile il seguente teorema

Teorema 10.2. *La funzione $f : D \to \mathbb{R}$, definita in un intorno di $-\infty$ o, rispettivamente, di $+\infty$, di equazione $y = f(x)$ ha un asintoto all'infinito, rispettivamente, sinistro o destro se e solo esistono due numeri reali m e q, che in generale possono essere diversi nei due limiti a $+\infty$ e a $-\infty$, per cui valgano, rispettivamente*

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = m \qquad , \qquad \lim_{x\to\pm\infty} \big[f(x) - mx\big] = q \ ,$$

in tale caso l'asintoto all'infinito è la retta di equazione $y = mx + q$.

Dimostrazione (costruttiva)
Dimostrazione della necessità. Se vale il secondo dei limiti allora vale [teorema 6.2]

$$\lim_{x\to\pm\infty} \big[f(x) - (mx+q)\big] = 0$$

e quindi $y = mx + q$ è asintoto all'infinito.
Dimostrazione della sufficienza. Se la retta di equazione $y = mx + q$ è asintoto all'infinito per f allora vale

$$\lim_{x\to\pm\infty} \big[f(x) - (mx+q)\big] = \lim_{x\to\pm\infty} \left[x \cdot \frac{f(x) - mx - q}{x}\right] = 0 \ .$$

Poiché x diverge, la frazione è infinitesima, quindi

$$\lim_{x\to\pm\infty} \left[\frac{f(x)}{x} - m - \frac{q}{x}\right] = \lim_{x\to\pm\infty} \left[\frac{f(x)}{x} - m\right] = 0$$

da cui segue [teorema 6.2]:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = m \ .$$ □

Definizione 10.3 (Asintoto obliquo ed orizzontale)**.** Data la retta r di equazione $y = mx + q$, asintoto all'infinito per la funzione $f : D \to \mathbb{R}$ di equazione $y = f(x)$; se $m \neq 0$ si dice che r è *asintoto obliquo*; se $m = 0$ si dice che r è asintoto orizzontale.

Corollario 10.3. La funzione $f : D \to \mathbb{R}$, definita in un intorno di $-\infty$ o, rispettivamente, di $+\infty$, di equazione $y = f(x)$ ha un asintoto orizzontale, rispettivamente, sinistro o destro se e solo se esiste un k reale per cui valgano, rispettivamente

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = k \qquad , \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = k \ .$$

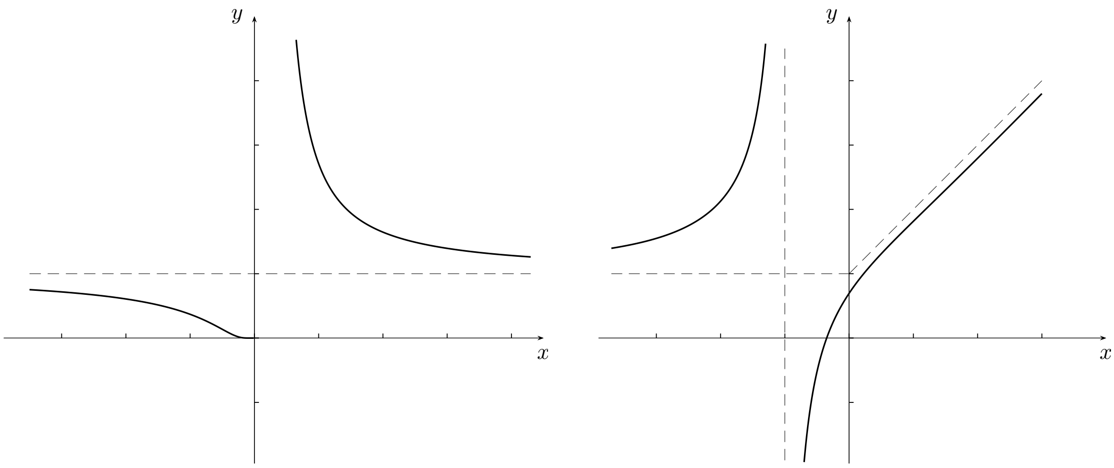
in tal caso l'equazione cartesiana dell'asintoto è

$$y = k \ .$$

Esempio 68. Data la funzione $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ di equazione $f(x) = e^{1/x}$. Valgono i limiti, il cui calcolo si lascia alla cura del lettore studioso:

$$\lim_{x \to 0^-} e^{1/x} = 0$$
$$\lim_{x \to 0^+} e^{1/x} = +\infty$$
$$\lim_{x \to \pm\infty} e^{1/x} = 1 \quad .$$

La funzione ha quindi per asintoto verticale destro la retta di equazione $x = 0$ e per asintoto orizzontale destro e sinistro la retta di equazione $y = 1$. Il grafico della funzione è riportato in figura 10.1a.



(a) Il grafico di $f(x) = e^{1/x}$.

(b) Il grafico di $f(x) = \frac{x}{x+1} + \log(e^x + 1)$.

Figura 10.1: Due grafici.

Esempio 69. Data la funzione $f : D \to \mathbb{R}$, con $D = \{x \mid x \in \mathbb{R}, x \neq -1\}$ di equazione

$$f(x) = \frac{x}{x+1} + \log(e^x + 1) \quad .$$

Valgono i limiti, il cui calcolo si lascia alla cura del lettore studioso,

$$\lim_{x \to -1^\pm} \left[\frac{x}{x+1} + \log(e^x + 1)\right] = \mp\infty$$
$$\lim_{x \to -\infty} \left[\frac{x}{x+1} + \log(e^x + 1)\right] = 1$$
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{x}{x+1} + \log(e^x + 1)}{x} = 1$$
$$\lim_{x \to +\infty} \left[\frac{x}{x+1} + \log(e^x + 1) - x\right] = 1 \quad .$$

La funzione ha quindi per asintoto verticale sinistro e destro la retta di equazione $x = -1$ e per asintoto orizzontale sinistro la retta di equazione $y = 1$ e per asintoto obliquo destro la retta di equazione $y = x + 1$. Il grafico della funzione è riportato in figura 10.1b.

10.2. Estremi locali

Teorema 10.4 (Criterio per l'esistenza degli estremi locali). *Dati la funzione $f : D \to \mathbb{R}$ ed un punto $c \in D$, tali che f sia continua in un intorno $I(c)$; allora:*
1. c è un punto di massimo locale se

$$\begin{aligned} f'(x) &\geq 0 \qquad \textit{per } x \in I_-(c) \\ f'(x) &\leq 0 \qquad \textit{per } x \in I_+(c) \ . \end{aligned}$$

2. c è un punto di minimo locale se

$$\begin{aligned} f'(x) &\leq 0 \qquad \textit{per } x \in I_-(c) \\ f'(x) &\geq 0 \qquad \textit{per } x \in I_+(c) \ . \end{aligned}$$

Dimostrazione (costruttiva)
1. Se c è punto di massimo locale per f, allora [definizione 9.2], esiste un intorno sinistro $I_-(c)$ in cui si abbia

$$x \leq c \qquad \longrightarrow \qquad f(x) \leq f(c)$$

ed esiste un intorno destro $I_+(c)$ in cui si abbia

$$x \geq c \qquad \longrightarrow \qquad f(x) \leq f(c) \ .$$

Quindi [definizione 3.12] la funzione è monotòna crescente in $I_-(c)$ e monotòna decrescente in $I_+(c)$ e quindi la funzione f' è positiva in $I_-(c)$ e negativa in $I_+(c)$.
2. La dimostrazione è analoga a quella del punto 1 e si lascia alla cura del lettore studioso. □

Teorema 10.5 (Metodo delle derivate successive nella determinazione degli estremi locali). *Sia $f : I \to \mathbb{R}$, ove $I \subseteq \mathbb{R}$ è un intervallo, una funzione derivabile k volte in $c \in I$ e tale che sia $f'(c) = \cdots = f^{(k-1)}(c) = 0$ e $f^{(k)}(c) \neq 0$. Allora:*
1. Se k è pari la funzione f ha un estremo locale in c; in particolare tale estremo è un minimo se $f^{(k)}(c) > 0$ e un massimo se $f^{(k)}(c) < 0$.
2. Se k è dispari la funzione non ha un estremo locale in c.

Dimostrazione (costruttiva)
Nelle ipotesi fatte, vale la formula di Taylor con resto di Peano (9.5) e quindi, visto l'annullamento delle prime $k-1$ derivate, si ha

$$f(x) - f(c) = \frac{1}{k!} f^{(k)}(c)(x-c)^k + \sigma(x)(x-c)^k = \left[\frac{1}{k!} f^{(k)}(c) + \sigma(x)\right](x-c)^k \ .$$

Poiché $\sigma(x)$ è infinitesima in c posto $g(x) = \frac{1}{k!} f^{(k)}(c) + \sigma(x)$ vale il limite

$$\lim_{x \to c} g(x) = \frac{1}{k!} f^{(k)}(c) \ .$$

Pertanto per il teorema della permanenza del segno [teorema 6.7] esiste un intorno $I(c)$ in cui $g(x)$ e $f^{(k)}(c)$ hanno lo stesso segno. In tale intorno, pertanto, $f(x) - f(c)$ ha lo stesso segno di $f^{(k)}(c)(x-c)^k$: quindi se k è pari $f(x) - f(c)$ ha lo stesso segno di $f^{(k)}$ e quindi

$$\begin{aligned} f^{(k)}(c) > 0 \qquad &\longrightarrow \qquad f(x) > f(c) \qquad \longrightarrow \qquad c \text{ è minimo locale} \\ f^{(k)}(c) < 0 \qquad &\longrightarrow \qquad f(x) < f(c) \qquad \longrightarrow \qquad c \text{ è massimo locale} \ . \end{aligned}$$

Se invece k è dispari, qualsiasi sia il segno di $f^{(k)}(c)$, $f(x) - f(c)$ ha lo stesso segno di $x - c$ e quindi non c non può essere estremo locale. □

Esempio 70. Si consideri la funzione polinomiale $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ di equazione $f(x) = x^5 - x^4 - 2x^3 + 3x^2$. La sua derivata prima è $f'(x) = 5x^4 - 4x^3 - 6x^2 + 6x$; si tratta di un polinomio di quarto grado il cui segno non è agevole determinare. Tuttavia evidentemente vale $f'(0) = 0$; $x = 0$ è quindi un candidato ad essere estremo locale. La derivata seconda è $f''(x) = 20x^3 - 12x^2 - 12x + 6$, si ha quindi $f''(0) = 6 > 0$, pertanto per $x = 0$ la funzione ha un punto di minimo locale.

10.3. Funzioni convesse e concave. Flessi

Definizione 10.4 (Funzione convessa e concava)**.** Una funzione $f : D \to \mathbb{R}$ si dice *convessa* nell'intervallo $I \subseteq D$ se, per ogni coppia di $a, b \in I$ e per ogni x compreso fra a e b, vale la disuguaglianza

$$f(x) \leq f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) \tag{10.1}$$

si dice *concava* in I se vale la disuguaglianza opposta:

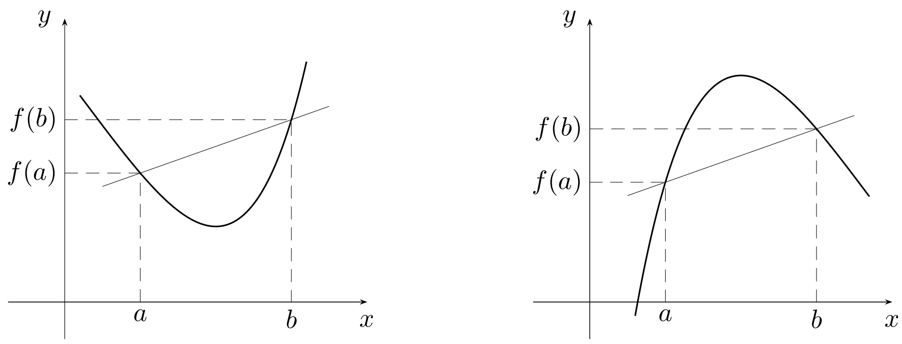
$$f(x) \geq f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) \; . \tag{10.2}$$

Se le disuguaglianze sono strette si dice che f è, rispettivamente, strettamente convessa e strettamente concava.

Si noti che il precedente teorema è vero per ogni scelta di a e b, sia per $a < b$ che per $b < a$. Poiché la curva di equazione cartesiana

$$y = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

è la retta passante per i punti del grafico $\mathcal{G}_f$ di coordinate $\big(a, f(a)\big)$ e $\big(b, f(b)\big)$, la funzione è convessa se, nell'intervallo I, il suo grafico si trova al di sotto di tale retta; viceversa, se si trova al di sopra, la funzione è concava. La figura 10.2 illustra la situazione.



(a) Una funzione convessa

(b) Una funzione concava

Figura 10.2: Grafici di una funzione convessa e di una funzione concava in un intervallo.

Teorema 10.6 (delle tre pendenze)**.** *Sia $f; D \to \mathbb{R}$ e sia $I \in D$ un intervallo, allora f è convessa in I se e solo se per ogni $a, b, c \in I$ tali che valga $a < c < b$ si ha*

$$\frac{f(c) - f(a)}{c - a} \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq \frac{f(b) - f(c)}{b - c} \; . \tag{10.3}$$

Inoltre f è strettamente convessa se e solo se le disuguaglianze precedenti sono strette.

Dimostrazione (costruttiva)
Poiché c è compreso fra a e b e la funzione è convessa, ricordando che la (10.1) vale comunque si prendano a e b, si può scrivere,

$$f(c) \leq f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(c - a)$$

da cui

$$\frac{f(c) - f(a)}{c - a} \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

e, scambiando i ruoli di a e b,

$$f(c) \le f(b) + \frac{f(a) - f(b)}{b - a}(c - b) \quad \longleftrightarrow \quad \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \le \frac{f(b) - f(c)}{b - c} \ ,$$

dove si è usato il fatto che $c - b < 0$.

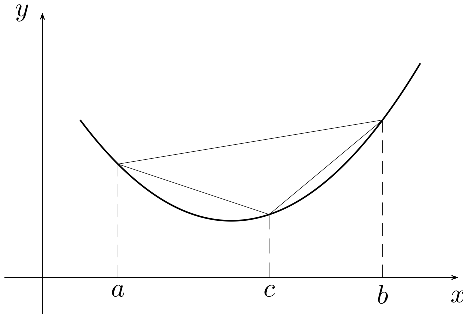


Figura 10.3: Il teorema delle tre pendenze.

Per la dimostrazione del caso di convessità stretta basta sostituire ovunque nella precedente dimostrazione il segno $<$ al segno $\le$. □

Teorema 10.7. *Sia $f : D \to \mathbb{R}$ e sia $I \in D$ un intervallo, allora se f è (strettamente) convessa in I il rapporto incrementale destro in ogni punto $x_0 \in I$ è una funzione (strettamente) crescente dell'incremento; viceversa il rapporto incrementale sinistro in ogni punto $x_0 \in I$ è una funzione (strettamente) decrescente dell'incremento.*

Dimostrazione (costruttiva)
Si indichino con i simboli $R[x_0^+](h)$ e $R[x_0^-](h)$ rispettivamente i rapporti incrementali destro e sinistro nel punto x_0 di incremento $h > 0$:

$$R[x_0^+](h) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \qquad , \qquad R[x_0^-](h) = \frac{f(x_0 - h) - f(x_0)}{-h} = \frac{f(x_0) - f(x_0 - h)}{h} \ .$$

Usando la prima delle (10.3), con $a = x_0$, $c = x_0 + h'$ e $b = x_0 + h$, $0 < h' < h$ si trova

$$\frac{f(x_0 + h') - f(x_0)}{h'} \le \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \qquad \longrightarrow \qquad R[x_0^+](h') \le R[x_0^+](h) \ ,$$

quindi $R[x_0^+](h)$ è una funzione crescente dell'incremento h (si veda la figura 10.4a).
Similmente usando la seconda delle (10.3) con $a = x_0 - h$, $c = x_0 - h'$ e $b = x_0$, sempre con $0 < h' < h$, si trova

$$\frac{f(x_0) - f(x_0 - h)}{h} \le \frac{f(x_0) - f(x_0 - h')}{h'} \qquad \longrightarrow \qquad R[x_0^-](h') \ge R[x_0^-](h) \ ,$$

quindi $R[x_0^-](h)$ è una funzione decrescente dell'incremento h.
Nel caso la funzione sia strettamente convessa, tutte le precedenti disequazioni sono strette e quindi anche crescenza e decrescenza. □

Teorema 10.8. *Sia $f; D \to \mathbb{R}$ e sia $I \in D$ un intervallo, allora se f è convessa in I le derivate destre e sinistre sono finite in ogni punto $x_0 \in I$ e vale la relazione*

$$f'_-(x_0) \le f'_+(x_0) \ . \tag{10.4}$$

Inoltre se f è strettamente convessa la disequazione precedente è, anch'essa, stretta.

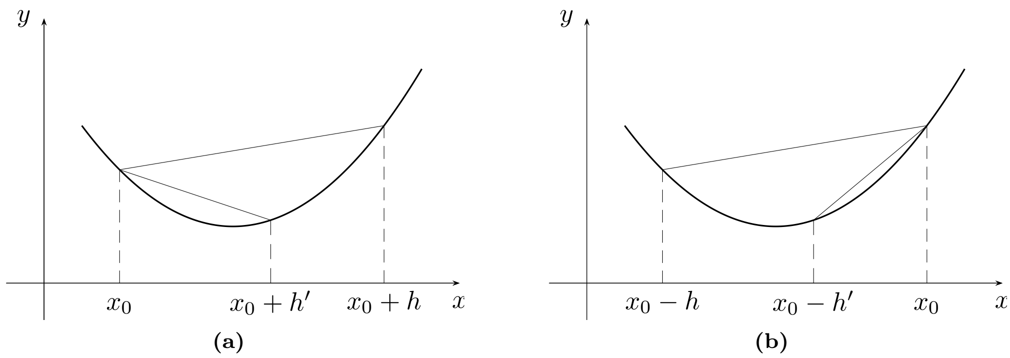


Figura 10.4: Dimostrazione del teorema 10.7.

Dimostrazione (costruttiva)
Usando la disuguaglianza (10.3) fra primo e terzo membro, con $a = x_0 - h'$, $c = x_0$ e $b = x_0 + h$, $0 < h' < h$, si trova

$$\frac{f(x_0) - f(x_0 - h')}{h'} \leq \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \qquad \longrightarrow \qquad R[x_0^-](h') \geq R[x_0^+](h) \ .$$

Da questa disuguaglianza si vede che l'insieme dei rapporti incrementali sinistri $R[x_0^-](h')$ in x_0 è limitato superiormente, quindi, essendo crescente per h che tende a 0, ammette il limite [teorema 6.4] $f'_-(x_0)$; ma dalla stessa disuguaglianza si vede anche che l'insieme dei dei rapporti incrementali destri $R[x_0^+](h')$ in x_0 è limitato inferiormente, quindi, essendo decrescente per h che tende a 0, ammette il limite [teorema 6.4] $f'_+(x_0)$. A questo punto, per il teorema del confronto, la disuguaglianza vale anche per i limiti per h, e quindi h', che tende a zero; e quindi vale la (10.4).
Nel caso che la funzione f sia strettamente convessa, tutti i segni di disuguaglianza nella precedente dimostrazione sono stretti e quindi è stretta anche disuguaglianza della relazione (10.4). □

Teorema 10.9. *Sia $f; D \to \mathbb{R}$ e sia $I \in D$ un intervallo, allora se f è (strettamente) convessa in I le derivate destre e sinistre sono funzioni (strettamente) crescenti in I e vale la relazione*

$$x_1 < x_2 \qquad \longrightarrow \qquad f'_+(x_1) \leq f'_-(x_2) \ . \tag{10.5}$$

La precedente disuguaglianza è stretta nel caso f sia strettamente convessa.

Dimostrazione (costruttiva)
Scelti $h_1, h_2 > 0$ in modo che valga $x_1 - h_1 < x_1 < x_2 - h_2 < x_2$, usando la disuguaglianza (10.3) fra primo e terzo membro, con $a = x_1 - h_1$, $c = x_1$ e $b = x_2$ e quella fra secondo e terzo membro con $a = x_1$, $c = x_2 - h_2$ e $b = x_2$, si trovano (si veda la figura 10.5a):

$$\frac{f(x_1) - f(x_1 - h_1)}{h_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \qquad , \qquad \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x_2 - h_2)}{h_2}$$

da cui

$$\frac{f(x_1) - f(x_1 - h_1)}{h_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x_2 - h_2)}{h_2} \ .$$

La doppia disuguaglianza trovata vale anche per i limiti per h_1 e h_2 che tendono a zero; e quindi vale

$$f'_-(x_1) \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq f'_-(x_2) \qquad \longrightarrow \qquad f'_-(x_1) \leq f'_-(x_2)$$

e quindi, essendo $x_1 < x_2$, la derivata sinistra è crescente.
Similmente, scelti $h_1, h_2 > 0$ in modo che valga $x_1 < x_1 + h_1 < x_2 < x_2 + h_2$, usando la

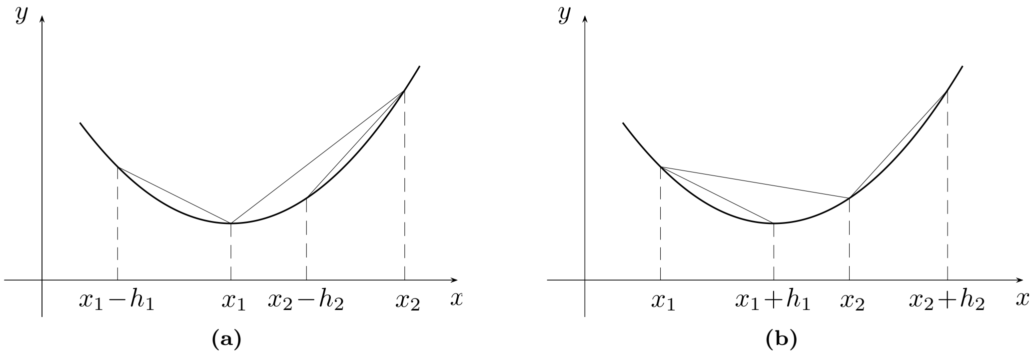


Figura 10.5

disuguaglianza (10.3) fra primo e secondo membro con $a = x_1$, $c = x_1 + h_1$ e $b = x_2$, e quella fra primo e terzo membro con $a = x_1$, $c = x_2$ e $b = x_2 + h_2$, si trova (si veda la figura 10.5b):

$$\frac{f(x_1+h_1)-f(x_1)}{h_1} \leq \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \qquad , \qquad \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \leq \frac{f(x_2+h_2)-f(x_2)}{h_2}$$

da cui

$$\frac{f(x_1+h_1)-f(x_1)}{h_1} \leq \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \leq \frac{f(x_2+h_2)-f(x_2)}{h_2} \; .$$

La doppia disuguaglianza trovata vale anche per i limiti per h_1 e h_2 che tendono a zero; e quindi vale

$$f'_+(x_1) \leq \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \leq f'_+(x_2)$$

da cui

$$f'_+(x_1) \leq f'_+(x_2)$$

e quindi, essendo $x_1 < x_2$, la derivata destra è crescente.

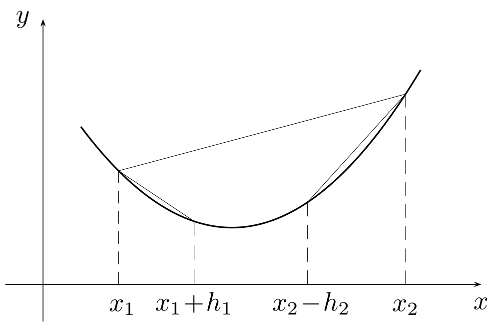


Figura 10.6

Infine, scelti $h_1, h_2 > 0$ in modo che valga

$$x_1 < x_1 + h_1 < x_2 - h_2 < x_2$$

usando la disuguaglianza (10.3) fra primo e secondo membro con $a = x_1$, $c = x_1 + h_1$ e $b = x_2$, e quella fra secondo e terzo membro con $a = x_1$, $c = x_2 - h_2$ e $b = x_2$, si trova (si veda la figura 10.6):

$$\frac{f(x_1+h_1)-f(x_1)}{h_1} \leq \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \qquad , \qquad \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \leq \frac{f(x_2)-f(x_2-h_2)}{h_2}$$

che implica

$$\frac{f(x_1+h_1)-f(x_1)}{h_1} \leq \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \leq \frac{f(x_2)-f(x_2-h_2)}{h_2} \; .$$

La doppia disuguaglianza trovata vale anche per i limiti per h_1 e h_2 che tendono a zero; e quindi vale

$$f'_+(x_1) \le \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \le f'_-(x_2) \qquad \longrightarrow \qquad f'_+(x_1) \le f'_-(x_2) \ ,$$

che è quanto si doveva dimostrare.
Nel caso f sia strettamente crescente tutte le disuguaglianze della precedente dimostrazione sono strette; quindi le derivate destre e sinistre risultano strettamente crescenti e la disequazione (10.5) è anch'essa stretta. □

Corollario 10.10. Sia $f; D \to \mathbb{R}$ e sia $I \in D$ un intervallo, allora se f è convessa in I vale la relazione

$$x_1 < x_2 \qquad \longrightarrow \qquad f'_-(x_1) \le f'_+(x_1) \le f'_-(x_2) \le f'_+(x_2) \ . \tag{10.6}$$

Teorema 10.11. *Sia $f; D \to \mathbb{R}$ e sia $I \in D$ un intervallo; si inoltre f derivabile in I allora f è convessa (concava) in I se e solo se f' è crescente (decrescente) in I; è strettamente convessa (concava) se e solo se f' è strettamente crescente (decrescente).*

Dimostrazione (costruttiva)
Dimostrazione della sufficienza. Se f è derivabile in I scelti $a, b \in I$, tali che siano $a < b$, si consideri la funzione ausiliaria $g : I \to \mathbb{R}$ di equazione

$$g(x) = f(x) - \left[f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) \right] \ ,$$

se f è convessa deve valere $g(x) \le 0$ in I. D'altra parte g è derivabile in I con derivata

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

e deve essere $g'(x) \le 0$ in I. Infatti se fosse $g'(x) > 0$ esisterebbe un intorno destro di a in cui, per il teorema della permanenza del segno, il rapporto incrementale sinistro sarebbe positivo, cioè

$$\frac{g(x) - g(a)}{x - a} > 0 \ .$$

Ma, essendo $g(a) = 0$, questo significa che in tale intorno destro, in cui $x > a$ vale $g(x) > 0$ contro l'ipotesi che f sia convessa. Allo stesso modo si dimostra che deve essere $g'(b) \ge 0$: quindi vale la doppia disuguaglianza

$$f'(a) \le \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \le f'(b) \qquad \longrightarrow \qquad f'(a) < f'(b) \ ,$$

il che dimostra la crescenza di f'.
Se f fosse strettamente convessa e f' non fosse strettamente crescente vi sarebbe un intervallo contenuto in I in cui f' sarebbe costante, cioè esisterebbero $a, b \in I$, tali che sia $a < b$, per i quali si avrebbe

$$f'(a) = f'(x) = f'(b) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \qquad \text{per ogni } x \in [a, b]$$

e quindi la funzione $g(x)$, avendo derivata nulla sarebbe costante e quindi, essendo $g(a) = g(b) = 0$, nulla; contro l'ipotesi di convessità della f.
Se f è (strettamente) concava si ripetono i ragionamenti visti nel caso convesso invertendo tutti i segni di disuguaglianza.
Dimostrazione della necessità. Se f è derivabile in I con derivata prima crescente, scelti $a, b \in I$, tali che sia $a < b$, si consideri ancora la funzione ausiliaria $g : I \to \mathbb{R}$ di equazione

$$g(x) = f(x) - \left[f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(b - a) \right]$$

per cui vale $g(a) = g(b) = 0$; inoltre anche g è derivabile e vale

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \ ;$$

quindi anche g' è crescente. Valgono per g in $[a, b]$ le ipotesi del teorema di Rolle [teorema 9.4], quindi esiste $\xi \in \,]a, b[$ tale che sia

$$g'(\xi) = 0 \ ;$$

quindi essendo g' crescente in $[a, b]$ ma nulla in $\xi \in \,]a, b[$, deve valere $g'(x) < 0$ per $a < x < \xi$ e $g'(x) > 0$ per $\xi < x < b$; quindi g è decrescente in $a < x \le \xi$ e crescente per $\xi \le x < b$ [teorema 9.10]. Quindi si ha

$$\begin{aligned} g(x) &\le g(a) = 0 \quad \text{per } a < x \le \xi \\ g(x) &\le g(b) = 0 \quad \text{per } \xi \le x < b \ . \end{aligned}$$

Quindi $g(x) < 0$ per ogni $x \in \,]a, b[$ e quindi, ricordando la (10.1), si conclude che f è convessa in $]a, b[$. Se f' è strettamente crescente, tutte le disuguaglianze precedenti sono strette e f risulta strettamente convessa.
Se f è (strettamente) concava si ripetono i ragionamenti visti nel caso convesso invertendo tutti i segni di disuguaglianza. □

Teorema 10.12 (Criterio di convessità)**.** *Sia $f; D \to \mathbb{R}$ e sia $I \in D$ un intervallo; si inoltre f derivabile due volte in I allora se f è convessa (concava) in I se e solo se vale $f''(x) \ge 0$ ($f''(x) \le 0$) in I; inoltre è strettamente convessa (concava) se e solo è convessa (concava) e l'insieme in cui vale $f''(x) = 0$ è privo di punti interni.*

Dimostrazione (costruttiva)
È un'immediata conseguenza del teorema precedente e del teorema 9.10 applicato alla funzione f'. □

Teorema 10.13. *Una funzione $f : D \to \mathbb{R}$ derivabile due volte in $[a, b]$ è convessa in $[a, b]$ se e solo se per ogni $x_0 \in [a, b]$ esiste in intorno $I(x_0)$ tale che, per ogni $x \in I_{x_0}$, vale la disuguaglianza*

$$f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) \le f(x) \ ; \tag{10.7}$$

f è concava in $[a, b]$ se e solo se per ogni $x_0 \in [a, b]$ esiste in intorno $I(x_0)$ tale che, per ogni $x \in I_{x_0}$, vale la disuguaglianza

$$f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) \ge f(x) \ . \tag{10.8}$$

Dimostrazione (costruttiva)
Si consideri la funzione $g(x)$ definita da

$$g(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) - f(x) \ .$$

La funzione g ha le seguenti proprietà:

$$\begin{aligned} &g(x_0) = 0 \\ &g'(x) = f'(x_0) - f'(x) \qquad \longrightarrow \qquad g'(x_0) = 0 \\ &g''(x) = -f''(x) \ . \end{aligned}$$

Condizione necessaria. Se f è convessa in $[a, b]$ vale $f''(x) \ge 0$ in $[a, b]$ e quindi, in particolare, $f''(x_0) > 0$; pertanto $g''(x_0) < 0$; la funzione g in x_0 ha quindi un massimo locale ed esiste un intorno $I(x_0)$ tale che per ogni $x \in I(x_0)$ vale

$$g(x) \le g(x_0) \qquad \longrightarrow \qquad f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) - f(x) \le 0 \ .$$

che è la (10.7).
Condizione sufficiente. Se vale la (10.7) in un intorno $I(x_0)$ per ogni $x_0 \in [a, b]$ la funzione g ha in x_0 un massimo locale e quindi vale

$$g''(x_0) \le 0 \qquad \longrightarrow \qquad f''(x_0) \ge 0$$

e quindi f è convessa in $[a, b]$.
La dimostrazione per f concava è analoga e si lascia alla cura del lettore studioso. $\square$

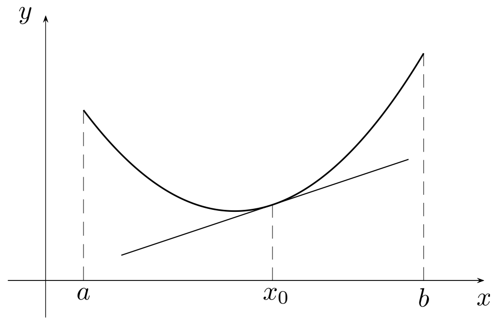


Figura 10.7

Il precedente teorema ha una semplice interpretazione grafica, illustrata dalla figura 10.7 nel caso convesso; poiché la retta di equazione

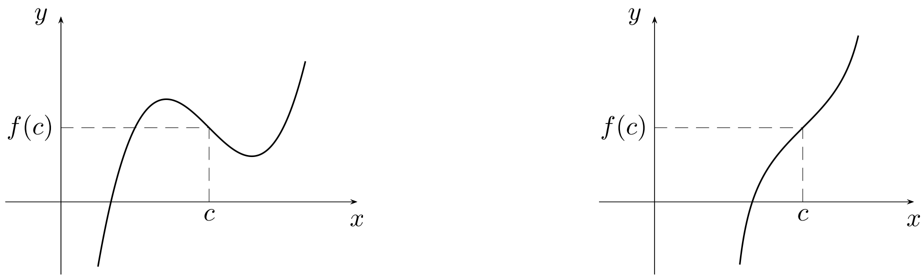
$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

è la tangente al grafico di f nel punto di coordinate $\big(x_0, f(x_0)\big)$, il teorema afferma che una funzione è convessa in $[a, b]$ se in ogni punto di tale intervallo la retta tangente sta al di sotto del grafico della funzione, mentre è concava se sta al di sopra.

Definizione 10.5 (Flesso). Dati la funzione $f : D \to \mathbb{R}$, derivabile in $I \subseteq D$, e il punto $c \in D$, si dice che il punto di coordinate $\big(c, f(c)\big)$ è un *flesso* per la funzione f, se esistono un intorno sinistro $I_-(c)$ e un intorno destro $I_+(c)$ tali che sia

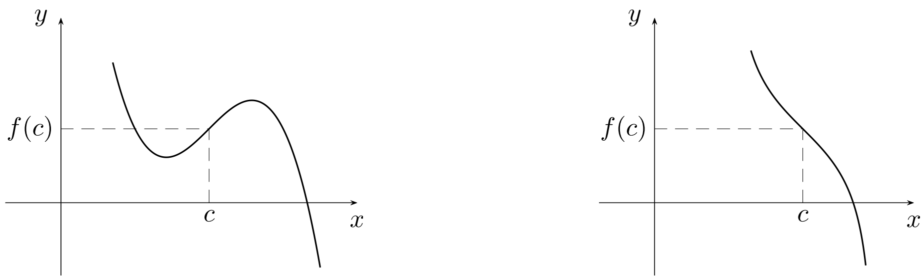
$$f(x) = \begin{cases} \text{convessa} & \text{per } x \in I_-(c) \\ \text{concava} & \text{per } x \in I_+(c) \end{cases} \qquad \text{o} \qquad f(x) = \begin{cases} \text{concava} & \text{per } x \in I_-(c) \\ \text{convessa} & \text{per } x \in I_+(c) \end{cases}$$

nel primo caso il flesso si dice *discendente*, nel secondo si dice *ascendente*.



(a) **(b)**

Figura 10.8: Grafici di funzioni con flesso ascendente.



(a) **(b)**

Figura 10.9: Grafici di funzioni con flesso discendente.

Definizione 10.6 (Flesso a tangente verticale)**.** Data la funzione $f : D \to \mathbb{R}$, continua in $I \subseteq D$ e derivabile in $I \setminus \{c\}$, con $c \in D$, ma tale che esistano infinite e discordi le derivate destra e sinistra in c, allora se in c la funzione passa da concava a convessa o da convessa a concava, nel senso della definizione 10.5, allora si dice che il punto di coordinate $\big(c, f(c)\big)$ è un *flesso a tangente verticale* rispettivamente ascendente e discendente.

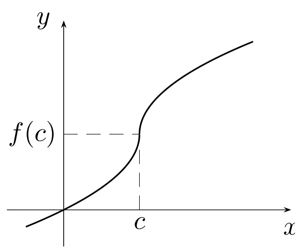


Figura 10.10: Un flesso a tangente verticale.

Teorema 10.14. *La funzione $f : D \to \mathbb{R}$, derivabile in $I \subseteq D$, ha un flesso in $c \in D$ se e solo se la funzione derivata $f'(x)$ ha un estremo locale in c; se tale flesso è ascendente l'estremo è un minimo e se è discendente l'estremo è un massimo.*

Dimostrazione (costruttiva)
Dimostrazione della sufficienza. Se c è un punto di flesso allora esistono un intervallo sinistro $I_-(c)$ ed un intervallo destro $I_+(c)$ per i quali si verificano una delle seguenti due cose. O il flesso è discendente e la funzione è convessa in $I_-(c)$ e concava in $I_+(c)$; in tale caso f' è crescente in $I_-(c)$ e decrescente in $I_+(c)$ [teorema 10.11] e quindi f' ha un massimo locale in c [teorema 10.4]. Oppure il flesso è ascendente e la funzione è concava in $I_-(c)$ e convessa in $I_+(c)$; in tale caso f' è decrescente in $I_-(c)$ e crescente in $I_+(c)$ [teorema 10.11] e quindi f' ha un minimo locale in c

[teorema 10.4].
Dimostrazione della necessità. Se f' ha un minimo locale in c, allora esistono un intervallo sinistro $I_-(c)$ ed un intervallo destro $I_+(c)$ per i quali si ha che $f'(x)$ è decrescente in $I_-(c)$ e crescente in $I_+(c)$ allora $f''(x) \leq 0$ in $I_-(c)$ e $f''(x) \geq 0$ in $I_+(c)$ [teorema 9.10] e quindi f è concava in $I_-(c)$ e convessa in $I_+(c)$ e quindi f ha in c un flesso ascendente. Allo stesso modo si dimostra che se in c f' ha un massimo locale, f ha in c un flesso discendente. □

Si noti che il teorema precedente non vale se f ha in c un flesso a tangente verticale: in tale caso infatti la derivata non è definita poiché le derivate destra e sinistra sono infinite.

Teorema 10.15. *Se la funzione $f : D \to \mathbb{R}$, derivabile in $I \subseteq D$, ha un flesso in $c \in D$ e se $f'(x)$ è derivabile in c, allora $f''(c) = 0$.*

Dimostrazione (costruttiva)
Immediata utilizzando il corollario 9.3. □

Teorema 10.16 (Criterio per l'esistenza dei flessi)**.** *Dati la funzione $f : D \to \mathbb{R}$ ed un punto $c \in D$, tali che f sia continua in un intorno $I(c)$ e derivabile due volte in $I \setminus \{c\}$; allora:*
1. c è un punto di flesso ascendente per f se f è concava in $I_-(c)$ e convessa in $I_+(c)$, cioè se

$$\begin{aligned} f''(x) &\leq 0 && \text{per } x \in I_-(c) \\ f''(x) &\geq 0 && \text{per } x \in I_+(c) \ . \end{aligned}$$

2. c è un punto di flesso discendente per f sef è convessa in $I_-(c)$ e concava in $I_+(c)$, cioè se

$$\begin{aligned} f''(x) &\geq 0 && \text{per } x \in I_-(c) \\ f''(x) &\leq 0 && \text{per } x \in I_+(c) \ . \end{aligned}$$

Dimostrazione (costruttiva)
Immediata utilizzando il teorema 10.12. □

Teorema 10.17 (Metodo delle derivate successive nella determinazione dei flessi)**.** *Sia $f : D \to \mathbb{R}$, e sia $I \subseteq D$ è un intervallo, una funzione derivabile k volte in $c \in I$ e tale che sia*

$$f''(c) = \cdots = f^{(k-1)}(c) = 0 \qquad , \qquad f^{(k)}(c) \neq 0 \ .$$

Allora:
1. Se k è dispari la funzione f ha un flesso in c; in particolare tale flesso è ascendente se $f^{(k)}(c) > 0$ e discendente se $f^{(k)}(c) < 0$.
2. Se k è pari la funzione non ha un flesso in c.

Dimostrazione (costruttiva)
Immediata utilizzando i teoremi 10.14 e 10.5, osservando che una derivata di ordine pari per f è di ordine dispari per f' e viceversa. □

Teorema 10.18. *Sia $f : D \to \mathbb{R}$, derivabile nell'intervallo $I \subseteq D$, allora se f ha un flesso in $c \in I$, definita la funzione*

$$g(x) = f(x) - [f(c) + f'(c)(x - c)] \ ,$$

esistono un intorno sinistro $I_-(c)$ ed un intorno destro $I_+(c)$ di c per i quali si abbia

$$\begin{cases} g(x) \geq 0 & \text{per } x \in I_-(c) \\ g(x) \leq 0 & \text{per } x \in I_+(c) \end{cases} \qquad o \qquad \begin{cases} g(x) \leq 0 & \text{per } x \in I_-(c) \\ g(x) \geq 0 & \text{per } x \in I_+(c) \ . \end{cases}$$

Dimostrazione (costruttiva)
Vale la relazione $g(c) = 0$, inoltre g è derivabile con derivata

$$g'(x) = f'(x) - f'(c) \ .$$

Se f ha in c un flesso ascendente f' ha un minimo locale in c; quindi esiste un intorno di c nel quale si ha

$$f'(x) \leq f'(c) \qquad \longrightarrow \qquad g'(x) \leq 0$$

quindi g è decrescente in tale intorno di c; ma poiché $g(c) = 0$ esistono un intorno sinistro $I_-(c)$ ed un intorno destro $I_+(c)$ di c per i quali

$$\begin{cases} g(x) \leq 0 & \text{per } x \in I_-(c) \\ g(x) \geq 0 & \text{per } x \in I_+(c) \ . \end{cases}$$

L'altro caso si trova se f ha in c un flesso discendente. □

L'equazione $y = f(c) + f'(c)(x - c)$ è quella della retta tangente al grafico di f nel punto di coordinate $\big((c, f(c)\big)$ [definizione 8.3]; pertanto l'interpretazione grafica del teorema precedente è che la tangente al grafico di una funzione in un suo punto di flesso attraversa il grafico.

Sono ora noti tutti gli strumenti per studiare il grafico di una funzione. Nei seguenti esempi si esaminano alcuni casi tipici.

Esempio 71 (Funzione algebrica razionale)**.** Si consideri la funzione $f : D \to \mathbb{R}$ di equazione

$$f(x) = \frac{x}{x^3 - 1} \ ;$$

se ne studino le proprietà e se ne tracci il grafico.
Tenendo presente l'elenco fornito in apertura di capitolo, si analizzano punto per punto tutti gli aspetti.
1. Trattandosi di una funzione razionale, il suo dominio D è costituito da tutti i numeri reali che non annullano il denominatore, quindi

$$D = \big\{x \mid x \in \mathbb{R}, x \neq 1\big\} \ .$$

2. La funzione non presenta né periodicità, né simmetrie; non è né pari né dispari.
3. Per lo studio del segno della funzione occorre studiare il segno del numeratore $\mathcal{N}$ e del denominatore $\mathcal{D}$; vale quindi

$$\begin{aligned} \mathcal{N} \geq 0 \qquad &\longrightarrow \qquad x \geq 0 \\ \mathcal{D} > 0 \qquad &\longrightarrow \qquad x > 1 \end{aligned}$$

a cui si ottiene

$$f(x) \geq 0 \quad \text{per } x \leq 0 \ \vee \ x > 1 \ .$$

In particolare, $f(x) = 0$ per $x = 0$, quindi l'origine è l'unica intersezione della funzione con gli assi coordinati.
4. L'unico punto di discontinuità della funzione si ha per $x = 1$.
5. I limiti rilevanti sono i seguenti:

$$\lim_{x \to 1^\pm} \frac{x}{x^3 - 1} = \pm\infty$$
$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{x}{x^3 - 1} = 0 \ .$$

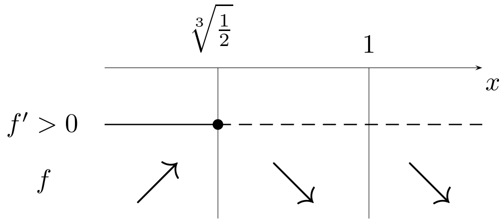
Quindi per $x = 1$ si ha una discontinuità di secondo tipo, e
6. la funzione ha per asintoto verticale e asintoto orizzontale rispettivamente le rette di equazione

$$x = 1 \qquad , \qquad y = 0 \ .$$

7. Per determinare gli intervalli di crescenza e decrescenza della funzione e gli estremi locali, si studia il segno della sua derivata prima [teorema 10.4]:

$$f'(x) = \frac{x^3 - 1 - 3x^3}{(x^3-1)^2} = -\frac{2x^3+1}{(x^3-1)^2} \geq 0 \qquad \longrightarrow \qquad x \leq -\sqrt[3]{\frac{1}{2}} \; .$$

La situazione è riassunta dalla seguente tabella.



La funzione ha quindi un massimo locale nel punto

$$M = \left(-\sqrt[3]{\frac{1}{2}}, \frac{\sqrt[3]{4}}{3} \right) \; .$$

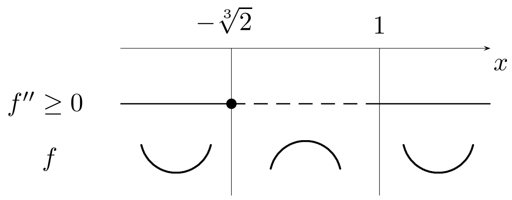
8. Per determinare gli intervalli in cui la funzione è convessa e in cui è concava e i flessi, si studia il segno della derivata seconda [teorema 10.12]:

$$\begin{aligned} f''(x) &= -\frac{6x^2(x^3-1)^2 - 2(x^3-1)3x^2(2x^3+1)}{(x^3-1)^4} = -\frac{6x^2(x^3-1) - 6x^2(2x^3+1)}{(x^3-1)^3} = \\ &= \frac{6x^2(x^3+2)}{(x^3-1)^3} \end{aligned}$$

Quindi vale

$$f''(x) \geq 0 \qquad \longrightarrow \qquad x \leq -\sqrt[3]{2} \;\vee\; x > 1 \; .$$

La situazione è riassunta dalla seguente tabella.



La funzione ha quindi un flesso discendente nel punto

$$F = \left(-\sqrt[3]{2}, \frac{\sqrt[3]{2}}{3} \right) \; .$$

In tale punto il grafico della funzione attraversa la propria retta tangente di equazione

$$y = f'(-\sqrt[3]{2})(x + \sqrt[3]{2}) + \frac{\sqrt[3]{2}}{3} = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}\sqrt[3]{2} \; .$$

Il grafico della funzione è riportato in figura 10.11.

Esempio 72 (Funzione esponenziale)**.** Si consideri la funzione $f : D \to \mathbb{R}$ di equazione

$$f(x) = e^{-1/x^2} \; ;$$

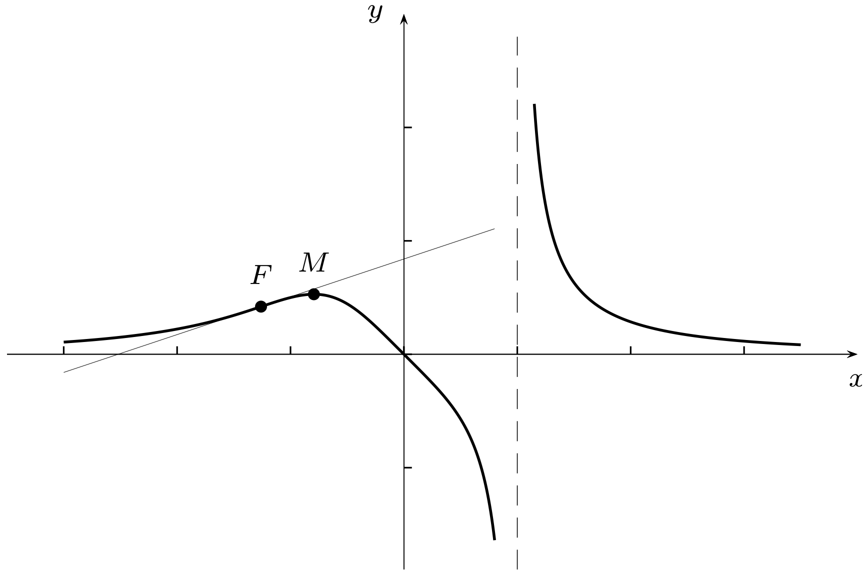


Figura 10.11: Il grafico di $f(x) = \frac{x}{x^3-1}$

se ne studino le proprietà e se ne tracci il grafico.
Tenendo presente l'elenco fornito in apertura di capitolo, si analizzano punto per punto tutti gli aspetti.
1. Si tratta di una funzione composta di una esponenziale, che in sé non presenta problemi di dominio, e di una funzione razionale. Il dominio D è costituito da tutti i numeri reali che non annullano il denominatore della funzione razionale, quindi

$$D = \left\{x \mid x \in \mathbb{R}, x \neq 0\right\} .$$

2. La funzione non è periodica; tuttavia è pari infatti vale

$$f(-x) = e^{-1/(-x)^2} = e^{-1/x^2} = f(x) ;$$

il suo grafico ha quindi per asse di simmetria l'asse delle ordinate.
3. La funzione esponenziale è positiva per ogni x reale; la funzione, quindi, è sempre positiva e non interseca l'asse delle ascisse; poiché $0 \notin D$, la funzione non interseca nemmeno l'asse delle ordinate.
4. L'unico punto di discontinuità della funzione si ha per $x = 0$.
5. I limiti rilevanti sono i seguenti:

$$\lim_{x\to 0^\pm} e^{-1/x^2} = 0 \qquad , \qquad \lim_{x\to\pm\infty} e^{-1/x^2} = 1 .$$

Quindi per $x = 0$ si ha una discontinuità di terzo tipo, o eliminabile; la funzione può quindi essere prolungata per continuità per $x = 0$ [sezione 7.2], ponendo

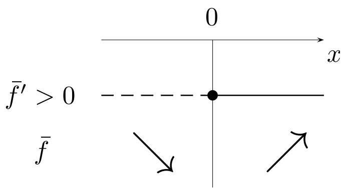
$$\bar{f} = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 . \end{cases}$$

Si studierà quindi la funzione $\bar{f}$, che passa per l'origine e quindi interseca entrambi gli assi in $(0, 0)$ ove si annulla.
6. Dai limiti calcolati sopra risulta che la funzione ha per asintoto orizzontale la retta di equazione

$$y = 1 .$$

7. Per determinare gli intervalli di crescenza e decrescenza della funzione e gli estremi locali, si studia il segno della sua derivata prima [teorema 10.4]:

$$\bar{f}'(x) = \frac{2}{x^3}\, e^{-1/x^2} \geq 0 \qquad \longrightarrow \qquad x \geq 0 .$$



La situazione è riassunta dalla seguente tabella.
La funzione ha quindi un minimo locale nell'origine

$$M = (0, 0) \ .$$

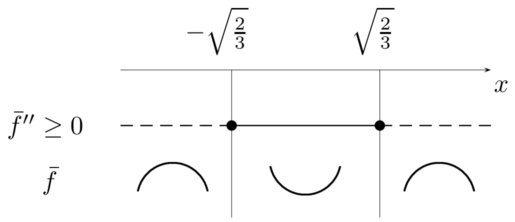
8. Per determinare gli intervalli in cui la funzione è convessa e in cui è concava e i flessi, si studia il segno della derivata seconda [teorema 10.12]:

$$\bar{f}''(x) = -6x^{-4}e^{-1/x^2} + 2x^{-3}2x^{-3}e^{-1/x^2} = 2\frac{2-3x^2}{x^6}e^{-1/x^2} \ .$$

Quindi vale

$$\bar{f}''(x) \geq 0 \qquad \longrightarrow \qquad -\sqrt{\frac{2}{3}} \leq x \leq \sqrt{\frac{2}{3}} \ .$$

La situazione è riassunta dalla seguente tabella.



La funzione ha quindi un flesso ascendente e uno discendente rispettivamente nei punti

$$F_1 = \left(-\sqrt{\frac{2}{3}}, e^{-3/2}\right) \qquad , \qquad F_2 = \left(\sqrt{\frac{2}{3}}, e^{-3/2}\right) \ .$$

In tali punti il grafico della funzione attraversa le proprie rette tangenti rispettivamente di equazione

$$y = \bar{f}'\left(\mp\sqrt{\frac{2}{3}}\right)\left(x \pm \sqrt{\frac{2}{3}}\right) + e^{-3/2} = \pm 3\sqrt{\frac{3}{2}}e^{-3/2}x - 2e^{-3/2} \ .$$

Il grafico della funzione è riportato in figura 10.12.

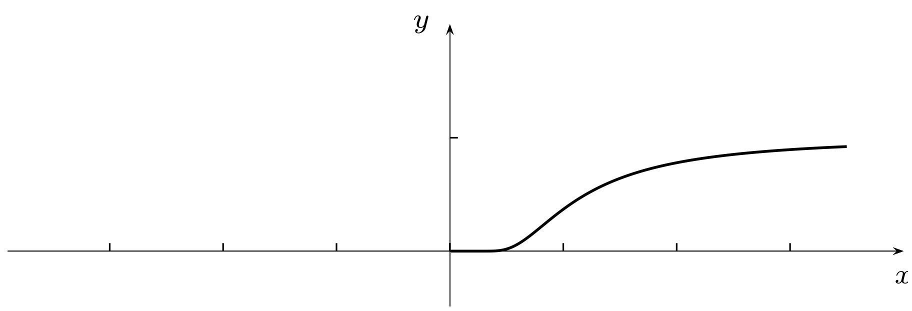


Figura 10.12: Il grafico di $\bar{f}(x) = e^{-1/x^2}$

11

INTEGRAZIONE DELLE FUNZIONI REALI

In questo capitolo si affrontano due problemi. Il primo è quello di misurare l'area della regione di piano compresa fra l'asse delle ascisse e il grafico di una funzione; l'altro è quello di definire l'operazione inversa della derivazione, cioè, data una funzione f, determinare tutte le funzioni di cui f è la derivata. Come si vedrà i due problemi sono strettamente collegati; si comincia con il primo.

11.1. Integrale secondo Riemann

Definizione 11.1 (Suddivisione di un segmento)**.** Dato il segmento $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ e l'insieme finito $\{x_0, \dots, x_n\}$ di $n+1$ punti di $[a,b]$ tali che valga

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b \ ,$$

si dice *suddivisione* $\mathcal{S}$ del segmento $[a,b]$ l'insieme degli n segmenti $A_1, A_2, \dots, A_n$, con

$$A_1 = [x_0, x_1] \quad , \quad A_2 = [x_1, x_2] \quad , \quad \dots \quad , \quad A_n = [x_{n-1}, x_n] \ .$$

Date due diverse suddivisioni $\mathcal{S}$ ed $\mathcal{S}'$ si dice che $\mathcal{S}'$ è *piú fine* di $\mathcal{S}$ se $\mathcal{S} \subset \mathcal{S}'$. La relazione di finezza è una relazione d'ordine; date due qualunque suddivisioni $\mathcal{S}'$ ed $\mathcal{S}''$ di un segmento esiste sempre una suddivisione $\mathcal{S}$ piú fine di entrambe; basta infatti porre $\mathcal{S} = \mathcal{S}' \cup \mathcal{S}''$.

Definizione 11.2 (Somma inferiore e somma superiore)**.** Date la funzione $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ limitata e la suddivisione $\mathcal{S}$ si dicono *somma inferiore* e *somma superiore* di f relative alla suddivisione $\mathcal{S}$ rispettivamente le quantità

$$\sigma_*(\mathcal{S}) = \sum_{i=1}^{n} \ell_{*i}(x_i - x_{i-1}) \qquad , \qquad \sigma^*(\mathcal{S}) = \sum_{i=1}^{n} \ell_i^*(x_i - x_{i-1}) \ ,$$

ove ℓ_{*i} e ℓ_i^* sono rispettivamente l'estremo inferiore e l'estremo superiore della funzione in $A_i = [x_{i-1}, x_i]$, cioè

$$\ell_{*i} = \inf\big(\{y \mid y = f(x) \ , \ x_{i-1} \le x \le x_i\}\big) \qquad , \qquad \ell_i^* = \sup\big(\{y \mid y = f(x) \ , \ x_{i-1} \le x \le x_i\}\big) \ .$$

Teorema 11.1. *Data la funzione $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ limitata, siano $\mathcal{S}$ e $\mathcal{S}'$ due suddivisioni di $[a,b]$ tali che $\mathcal{S}'$ sia piú fine di $\mathcal{S}$, cioè che valga $\mathcal{S} \subset \mathcal{S}'$ allora valgono le disuguaglianze*

$$\sigma_*(\mathcal{S}) \le \sigma_*(\mathcal{S}') \qquad , \qquad \sigma^*(\mathcal{S}) \ge \sigma^*(\mathcal{S}') \ .$$

Dimostrazione (costruttiva)
Basta mostrare la tesi nel caso in cui la suddivisione $\mathcal{S}'$ abbia un solo punto in piú rispetto alla $\mathcal{S}$; aggiungendo infatti un punto alla volta si dimostra il caso generale. Quindi esiste un $\bar{x} \in [a,b]$ diverso da tutti i punti x_i della suddivisione $\mathcal{S}$ tale che sia

$$\mathcal{S}' = \mathcal{S} \cup \{\bar{x}\}$$

e si supponga che $\bar{x}$ si trovi nel segmento A_i e quindi valga $x_{i-1} < \bar{x} < x_i$. Si definisca

$$m_1 = \inf\big(\{y \mid y = f(x) \ , \ x_{i-1} \le x \le \bar{x}\}\big) \qquad , \qquad m_2 = \inf\big(\{y \mid y = f(x) \ , \ \bar{x} \le x \le x_i\}\big) \ ;$$

evidentemente si ha $m_1, m_2 \geq \ell_{*i}$, quindi vale la seguente relazione

$$\begin{aligned}\sigma_*(\mathcal{S}') - \sigma_*(\mathcal{S}) = \sum_{j=1}^{i-1} \ell_{*j}(x_j - x_{j-1}) + m_1(\bar{x} - x_{i-1}) + m_2(x_i - \bar{x}) + \sum_{j=i+1}^{n} \ell_{*j}(x_j - x_{j-1}) - \\ - \sum_{j=1}^{n} \ell_{*j}(x_j - x_{j-1}) = \\ = m_1(\bar{x} - x_{i-1}) + m_2(x_i - \bar{x}) - \ell_{*i}(x_i - x_{i-1}) = \\ = (m_1 - \ell_{*i})(\bar{x} - x_{i-1}) + (m_2 - \ell_{*i})(x_i - \bar{x}) \geq 0 \quad .\end{aligned}$$

La dimostrazione per le somme superiori è analoga e si lascia alla cura del lettore studioso. □

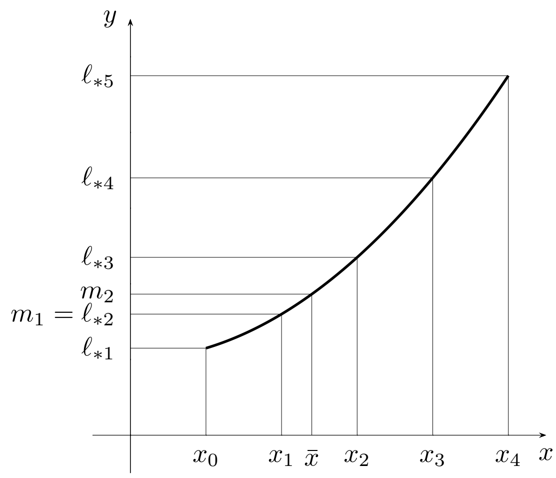


Figura 11.1: L'inserimento di $\bar{x}$ per $n = 4$.

Teorema 11.2. *Data la funzione $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ limitata, siano $\mathcal{S}'$ e $\mathcal{S}''$ due qualsiasi suddivisioni di $[a, b]$; allora valgono le disuguaglianze*

$$\sigma_*(\mathcal{S}') \leq \sigma^*(\mathcal{S}'') \ ,$$

cioè la somma superiore di f relativa a qualsiasi suddivisione è maggiore della somma inferiore di f relativa a qualsiasi altra suddivisione.

Dimostrazione (costruttiva)
La tesi è ovvia se $\mathcal{S}' = \mathcal{S}''$. Se sono diverse, si definisce la suddivisione $\mathcal{S} = \mathcal{S}' \cup \mathcal{S}''$, piú fine di entrambe, allora, per il teorema precedente, si ha

$$\sigma_*(\mathcal{S}') \leq \sigma_*(\mathcal{S}) \leq \sigma^*(\mathcal{S}) \leq \sigma^*(\mathcal{S}'') \ ,$$

che è quanto si doveva dimostrare. □

Corollario 11.3. Dati l'insieme delle somme inferiori e l'insieme delle somme superiori di f, cioè gli insiemi

$$\Sigma_* = \{\sigma_*(\mathcal{S})\} \qquad , \qquad \Sigma^* = \{\sigma^*(\mathcal{S})\}$$

vale la relazione

$$\Sigma_* \leq \Sigma^* \ .$$

Quindi l'insieme di tutte le somme inferiori è superiormente limitato e l'insieme di tutte le somme superiori è inferiormente limitato. Per la completezza dei reali, esiste almeno un elemento separatore dei due insiemi, cioè esiste almeno un numero reale maggiore di tutte le somme inferiori e minore di tutte le somme inferiori.

Definizione 11.3 (Integrabilità secondo Riemann[1]). La funzione limitata $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ si dice *integrabile secondo Riemann* su $[a, b]$ se l'elemento separatore fra l'insieme delle somme inferiori e l'insieme delle somme inferiori di f è unico. In tal caso l'elemento separatore si dice *integrale* della funzione f esteso ad $[a, b]$ e si indica con il simbolo

$$\int_a^b f(x)\,dx \ . \tag{11.1}$$

L'integrale qui definito viene spesso detto *integrale definito*. La funzione f è detta *funzione integranda*. L'insieme $[a, b]$ è detto *intervallo di integrazione*; a e b sono detti *estremi di integrazione*.

Teorema 11.4. *La funzione limitata $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ è integrabile secondo Riemann in $[a, b]$ se e solo se per ogni $\epsilon > 0$ esiste una suddivisione $\mathcal{S}$ tale che valga*

$$\sigma^*(\mathcal{S}) - \sigma_*(\mathcal{S}) < \epsilon \ . \tag{11.2}$$

Dimostrazione (costruttiva)
Basta osservare che la definizione di integrabilità secondo Riemann richiede che gli insiemi Σ_* e Σ_* delle somme superiori ed inferiori di f siano contigui [teorema 1.6]. Si noti che, senza perdere in generalità, le suddivisioni utilizzate per le somme inferiore e superiore possono essere diverse. □

11.2. Integrale come limite di somme

Teorema 11.5. *Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione limitata, e sia $\delta > 0$ un numero reale. Sia inoltre $\mathcal{S}_\delta$ una suddivisione del segmento $[a, b]$ costituita dai punti $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ tale che valga*

$$\max\big(\{x_i - x_{i-1}\}\big) \le \delta$$

e siano $\Sigma_*(\delta)$ e $\Sigma^*(\delta)$ rispettivamente l'insieme delle somme inferiori $\sigma_*(\delta)$ e superiori $\sigma^*(\delta)$ che si costruiscono a partire dalle suddivisioni $\mathcal{S}_\delta$; allora valgono i limiti

$$\lim_{\delta\to 0^+} \sigma_*(\delta) = \sup\big(\Sigma_*(\delta)\big) \qquad , \qquad \lim_{\delta\to 0^+} \sigma^*(\delta) = \inf\big(\Sigma^*(\delta)\big) \ .$$

Dimostrazione (costruttiva)
Data la definizione di estremo inferiore [definizione 1.5], fissato $\epsilon > 0$ esiste una suddivisione formata con i punti $a = \xi_1 < \xi_2 < \cdots < \xi_n = b$, tale che la corrispondente somma superiore

$$s^* = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^*(\xi_i - \xi_{n-1}) \ ,$$

verifichi la disuguaglianza

$$s^* < \inf\big(\Sigma^*(\delta)\big) + \frac{\epsilon}{2} \ .$$

Si scelga allora un reale $\delta > 0$ tale che valgano le due limitazioni

$$\delta < \frac{1}{2}\min\big(\{\xi_i - \xi_{i-1}\}\big) \qquad , \qquad \delta < \frac{\epsilon}{2\ell n} \ ,$$

ove $\ell = \sup\big(f(x)\big)$. Si consideri allora la nuova suddivisione formata da punti $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_m = b$ tale che sia

$$\max\big(\{x_i - x_{i-1}\}\big) \le \delta$$

[1] Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826-1866), matematico tedesco.

e la cui corrispondente somma superiore sia

$$\sigma^*(\delta) = \sum_{i=1}^{m} \ell_i^*(x_i - x_{i-1}) \ ,$$

allora, per la prima delle precedenti limitazioni, fra due punti ξ_{i-1} e ξ_i della prima suddivisione esistono almeno due punti della nuova suddivisione; siano tali punti $x_p, \ldots, x_q$, tali che sia $q - p \geq 1$, cioè valga

$$\xi_{i-1} \leq x_p < x_{p+1} < \cdots < x_q < \xi_i \leq x_{q+1} \ .$$

Allora la parte di somma superiore relativa ai punti $x_p, \ldots, x_{q+1}$ verifica la seguente limitazione

$$\sum_{j=p+1}^{q+1} \ell_j^*(x_j - x_{j-1}) < \lambda_i^* \sum_{j=p+1}^{q} (\xi_i - \xi_{i-1}) + \ell(x_{q+1} - x_q) < \lambda_i^*(\xi_i - \xi_{i-1}) + \ell\delta \ .$$

Sommando tutte le disuguaglianze di questo tipo per $i = 1, \ldots, n$ si trova

$$\sigma^*(\delta) < \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^*(\xi_i - \xi_{i-1}) + \frac{\epsilon}{2} = s^* + \frac{\epsilon}{2} < \inf\big(\Sigma^*(\delta)\big) + \epsilon \ .$$

Questa relazione, insieme alla proprietà per cui l'estremo inferiore di un insieme è minore o uguale ad ogni elemento dell'insieme, dà

$$\inf\big(\Sigma^*(\delta)\big) < \sigma^*(\delta) < \inf\big(\Sigma^*(\delta)\big) + \epsilon$$

e quindi

$$\lim_{\delta\to 0^+} \sigma^*(\delta) = \inf\big(\Sigma^*(\delta)\big) \ .$$

La dimostrazione per il limite delle somme inferiori è analoga e si lascia alla cura del lettore studioso. □

Teorema 11.6. *Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione limitata, e sia $\delta > 0$ un numero reale. Sia inoltre $\mathcal{S}_\delta$ una suddivisione del segmento $[a, b]$ costituita dai punti $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ tale che valga*

$$\max\big(\{x_i - x_{i-1}\}\big) \leq \delta \ ;$$

si inoltre ξ_i un numero reale tale che sia $x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i$ per ogni $i = 1, \ldots, n$ e si consideri la somma

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} \xi_i(x_i - x_{i-1}) \ ;$$

allora se $f(x)$ è integrabile secondo Riemann in $[a, b]$ vale

$$\lim_{\delta\to 0^+} \sigma(\delta) = \int_a^b f(x)\, dx \ .$$

Dimostrazione (costruttiva)
Segue direttamente dal teorema precedente e dal teorema dei due carabinieri [teorema 6.10], osservando che vale

$$\sigma_*(\delta) \leq \sigma(\delta) \leq \sigma^*(\delta)$$

e ricordando la definizione di integrabilità secondo Riemann. □

11.3. Proprietà dell'integrale

Definizione 11.4 (Integrale su un segmento orientato)**.** Se la funzione limitata $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ è integrabile si definisce l'integrale di f anche nei casi in cui il segmento di integrazione non sia orientato positivamente e si pongono:

$$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx \qquad , \qquad \int_a^a f(x)\,dx = 0\ . \tag{11.3}$$

Teorema 11.7. *Sia $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ una funzione limitata, e sia $\mathcal{S}_c$ una suddivisione del segmento $[a,b]$ che abbia c fra i punti della suddivisione, cioè tale che sia $x_i = c$ per qualche i e sia $\mathcal{S}$ una qualsiasi altra suddivisione di $[a,b]$; allora valgono*

$$\sup\big(\{\sigma_*(\mathcal{S}_c)\}\big) = \sup\big(\{\sigma_*(\mathcal{S})\}\big) \qquad , \qquad \inf\big(\{\sigma^*(\mathcal{S}_c)\}\big) = \inf\big(\{\sigma^*(\mathcal{S})\}\big)\ .$$

Dimostrazione (costruttiva)
Poiché le suddivisioni che contengono c sono una sottoclasse di tutte le suddivisioni di $[a,b]$, deve valere

$$\sup\big(\{\sigma_*(\mathcal{S}_c)\}\big) \le \sup\big(\{\sigma_*(\mathcal{S})\}\big)\ .$$

Ma da una qualsiasi suddivisione $\mathcal{S}$ di $[a,b]$ si ottiene una suddivisione di tipo $\mathcal{S}_c$ aggiungendo il punto c ai punti della suddivisione; in questo modo si ottiene una suddivisione piú fine e quindi [teorema 11.1]

$$\sup\big(\{\sigma_*(\mathcal{S}_c)\}\big) \ge \sup\big(\{\sigma_*(\mathcal{S})\}\big)\ .$$

Quindi l'unica possibilità è che valga

$$\sup\big(\{\sigma_*(\mathcal{S}_c)\}\big) = \sup\big(\{\sigma_*(\mathcal{S})\}\big)\ .$$

Analoga è la dimostrazione per le somme superiori. □

Corollario 11.8. Sia $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ una funzione limitata e sia $c\in[a,b]$; allora f è integrabile secondo Riemann se e solo se

$$\sup\big(\{\sigma_*(\mathcal{S}_c)\}\big) = \inf\big(\{\sigma^*(\mathcal{S}_c)\}\big)\ ;$$

quindi è possibile, senza limitazioni di validità, definire l'integrale di f esteso ad $[a,b]$ utilizzando solo suddivisioni che contengano c fra i loro punti.

Teorema 11.9 (Proprietà additiva)**.** *Sia $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ una funzione integrabile su $[a,b]$ e sia $c\in[a,b]$; allora vale*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx\ . \tag{11.4}$$

Dimostrazione (costruttiva)
Si consideri una suddivisione di $[a,b]$ che contenga il punto c [corollario 11.8], allora ogni somma inferiore e superiore si spezzare in due addendi:

$$\sigma_*([a,b]) = \sigma_*([a,c]) + \sigma_*([c,b]) \qquad , \qquad \sigma^*([a,b]) = \sigma^*([a,c]) + \sigma^*([c,b])\ ,$$

ove con il simbolo $\sigma([a,c])$ si intende la somma inferiore fatta su una data suddivisione (che, per semplificare una notazione già abbastanza complicata, non è stata esplicitata) del segmento $[a,c]$. Quindi si ha

$$\sup\big(\{\sigma_*([a,b])\}\big) = \sup\big(\{\sigma_*([a,c])\}\big) + \sup\big(\{\sigma_*([c,b])\}\big) \tag{11.5}$$
$$\inf\big(\{\sigma^*([a,b])\}\big) = \inf\big(\{\sigma^*([a,c])\}\big) + \inf\big(\{\sigma^*([c,b])\}\big)\ . \tag{11.6}$$

Poiché f è integrabile in $[a, b]$, primi membri di queste equazioni sono uguali; per gli altri valgono le relazioni

$$\sup\left(\{\sigma_*([a, c])\}\right) \leq \inf\left(\{\sigma^*([a, c])\}\right) \qquad , \qquad \sup\left(\{\sigma_*([c, b])\}\right) \leq \inf\left(\{\sigma^*([c, b])\}\right) \ .$$

Il segno $<$ in una qualunque di queste due relazioni sarebbe in contraddizione con l'uguaglianza dei primi membri, e quindi con l'integrabilità di f in $[a, b]$; quindi le precedenti relazioni devono valere come uguaglianze; quindi f è integrabile anche in $[a, c]$ e $[c, b]$ e vale la (11.4). □

Teorema 11.10 (Linearità). *Siano $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ due funzioni integrabili secondo Riemann in $[a, b]$ e siano α, β due numeri reali; allora la funzione $\alpha f + \beta g$ è integrabile secondo Riemann in $[a, b]$ e vale*

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g)(x)\, dx = \alpha \int_a^b f(x)\, dx + \beta \int_a^b g(x)\, dx \ . \tag{11.7}$$

Dimostrazione (costruttiva)
Ricordando che se una funzione è integrabile secondo Riemann il suo integrale è il limite di una somma [teorema 11.6], la tesi si ha applicando il limite per δ che tende a zero ai due membri dell'identità

$$\sum_{i=1}^{n} [\alpha f(\xi_i) + \beta g(\xi_i)](x_i - x_{i-1}) = \alpha \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) + \beta \sum_{i=1}^{n} g(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$$

e ricordando il corollario 6.19. □

Teorema 11.11. *Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione non negativa in $[a, b]$, cioè tale che valga $f(x) \geq 0$ per ogni $x \in [a, b]$; allora, se f è integrabile secondo Riemann in $[a, b]$ il suo integrale è non negativo, cioè vale*

$$\int_a^b f(x)\, dx \geq 0 \ .$$

Dimostrazione (costruttiva)
Ricordando che se una funzione è integrabile secondo Riemann il suo integrale è il limite di una somma [teorema 11.6], la tesi segue dal teorema del confronto [teorema 6.9]. □

Teorema 11.12 (Isotonía). *Siano $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ due funzioni integrabili secondo Riemann in $[a, b]$, tali che valga $f(x) \leq g(x)$ per ogni $x \in [a, b]$, allora vale*

$$\int_a^b f(x)\, dx \leq \int_a^b g(x)\, dx \ . \tag{11.8}$$

Dimostrazione (costruttiva)
Segue dal teorema 11.11 applicato alla funzione $g - f$, utilizzando (11.7). □

Teorema 11.13 (Disuguaglianza fondamentale). *Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione integrabile secondo Riemann in $[a, b]$ allora anche la funzione $|f|$ è integrabile secondo Riemann in $[a, b]$ e vale*

$$\left| \int_a^b f(x)\, dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|\, dx \ . \tag{11.9}$$

Dimostrazione (costruttiva)
Data una suddivisione $\mathcal{S}$, siano ℓ_{*i} e ℓ_i^* gli estremi di f in $[x_{i-1}, x_i]$ e siano $|\ell|_{*i}$ e $|\ell|_i^*$ gli estremi di $|f|$ in $[x_{i-1}, x_i]$; allora, se f non cambia segno in $[a, b]$, si ha

$$|\ell|_i^* - |\ell|_{*_i} = \ell_i^* - \ell_{*_i}$$

e quindi le differenze fra le somme superiori ed inferiori sono uguali:

$$\sigma^*(\mathcal{S}, |f|) - \sigma_*(\mathcal{S}, |f|) = \sigma^*(\mathcal{S}, f) - \sigma_*(\mathcal{S}, f) \ .$$

Se, viceversa, f cambia segno si ha

$$|\ell|_i^* - |\ell|_{*_i} \le |\ell|_i^* = \max(\ell_i^*, |\ell|_{*_i}) < \ell_i^* + |\ell|_{*_i} = \ell_i^* - |\ell|_{*_i} \ ;$$

pertanto la differenza fra la somma superiore ed inferiore della funzione $|f|$ è minore di quella della funzione f:

$$\sigma^*(\mathcal{S}, |f|) - \sigma_*(\mathcal{S}, |f|) \le \sigma^*(\mathcal{S}, f) - \sigma_*(\mathcal{S}, f) \ .$$

Allora, per il teorema 11.4, se f è integrabile secondo Riemann per ogni $\epsilon > 0$ è possibile trovare una suddivisione $\mathcal{S}$ per la quale si abbia:

$$\sigma^*(\mathcal{S}, f) - \sigma_*(\mathcal{S}, f) < \epsilon \ ,$$

ma, per la precedente disuguaglianza, per lo stesso ϵ vale anche

$$\sigma^*(\mathcal{S}, |f|) - \sigma_*(\mathcal{S}, |f|) < \epsilon$$

e quindi anche la funzione $|f|$ è integrabile secondo Riemann.
La disuguaglianza fondamentale (11.9), poi, segue dalla relazione

$$-|f(x)| \le f(x) \le |f(x)|$$

e dalla (11.8). □

Definizione 11.5 (Media di una funzione)**.** Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione integrabile secondo Riemann in $[a, b]$; si dice *media*, o *valor medio* di f in $[a, b]$ il numero

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\, dx \ . \tag{11.10}$$

Teorema 11.14 (della media)**.** *Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione integrabile secondo Riemann in $[a, b]$; allora la sua media in $[a, b]$ è compresa fra l'estremo inferiore e l'estremo superiore di f in $[a, b]$.*

Dimostrazione (costruttiva)
Fra tutte le possibili suddivisioni di $[a, b]$ si scelga quella costituita dall'unico intervallo $[a, b]$; per questa scelta si ha

$$\ell_* = \inf\big(f([a, b])\big) \qquad , \qquad \ell^* = \sup\big(f([a, b])\big) \ .$$

Allora si ha

$$\ell_*(b-a) = \sigma_* \le \int_a^b f(x)\, dx \le \sigma^* = \ell^*(b-a) \ ,$$

da cui dividendo per $b - a$, si trova

$$\ell_* \le \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\, dx \le \ell^* \ ,$$

che è quanto si doveva dimostrare. □

Corollario 11.15 (Maggiorazione dell'integrale)**.** Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione integrabile secondo Riemann in $[a, b]$ e sia $\ell = \max(|\ell_*|, \ell^*)$, allora vale

$$\left| \int_a^b f(x)\, dx \right| \le \ell |b - a| \ . \tag{11.11}$$

Teorema 11.16 (della media per funzioni continue)**.** *Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua; allora esiste $\xi \in \,]a, b[$ tale che sia*

$$f(\xi) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\, dx \ . \tag{11.12}$$

Dimostrazione (costruttiva)
Segue immediatamente dal corollario 7.8 applicato alla funzione f, per il quale la funzione f deve assumere tutti i valori compresi fra ℓ_* ed ℓ^*. □

11.4. Interpretazione geometrica dell'integrale

Le somme inferiore e superiore di una funzione relative ad una suddivisione e l'integrale di una funzione esteso ad $[a, b]$ hanno un'importante interpretazione geometrica.

Definizione 11.6 (Trapezoide)**.** Data la funzione positiva $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, si dice *trapezoide* $\mathcal{T}$ sotteso dal grafico di f nel segmento $[a, b]$ la regione di piano compresa fra il grafico di f e l'asse delle ascisse, cioè

$$\mathcal{T} = \big\{(x, y) \mid a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\big\} .$$

Definizione 11.7 (Plurirettangolo)**.** Si dice *plurirettangolo* l'unione di un numero finito di rettangoli disgiunti.

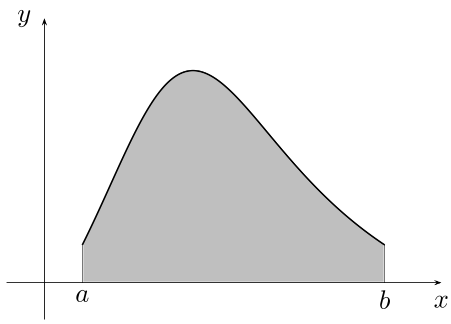
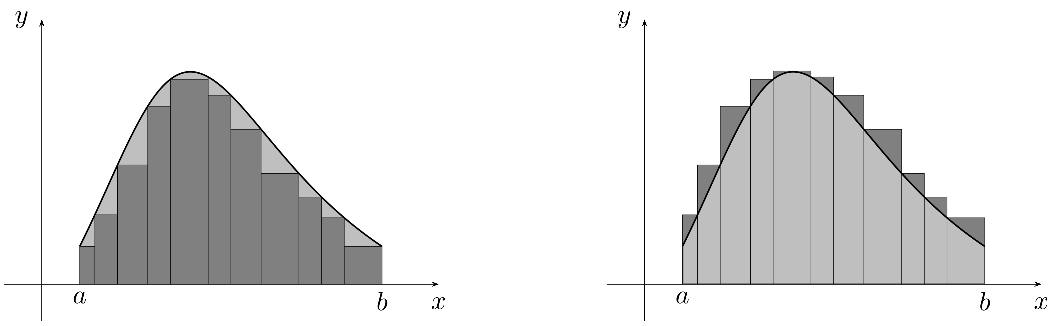


Figura 11.2: Il trapezoide $\mathcal{T}$.

Con tali definizioni è chiaro che la somma inferiore di f relativa alla suddivisione $\mathcal{S}$ è uguale all'area di un plurirettangolo $\mathcal{P}_*(\mathcal{S})$ contenuto nel trapezoide costituito dall'unione di rettangoli aventi per base i segmenti A_i della suddivisione e per altezza le quantità ℓ_{*i}; allo stesso modo la somma superiore di f relativa alla suddivisione $\mathcal{S}$ è uguale all'area di un plurirettangolo $\mathcal{P}^*(\mathcal{S})$ contenente il trapezoide costituito dall'unione di rettangoli aventi per base i segmenti A_i della suddivisione e per altezza le quantità ℓ_i^*: la situazione è illustrata in figura 11.3 dove i rettangoloidi sono evidenziati in un grigio piú scuro rispetto a quello del trapezoide.



(a) Il plurirettangolo $\mathcal{P}_*(\mathcal{S})$ **(b)** Il plurirettangolo $\mathcal{P}^*(\mathcal{S})$

Figura 11.3: Il plurirettangolo contenuto in $\mathcal{T}$ e quello contenente $\mathcal{T}$.

Evidentemente vale la doppia disuguaglianza

$$\text{Area}\big(\mathcal{P}_*(\mathcal{S})\big) \leq \text{Area}(\mathcal{T}) \leq \text{Area}\big(\mathcal{P}^*(\mathcal{S})\big) .$$

E quindi se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ è positiva e integrabile secondo Riemann in $[a, b]$ le somme inferiori e superiori sono contigue e quindi sono contigue le aree dei plurirettangoli $\mathcal{P}_*(\mathcal{S})$ e $\mathcal{P}^*(\mathcal{S})$ e quindi l'area del trapezoide $\mathcal{T}$ sotteso dal grafico di f nel segmento $[a, b]$ viene a coincidere con l'integrale di f. Questa analisi è compendiata nella seguente definizione.

Definizione 11.8 (Area del trapezoide)**.** Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione positiva e integrabile secondo Riemann su $[a, b]$, si dice area del trapezoide $\mathcal{T}$ sotteso dal grafico di f nel segmento $[a, b]$ l'integrale di f esteso ad $[a, b]$, cioè

$$\int_a^b f(x)\, dx = \text{Area}(\mathcal{T}) \ . \tag{11.13}$$

L'interpretazione geometrica dell'integrale come area si estende naturalmente dal caso delle funzioni integrabili e positive in $[a, b]$ a quello delle funzioni integrabili che cambiano segno in $[a, b]$.

Teorema 11.17. *Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione integrabile secondo Riemann su $[a, b]$, e tale che sia $f(x) \geq 0$ per $a \leq x \leq c$ e $f(x) \leq 0$ per $c \leq x \leq b$. Allora, indicando con $\mathcal{T}_+$ il trapezoide sotteso dal grafico di f nel segmento $[a, c]$ e con $\mathcal{T}_-$ il trapezoide sotteso dal grafico di f nel segmento $[c, b]$, vale*

$$\int_a^b f(x)\, dx = \text{Area}(\mathcal{T}_+) - \text{Area}(\mathcal{T}_-) \ . \tag{11.14}$$

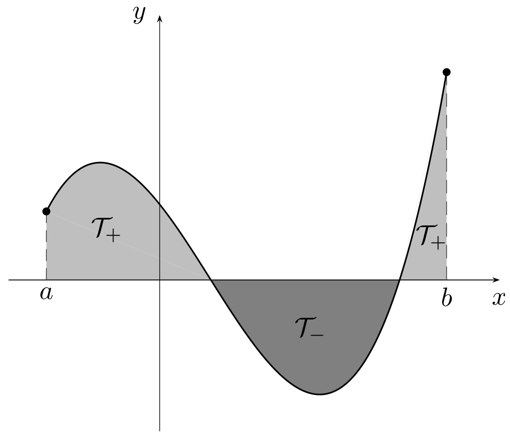


Figura 11.4: L'integrale di una funzione non positiva.

Dimostrazione (costruttiva)
Vale infatti, equazione (11.4),

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx = \int_a^c f(x)\, dx - \int_c^b \big[-f(x)\big]\, dx \ ;$$

in entrambi gli integrali dell'ultimo membro la funzione integranda è positiva, quindi si può applicare la definizione (11.13) e ottenere la (11.14). □

In figura 11.4 è raffigurato il caso di una funzione che cambia segno due volte in $[a, b]$; in grigio chiaro sono rappresentati i trapezoidi con area positiva e in grigio scuro quello con area negativa. L'integrale definito della funzione esteso ad $[a, b]$, quindi, risolve il primo dei due problemi esposti in apertura di capitolo.

11.5. Funzioni integrabili

Teorema 11.18 (Integrabilità delle funzioni monotòne)**.** *Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione limitata e monotòna, allora è integrabile secondo Riemann in $[a, b]$.*

Dimostrazione (costruttiva)
Sia f monotòna crescente; allora data la suddivisione $\mathcal{S}$ costituita dai punti $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$, vale

$$\ell_{*i} = f(x_{i-1}) \leq f(x_i) = \ell_i^* \ ;$$

allora, posto $\delta = \max(x_i - x_{i-1})$, vale

$$\sigma^*(\mathcal{S}) - \sigma_*(\mathcal{S}) = \sum_{i=1}^{n} (\ell_i^* - \ell_{*i})(x_i - x_{i-1}) \le \delta \sum_{i=1}^{n} (\ell_i^* - \ell_{*i}) = \delta \sum_{i=1}^{n} \big[f(x_i) - f(x_{i-1}) \big] = \\ = \delta \big[f(b) - f(a) \big] \ .$$

Posto quindi $\epsilon = \delta\big[f(b) - f(a)\big]$ e, osservando che ϵ può essere scelto arbitrariamente variando la suddivisione, si ottiene la tesi [teorema 11.4].
Analoga è la dimostrazione nel caso f sia decrescente. □

Teorema 11.19 (Integrabilità delle funzioni continue). *Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua, allora è integrabile secondo Riemann in $[a, b]$.*

Dimostrazione (costruttiva)
Se f è continua nel chiuso e limitato $[a, b]$, in ogni $A_i = [x_{i-1}, x_i]$ la funzione ammette un massimo e un minimo [teorema 7.11]; siano dunque

$$\ell_{*i} = \min\big(f(A_i)\big) \qquad , \qquad \ell_i^* = \max\big(f(A_i)\big) \ .$$

inoltre f è uniformemente continua [teorema 7.57], quindi per ogni $\epsilon > 0$ è possibile scegliere, la suddivisione $\mathcal{S}$ di $[a, b]$ in modo tale che esista

$$\delta = \max(x_i - x_{i-1})$$

tale che valga

$$\ell_i^* - \ell_{*i} < \epsilon \ .$$

Per una tale suddivisione, quindi, si ha

$$\sigma^*(\mathcal{S}) - \sigma_*(\mathcal{S}) = \sum_{i=1}^{n} (\ell_i^* - \ell_{*i})(x_i - x_{i-1}) < \epsilon \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) = \epsilon(b - a)$$

e, vista l'arbitrarietà di $\epsilon(b - a)$, la tesi segue dal teorema 11.4. □

Teorema 11.20 (Integrabilità delle funzioni continue quasi ovunque). *Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua in tranne che in un numero finito di punti $c_1 < \cdots < c_n$ di $[a, b]$ in cui f presenta una discontinuità del primo tipo; allora la funzione è integrabile secondo Riemann in $[a, b]$ e vale*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^{c_1} f(x)\,dx + \int_{c_1}^{c_2} f(x)\,dx + \cdots + \int_{c_{n-1}}^{c_n} f(x)\,dx + \int_{c_n}^{b} f(x)\,dx \ .$$

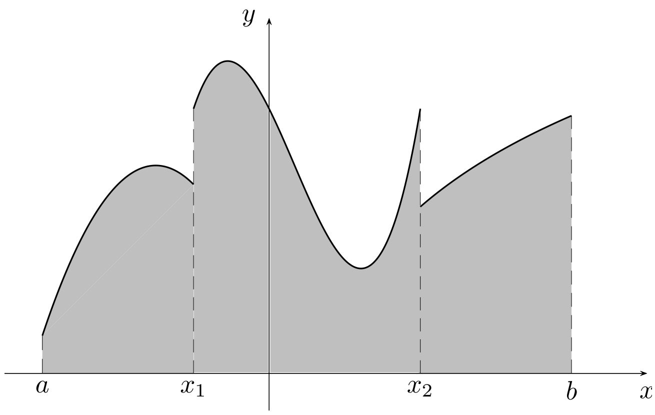


Figura 11.5: Due punti di discontinuità

Dimostrazione (costruttiva)
Si presenta la dimostrazione per un punto di discontinuità, essendo la dimostrazione generale solamente piú complicata dal punto di vista della notazione (in figura 11.5 è illustrato un esempio con due punti di discontinuità). Sia quindi c un punto di discontinuità del primo tipo, tale cioè che i limiti destro e sinistro di f in c siano finiti ma diversi. Si scelga allora una suddivisione di $[a, b]$ che contenga il punto c [corollario 11.8], esista cioè un $x_k \in \,]a, b[$ tale che sia $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_k = c < \cdots < x_n = b$. Si definiscono allora, eventualmente utilizzando il prolungamento per continuità in c, due funzioni continue $f_1 : [a, c] \to \mathbb{R}$ ed $f_2 : [c, b] \to \mathbb{R}$; tali funzioni sono integrabili secondo Riemann nei loro rispettivi domini; per ogni $\epsilon/2 > 0$ quindi devono esistere due suddivisioni $\mathcal{S}_1$ e $\mathcal{S}_2$ per le quali si abbia

$$\sigma^*(\mathcal{S}_1, f_1) - \sigma_*(\mathcal{S}_1, f_1) < \frac{\epsilon}{2} \qquad , \qquad \sigma^*(\mathcal{S}_2, f_2) - \sigma_*(\mathcal{S}_2, f_2) < \frac{\epsilon}{2} \ .$$

Vale allora, dove ciascuna somma è fatta sulla corrispondente suddivisione [teorema 11.4],

$$\sigma_*(\mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2, f) = \sigma_*(\mathcal{S}_1, f_1) + \sigma_*(\mathcal{S}_2.f_2) \qquad , \qquad \sigma^*(\mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2, f) = \sigma^*(\mathcal{S}_1, f_1) + \sigma^*(\mathcal{S}_2.f_2)$$

e quindi

$$\sigma^*(\mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2, f) - \sigma_*(\mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2, f) = \big[\sigma^*(\mathcal{S}_1, f_1) - \sigma_*(\mathcal{S}_1, f_1)\big] + \big[\sigma^*(\mathcal{S}_2, f_2) - \sigma_*(\mathcal{S}_2, f_2)\big] < \epsilon \ ;$$

pertanto anche f è integrabile e vale

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx \ ,$$

come si doveva dimostrare. □

11.6. Il teorema fondamentale del calcolo integrale

Definizione 11.9 (Funzione integrale)**.** Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione integrabile secondo Riemann in $[a, b]$; allora la funzione $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ di equazione

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt \tag{11.15}$$

è detta *funzione integrale* di f.

Teorema 11.21. *Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione integrabile secondo Riemann in $[a, b]$ e sia $c \in \,]a, b[$ allora la differenza di due funzioni integrali di f su $[a, b]$ e su $[c, b]$ è una costante.*

Dimostrazione (costruttiva)
Vale infatti, equazioni (11.3) e (11.4),

$$\int_a^x f(t)\,dt - \int_c^x f(t)\,dt = \int_a^x f(t)\,dt + \int_x^c f(t)\,dt = \int_a^c f(t)\,dt$$

che non dipende da x e dunque è costante. □

Definizione 11.10 (Funzione primitiva)**.** Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione; allora la funzione g si dice *primitiva* di f in $[a, b]$ se g è derivabile in $[a, b]$ e vale $g'(x) = f(x)$ per ogni $x \in [a, b]$.

Teorema 11.22 (Teorema di Torricelli[2]-Barrow[3])**.** *Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua in $[a, b]$; allora la funzione integrale $F(x)$ è derivabile in ogni $c \in [a, b]$ e vale*

$$F'(c) = f(c) \ , \tag{11.16}$$

cioè F è una primitiva di f in $[a, b]$.

[2] Evangelista Torricelli (1608-1647), matematico e fisico italiano.
[3] Isaac Barrow (1630-1677), matematico inglese.

Dimostrazione (costruttiva)
Utilizzando (11.3) e (11.4), si ha

$$F(x) - F(c) = \int_a^x f(t)\,dt - \int_a^c f(t)\,dt = \int_c^x f(t)\,dt \ ;$$

quindi il rapporto incrementale della funzione integrale $F(x)$ diventa

$$\frac{F(x) - F(c)}{x - c} = \frac{1}{x - c}\int_c^x f(t)\,dt \ .$$

Ma f è continua, quindi si può applicare il teorema della media per funzioni continue, equazione (11.12), quindi esiste un $\xi \in]c, x[$ per il quale si ha

$$\frac{F(x) - F(c)}{x - c} = f(\xi) \ .$$

Ora poiché $c < \xi < x$ esiste un reale α tale che valga $0 < \alpha < 1$ tale che si abbia $\xi = c + \alpha(x - c)$. Calcolando il limite per x che tende a c, tenendo ancora conto della continuità di f, si ha dunque

$$\lim_{x\to c}\frac{F(x) - F(c)}{x - c} = \lim_{x\to c} f[c + \alpha(x - c)] = f(c) \ ,$$

quindi $F(x)$ è derivabile e vale la (11.16). □

Teorema 11.23. *Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua in $[a, b]$; allora la funzione integrale $F(x)$ è continua in $[a, b]$.*

Dimostrazione (costruttiva)
Nei punti interni ad $[a, b]$, ove la $F(x)$ è derivabile, essa è senz'altro continua [teorema 8.3]. Resta da dimostrare la continuità in a e b. Si deve mostrare quindi che

$$\lim_{x\to a^+} F(x) = F(a) = \int_a^a f(t)\,dt = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to b^-} F(x) = F(b) = \int_a^b f(t)\,dt$$

infatti, posto $\epsilon = \ell(b - a)$, con $\ell = \max(|\ell_*|, \ell^*)$, vale [equazione (11.11)],

$$|F(x)| = \left|\int_a^x f(t)\,dt\right| \le \ell(x - a) < \ell(b - a) = \epsilon$$

basta quindi scegliere $\delta = \epsilon/\ell$ e si ha che la precedente relazione è vera per x tale che sia $0 < x - a < \delta$, cioè per $a < x < a + \epsilon$, come si doveva dimostrare. Per la continuità in b si ha, per lo stesso ϵ

$$|F(x) - F(b)| = \left|\int_a^x f(t)\,dt - \int_a^b f(t)\,dt\right| = \left|\int_b^x f(t)\,dt\right| \le \ell(b - x) < \ell(b - a) = \epsilon$$

basta quindi scegliere ancora $\delta = \epsilon/\ell$ e si ha che la relazione precedente è vera per $0 < b - x < \epsilon$, cioè per $b - \epsilon < x < b$ che è quanto si doveva mostrare. □

Teorema 11.24. *Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua in $[a, b]$; allora la funzione $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ è una primitiva di f in $[a, b]$ se e solo se esiste un numero reale k tale che sia*

$$g(x) = \int_a^x f(t)\,dt + k \ . \tag{11.17}$$

Dimostrazione (costruttiva)
Dimostrazione della necessità. Occorre dimostrare che una funzione g di equazione (11.17) è una primitiva, cioè che vale $g'(x) = f(x)$; è una immediata conseguenza del teorema di Torricelli-Barrow e del fatto che la derivata di una costante è nulla.

Dimostrazione della sufficienza. Il teorema di Torricelli-Barrow fornisce una primitiva di f in $[a,b]$ avente equazione

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

che è la (11.17) con $k = 0$; occorre mostrare che se anche la funzione $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ è una primitiva di f in $[a,b]$ allora esiste un numero reale k tale che sia $g = F + k$. Se F e g sono entrambe primitive vale infatti, per ogni $x \in [a,b]$

$$D(g - F)(x) = g'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0\ .$$

Ma allora $g - F$ è costante in $[a,b]$ [corollari 9.8 e 9.9]; quindi esiste un numero reale k tale che valga, per ogni $x \in [a,b]$ $g(x) = F(x) + k$ e quindi

$$g(x) = \int_a^x f(t)\,dt + k\ . \qquad \square$$

Teorema 11.25 (Teorema fondamentale del calcolo integrale[4])**.** *Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua in $[a,b]$ e $F(x)$ è una sua primitiva allora vale*

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)\ . \tag{11.18}$$

Dimostrazione (costruttiva)
Se F è una qualunque primitiva può essere scritta nella forma (11.17) e quindi vale

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(t)\,dt + k - \left(\int_a^a f(t)\,dt + k\right) = \int_a^b f(t)\,dt\ ,$$

ove si è usata la seconda delle (11.3). $\square$

Una volta determinata la primitiva F, per indicare la quantità $F(b) - F(a)$ si usa il simbolo $[F(x)]_a^b$. Si scrive cioè

$$\int_a^b f(x)\,dx = \Big[F(x)\Big]_a^b\ .$$

Il teorema fondamentale del calcolo integrale ha alcune importanti conseguenze.

Teorema 11.26. *Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile con derivata continua (cioè è di classe $\mathcal{C}^1$) in $[a,b]$; allora vale*

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)\,dt\ . \tag{11.19}$$

Dimostrazione (costruttiva)
Basta osservare che f è una primitiva di f' e che valgono le ipotesi del teorema fondamentale del calcolo integrale, quindi si ha

$$f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t)\,dt\ ,$$

da cui la tesi. $\square$

Teorema 11.27. *Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua in $[a,b]$ e siano $g, h : D \to [a,b]$ due funzioni derivabili in D, allora la funzione $G : D \to \mathbb{R}$ di equazione*

$$G(x) = \int_{g(x)}^{h(x)} f(t)\,dt$$

è derivabile in D e vale

$$G'(x) = f[h(x)] \cdot h'(x) - f[g(x)] \cdot g'(x)\ . \tag{11.20}$$

[4] Noto anche con il nome di *formula di Newton-Leibniz*.

Dimostrazione (costruttiva)
Per il teorema di Torricelli-Barrow f ammette per primitiva la funzione integrale

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt\ ;$$

quindi, utilizzando il teorema fondamentale del calcolo integrale, si ha

$$G(x) = F[h(x)] - F[g(x)]\ .$$

Pertanto la derivabilità di G segue dal teorema di derivazione della funzione composta [teorema 8.14]; quindi, usando la (8.11), si ha

$$G'(x) = F'[h(x)]\cdot h'(x) + F'[g(x)]\cdot g'(x) = f[h(x)]\cdot h'(x) - f[g(x)]\cdot g'(x)\ ,$$

come si doveva dimostrare. □

11.7. Integrale indefinito

Definizione 11.11 (Integrale indefinito)**.** Data una funzione $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, si dice *integrale indefinito* di f l'insieme di tutte le primitive di f e si indica con il simbolo

$$\int f(x)\,dx\ . \tag{11.21}$$

Dalla (11.17), è noto che l'integrale indefinito di una funzione è costituito dalla funzione integrale piú un'arbitraria costante additiva k. Questo consente di elencare senz'altro le regole di integrazione indefinita riportate nella tabella 11.1, ottenute invertendo la tabella di derivazione delle funzioni elementari 8.1. A questi integrali sono stati affiancati quelli da utilizzare nel caso siano da integrare funzioni composte di funzioni elementari.

$$\int x^\alpha\,dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + k \qquad \int [f(x)]^\alpha f'(x)\,dx = \frac{[f(x)]^{\alpha+1}}{\alpha+1} + k \qquad \text{se } \alpha \neq 1 \tag{11.22}$$

$$\begin{aligned}
&\int \frac{1}{x}\,dx = \log|x| + k && \int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \log|f(x)| + k\\
&\int a^x\,dx = \frac{1}{\log a}a^x + k && \int a^{f(x)} f'(x)\,dx = \frac{1}{\log a}a^{f(x)} + k\\
&\int \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x + k && \int \operatorname{sen}[f(x)]f'(x)\,dx = -\cos[f(x)] + k \qquad (11.23)\\
&\int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x + k && \int \cos[f(x)]f'(x)\,dx = \operatorname{sen}[f(x)] + k\\
&\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \operatorname{tg} x + k && \int \frac{f'(x)}{\cos^2[f(x)]}\,dx = \operatorname{tg}[f(x)] + k\\
&\int \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}\,dx = -\operatorname{cotg} x + k && \int \frac{f'(x)}{\operatorname{sen}^2[f(x)]}\,dx = -\operatorname{cotg}[f(x)] + k\\
&\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \operatorname{arctg} x + k && \int \frac{f'(x)}{1+[f(x)]^2}\,dx = \operatorname{arctg}[f(x)] + k\\
&\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arcsen} x + k && \int \frac{1}{\sqrt{1-[f(x)]^2}} = \operatorname{arcsen}[f(x)] + k
\end{aligned}$$

Tabella 11.1: Regole di integrazione indefinita

Esempio 73. Si calcoli l'integrale indefinito

$$\int x(x^2-3)^3\,dx\ .$$

Si può riscrivere

$$\frac{1}{2}\int 2x(x^2-3)^3\,dx\ ;$$

l'integrale è quindi della forma (11.22) con $f(x)=x^2-3$ e $\alpha=3$, quindi si ha

$$\int x(x^2-3)^3\,dx=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}(x^2-3)^4+k=\frac{1}{8}(x^2-4)^4\ .$$

Esempio 74. Si calcoli l'integrale indefinito

$$\int \frac{1}{x}\operatorname{sen}\log x\,dx\ .$$

Si tratta di un integrale della forma (11.23), con $f(x)=\log x$ e quindi

$$\int \frac{1}{x}\operatorname{sen}\log x\,dx=-\cos\log x+k\ .$$

11.8. Integrazione per parti

Teorema 11.28. *Siano $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ funzioni di classe $\mathcal{C}^1$, e siano rispettivamente f' e g' le loro derivate; allora vale:*

$$\int f(x)g'(x)\,dx=f(x)g(x)-\int f'(x)g(x)\,dx\ . \tag{11.24}$$

Dimostrazione (costruttiva)
Vale

$$D(f\cdot g)=f'g+fg'\ ;$$

l'integrale indefinito di entrambi i membri quindi diventa

$$\int D[f(x)g(x)]\,dx=f(x)g(x)+k \qquad , \qquad \int f'(x)g(x)\,dx+\int f(x)g'(x)\,dx\ .$$

Poiché la costante k del primo integrale indefinito si può includere nelle costanti che entrano negli altri due integrali, si trova

$$f(x)g(x)=\int f'(x)g(x)\,dx+\int f(x)g'(x)\,dx$$

che è la tesi. □

Nell'espressione

$$\int f(x)g'(x)\,dx$$

il termine $f(x)$ si usa chiamare *fattore finito* e il termine $g'(x)dx$ *fattore differenziale.*
Il precedente teorema è utile per calcolare l'integrale del prodotto di due funzioni e descrive il metodo di integrazione detto *per parti.* Il metodo è efficace se l'integrale al secondo membro è piú facile di quello al primo. Questo, in generale, richiede un oculata scelta del fattore finito e del fattore differenziale. Gli esempi seguenti illustrano il metodo.

Esempio 75. Si calcoli l'integrale indefinito

$$\int \operatorname{sen}^2 x \, dx \ .$$

Considerando $f(x) = \operatorname{sen} x$ e $g'(x) = \operatorname{sen} x$ si ha

$$\begin{aligned}\int \operatorname{sen}^2 x &= -\operatorname{sen} x \cos x + \int \cos^2 x \, dx = -\operatorname{sen} x \cos x + \int (1 - \operatorname{sen}^2 x) \, dx = \\ &= -\operatorname{sen} x \cos x + \int dx - \int \operatorname{sen}^2 x \, dx = -\operatorname{sen} x \cos x + x - \int \operatorname{sen}^2 x \, dx\end{aligned}$$

e quindi

$$2 \int \operatorname{sen}^2 x \, dx = -\operatorname{sen} x \cos x + x + k \qquad \longleftrightarrow \qquad \int \operatorname{sen}^2 x \, dx = -\frac{1}{2} \operatorname{sen} x \cos x + \frac{x}{2} + k \ .$$

È facile verificare, per derivazione, che il risultato ottenuto è proprio la primitiva di $\operatorname{sen}^2 x$.

Esempio 76. Si calcoli l'integrale indefinito

$$\int x^3 e^x \, dx \ .$$

Considerando $f(x) = x^3$ e $g'(x) = e^x$ si ha

$$\int x^3 e^x \, dx = x^3 e^x - \int 3x^2 e^x \, dx = x^3 e^x - 3 \int x^2 e^x \, dx \ .$$

Ripetendo ancora l'integrazione per parti con $f(x) = x^2$ e $g'(x) = e^x$ si trova

$$\int x^3 e^x \, dx = x^3 e^x - 3x^2 e^x + 3 \int 2x e^x \, dx = x^3 e^x - 3x^2 e^x + 6 \int x e^x \, dx \ .$$

Ripetendo l'operazione ancora una volta con $f(x) = x$ e $g'(x) = e^x$, infine, si trova

$$\begin{aligned}\int x^3 e^x \, dx &= x^3 e^x - 3x^2 e^x + 6x e^x - 6 \int e^x \, dx = x^3 e^x - 3x^2 e^x + 6x e^x - 6e^x + k = \\ &= (x^3 - 3x^2 + 6x - 6) e^x + k \ .\end{aligned}$$

È facile verificare, per derivazione, che il risultato ottenuto è proprio la primitiva di $x^3 e^x$.

Esempio 77. Si calcoli l'integrale indefinito

$$\int x \log x \, dx \ .$$

Considerando $f(x) = \log x$ e $g'(x) = x$ si ha

$$\begin{aligned}\int x \log x \, dx &= \frac{x^2}{2} \log x - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} \, dx = \frac{x^2}{2} \log x - \frac{1}{2} \int x \, dx = \\ &= \frac{x^2}{2} \log x - \frac{1}{4} x^2 = \frac{1}{2} x^2 \left(\log x - \frac{1}{2} \right) \ .\end{aligned}$$

È facile verificare, per derivazione, che il risultato ottenuto è proprio la primitiva di $x \log x$.

Esempio 78. Si calcoli l'integrale indefinito

$$\int \operatorname{arcsen} x \, dx \ .$$

Considerando $f(x) = \operatorname{arctg} x$ e $g'(x) = 1$ si ha

$$\int \operatorname{arcsen} x \, dx = x \operatorname{arcsen} x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = x \operatorname{arcsen} x - \int D\left(-\sqrt{1-x^2}\right) dx =$$
$$= x \operatorname{arcsen} x + \sqrt{1-x^2} + k \quad .$$

È facile verificare, per derivazione, che il risultato ottenuto è proprio la primitiva di $\operatorname{arcsen} x$.

11.9. Integrazione per sostituzione

Teorema 11.29 (cambiamento della variabile indipendente)**.** *Sia $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione invertibile di classe $\mathcal{C}^1$ in $[a,b]$ di equazione $x = g(t)$; e sia $f : [g(a), g(b)] \to \mathbb{R}$ una funzione continua di equazione $y = f(x)$ allora valgono*

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f(x) \, dx = \int_a^b f[g(t)] \cdot g'(t) \, dt \ , \tag{11.25}$$

per l'integrale definito, e

$$\int f(x) \, dx = \left[\int f[g(t)] \cdot g'(t) \, dt \right]_{t=g^{-1}(x)} \ , \tag{11.26}$$

per l'integrale indefinito.

Dimostrazione (costruttiva)
Sia $F(x)$ una primitiva di f, allora vale [teorema 11.22] $F'(x) = f(x)$ e quindi per il teorema di derivazione delle funzioni composte [teorema 8.14] si ha

$$F'[g(t)] = f[g(t)] \cdot g'(t) \ ;$$

quindi $F[g(t)]$ è una primitiva di $f[g(t)] \cdot g'(t)$, pertanto ricordando l'equazione (11.18) si trova

$$\int_a^b f[g(t)] \cdot g'(t) \, dt = F[g(b)] - F[g(a)] = \int_{g(a)}^{g(b)} f(x) \, dx \ .$$

Per l'integrale indefinito si ha similmente

$$\left[\int F[g(t)] \cdot g'(t) \, dt \right]_{t=g^{-1}(x)} = \Big[F[g(t)] \Big]_{t=g^{-1}(x)} = F(x) = \int f(x) \, dx \ ,$$

che è quanto si doveva dimostrare. □

Esempio 79. Data la funzione $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ di equazione $y = f(x) = (1+x^2)^{-3/2}$, si calcoli l'integrale

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)^3}} \ .$$

Si consideri la funzione $x = g(t) = \operatorname{tg} t$; valgono allora

$$f[g(t)] = \frac{1}{(\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 t})^3} = \cos^3 t \qquad \text{e} \qquad g'(t) = \frac{1}{\cos^2 t} \ ;$$

inoltre vale $g^{-1}(\pm 1) = \pm\pi/4$, quindi si ha

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)^3}} = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \cos t \, dt = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) - \operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \ .$$

Per il corrispondente integrale indefinito vale

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)^3}} = \left[\int \cos t \, dt\right]_{t=\operatorname{arctg} x} = \Big[\operatorname{sen} t\Big]_{t=\operatorname{arctg} x} + k = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + k \ ,$$

ove l'ultima uguaglianza viene dalla relazione

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}} \ .$$

Teorema 11.30 (cambiamento della variabile dipendente)**.** *Sia* $\varphi : [c,d] \to \mathbb{R}$ *una funzione derivabile di equazione* $t = \varphi(x)$ *che sia invertibile con inversa* φ^{-1} *di classe* $\mathcal{C}^1$*; siano poi* $a = \varphi(c)$ *e* $b = \varphi(d)$*; sia inoltre* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *una funzione continua di equazione* $y = f(t)$*, allora valgono*

$$\int_c^d f[\varphi(x)] \cdot \varphi'(x) \, dx = \int_a^b f(t) \, dt \ , \tag{11.27}$$

per l'integrale definito, e

$$\int f[\varphi(x)] \cdot \varphi'(x) \, dx = \left[\int f(t) \, dt\right]_{t=\varphi(x)} \ , \tag{11.28}$$

per l'integrale indefinito.

Dimostrazione (costruttiva)
Sia $F(t)$ una primitiva di $f(t)$, allora vale [teorema 8.14] si ha

$$F'[\varphi(x)] = f[\varphi(x)]\varphi'(x) \ ;$$

quindi $F[\varphi(x)]$ è una primitiva di $f[\varphi(x)]\varphi'(x)$, pertanto ricordando l'equazione (11.18) si trova

$$\int_c^d f[\varphi(x)]\varphi'(x) \, dx = F[\varphi(d)] - F[\varphi(c)] = F(b) - F(a) = \int_a^b f(t) \, dt \ .$$

Per l'integrale indefinito si ha similmente

$$\int f[\varphi(x)]\varphi'(x) \, dx = F[\varphi(x)] = \Big[F(t)\Big]_{t=\varphi(x)} = \left[\int f(t) \, dt\right]_{t=\varphi(x)} \ ,$$

che è quanto si doveva dimostrare. □

Esempio 80. Si calcoli l'integrale

$$\int_1^4 \frac{(1+\sqrt{x})^4}{\sqrt{x}} \, dx \ .$$

Si considerino le funzioni di equazione $t = \varphi(x) = 1 + \sqrt{x}$ e $y = f(t) = t^4$, e si noti che valgono

$$\varphi'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \qquad \text{e} \qquad \varphi(1) = 2 \ , \ \varphi(4) = 3 \ ;$$

quindi si ha

$$\int_1^4 \frac{(1+\sqrt{x})^4}{\sqrt{x}} \, dx = 2\int_1^4 \frac{(1+\sqrt{x})^4}{2\sqrt{x}} \, dx = 2\int_2^3 t^4 \, dt = \frac{2}{5}(3^5 - 2^5) = \frac{422}{5} \ .$$

Per il corrispondente integrale indefinito si ha

$$\int \frac{(1+\sqrt{x})^4}{\sqrt{x}} \, dx = 2\int \frac{(1+\sqrt{x})^4}{2\sqrt{x}} \, dx = 2\left[\int t^4 \, dt\right]_{t=1+\sqrt{x}} = 2\left[\frac{1}{5} t^5\right]_{t=1+\sqrt{x}} = \frac{2}{5}(1+\sqrt{x})^5 \ .$$

Nel effettuare il calcolo di un integrale con il metodo di sostituzione risulta assai comoda la notazione in termini di differenziali delle funzioni.
Nel caso del cambiamento della variabile indipendente si ha

$$x = g(t) \qquad , \qquad dx = g'(t)\, dt$$

e quindi si può formalmente identificare

$$f(x)dx = f[g(t)]\, g'(t)\, dt$$

da cui, ricordando di sistemare coerentemente con il cambio di variabile gli estremi di integrazione, si ricava la (11.25); analogamente si procede per l'integrale indefinito.
Nel caso del cambiamento della variabile dipendente, similmente, si ha

$$t = \varphi(x) \qquad , \qquad dt = \varphi'(x)\, dx$$

e quindi si può formalmente identificare

$$f[\varphi(x)]\, \varphi'(x)\, dx = f(t)\, dt$$

da cui, ricordando di sistemare coerentemente con il cambio di variabile gli estremi di integrazione, si ricava la (11.27). Analogamente si procede per l'integrale indefinito.

Esempio 81 (Area del settore iperbolico)**.** Si consideri l'iperbole equilatera di equazione

$$x^2 - y^2 = 1$$

il cui ramo avente ascissa positive è rappresentato in figura 11.6. Dato un qualunque punto A dell'iperbole, di coordinate

$$A(\alpha, \sqrt{\alpha^2 - 1}) \ ,$$

si vuole determinare l'area del settore iperbolico $OAVB$ ombreggiato in figura, essendo $V(1,0)$ il vertice dell'iperbole.

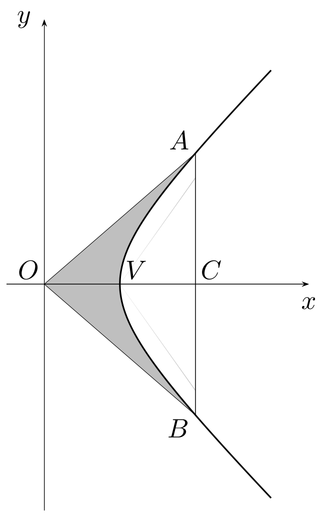


Figura 11.6: L'area del settore iperbolico

La strategia per il calcolo è la seguente. Vista la simmetria del problema, l'area richiesta è il doppio del semisettore OAV. Questa area, a sua volta è la differenza fra l'area del triangolo OAC e l'area del trapezoide AVC compreso fra la porzione positiva del grafico dell'iperbole e l'asse delle ascisse nell'intervallo VC. Osservando che l'area del triangolo OAC è

$$\mathcal{A}_{OAC} = \frac{1}{2}\, OC \cdot CA = \frac{1}{2}\, x_A y_A = \frac{1}{2}\, \alpha\sqrt{\alpha^2 - 1}$$

e che l'equazione della porzione positiva del grafico è

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 1} \ ,$$

l'area del settore iperbolico è data da

$$\mathcal{A}_{OAVB} = 2\left[\mathcal{A}_{OAC} - \int_1^\alpha f(x)\,dx\right] = 2\left[\frac{1}{2}\,\alpha\sqrt{\alpha^2-1} - \int_1^\alpha \sqrt{x^2-1}\,dx\right] \ .$$

Per il calcolo dell'integrale si opera la sostituzione della variabile indipendente $x = \cosh t$; osservando che $dx = \operatorname{senh} t dt$ e ricordando che $\cosh^2 t - 1 = \operatorname{senh}^2 t$, si ottiene

$$\int_1^\alpha \sqrt{x^2-1}\,dx = \int_{\operatorname{settcosh} 1}^{\operatorname{settcosh}\alpha} \operatorname{sen}^2 t\,dt \ .$$

Quest'ultimo integrale va calcolato per parti, analogamente a quanto visto nell'esempio 75, considerando come fattore finito $\operatorname{senh} t$ e come fattore differenziale $\operatorname{senh} t\,dt$; ricordando che $\operatorname{settcosh} 1 = 0$ si trova quindi

$$\begin{aligned}\int_0^{\operatorname{settcosh}\alpha} \operatorname{sen}^2 t\,dt &= \Big[\operatorname{senh} t\cdot\cosh t\Big]_0^{\operatorname{settcosh}\alpha} - \int_0^{\operatorname{settcosh}\alpha} \cosh^2 t\,dt = \\ &= \Big[\operatorname{senh} t\cdot\cosh t\Big]_0^{\operatorname{settcosh}\alpha} - \int_0^{\operatorname{settcosh}\alpha} (1+\operatorname{senh}^2 t)\,dt\end{aligned}$$

e quindi

$$2\int_0^{\operatorname{settcosh}\alpha} \operatorname{sen}^2 t\,dt = \Big[\operatorname{senh} t\cdot\cosh t\Big]_0^{\operatorname{settcosh}\alpha} - \int_0^{\operatorname{settcosh}\alpha} dt$$

da cui si trova facilmente

$$\int_0^{\operatorname{settcosh}\alpha} \operatorname{sen}^2 t\,dt = \frac{1}{2}\left[\sqrt{\alpha^2-1}\cdot\alpha - \operatorname{settcosh}\alpha\right] \ .$$

Sostituendo nell'espressione per l'area del settore iperbolico si ha quindi

$$\mathcal{A}_{OAVB} = 2\left[\frac{1}{2}\,\alpha\sqrt{\alpha^2-1} - \frac{1}{2}\left(\sqrt{\alpha^2-1}\cdot\alpha - \operatorname{settcosh}\alpha\right)\right] = \operatorname{settcosh}\alpha \ .$$

Questo esempio giustifica il nome *settore iperbolico* dato alla funzione inversa della funzione coseno iperbolico, si ricordi l'equazione (7.29) e, per analogia, alle inverse di tutte le altre funzioni iperboliche.

11.10. Integrazione delle funzioni razionali

In generale ogni funzione razionale è integrabile in ciascuno degli intervalli in cui è definita, cioè in tutti gli intervalli in cui non si annulla il denominatore. Qui ci si limita ad indicare come ricavare le primitive delle funzioni razionali in cui il polinomio al denominatore abbia grado minore o uguale a 2 e ad alcuni altri casi particolari, lasciando la dimostrazione generale a testi specializzati[5].

Si consideri dunque un integrale indefinito del tipo

$$\int \frac{A(x)}{B(x)}\,dx \ ,$$

ove $A(x)$ e $B(x)$ sono due polinomi, e sia minore o uguale a 2 il grado di $B(x)$.

Se il grado di $A(x)$ è maggiore o uguale del grado di $B(x)$, è sempre possibile eseguire la divisione

[5] Si veda per esempio Giovanni Prodi, *Analisi matematica*, pagg. 323-330, 1970, Boringhieri, Torino.

fra polinomi ottenendo un quoziente $Q(x)$ ed un resto $R(x)$; in questo modo la funzione razionale integranda si scrive

$$\frac{A(x)}{B(x)} = Q(x) + \frac{R(x)}{B(x)} \ ,$$

ove $Q(x)$ è un polinomio di grado qualsiasi la cui primitiva è immediata ed $R(x)$, il resto della divisione, è un polinomio di grado minore del grado di $B(x)$; quindi un polinomio di grado 1 o 0. In altre parole il problema iniziale si è ridotto, in generale, al problema di calcolare l'integrale indefinito del tipo

$$\int \frac{px+q}{ax^2+bx+c}\, dx \ .$$

A seconda del valore di a si presentano diversi casi, che vengono analizzati di seguito.

1. $a = 0$.
   La funzione integranda si può riscrivere, osservando che $b \neq 0$ altrimenti la funzione non è razionale ma intera, nella forma seguente (i semplici passaggi algebrici si lasciano alla cura del lettore studioso):
   $$\frac{px+q}{bx+c} = \frac{p}{b} + \frac{bq-pc}{b^2} \cdot \frac{1}{x+\dfrac{c}{b}}$$
   e quindi l'integrale indefinito diviene
   $$\int \frac{px+q}{bx+c}\, dx = \int \left[\frac{p}{b} + \frac{bq-pc}{b^2}\frac{1}{x+\dfrac{c}{b}}\right] dx = \frac{p}{b}x + \frac{bq-pc}{b^2}\log\left|x+\frac{c}{b}\right| + k \ .$$

2. $a \neq 0$.
   Se $p \neq 0$, la funzione integranda si può riscrivere nella forma seguente:
   $$\frac{px+q}{ax^2+bx+c} = \frac{\dfrac{p}{2a}(2ax+b) + q - \dfrac{bp}{2a}}{ax^2+bx+c} = \frac{p}{2a}\cdot\frac{2ax+b}{ax^2+bx+c} + \frac{2aq-bp}{2a}\frac{1}{ax^2+bx+c} \ .$$
   Quindi l'integrale indefinito diventa
   $$\int \frac{px+q}{ax^2+bx+c}\, dx = \frac{p}{2a}\int \frac{2ax+b}{ax^2+bx+c}\, dx + \frac{2aq-bp}{2a}\int \frac{1}{ax^2+bx+c}\, dx =$$
   $$= \frac{p}{2a}\log|ax^2+bx+c| + \frac{2aq-bp}{2a}\int \frac{1}{ax^2+bx+c}\, dx \ .$$
   Rimane quindi da calcolare l'integrale indefinito del tipo
   $$\int \frac{1}{ax^2+bx+c}\, dx$$
   che comprende anche il caso generale con $p = 0$.
   Si presentano diversi casi a seconda del valore del discriminante $\Delta = b^2 - 4ac$.

   2a. $\Delta > 0$.
   La funzione integranda si può riscrivere nella forma seguente:
   $$\frac{1}{ax^2+bx+c} = \frac{1}{a(x-x_1)(x-x_2)} = \frac{1}{a(x_1-x_2)}\left(\frac{1}{x-x_1} - \frac{1}{x-x_2}\right) \ ,$$
   ove x_1 e x_2 sono le soluzioni distinte dell'equazione $ax^2+bx+c=0$. L'integrale indefinito quindi diventa
   $$\int \frac{px+q}{ax^2+bx+c}\, dx = \frac{1}{a(x_1-x_2)}\int \left(\frac{1}{x-x_1} - \frac{1}{x-x_2}\right) dx =$$
   $$= \frac{1}{a(x_1-x_2)}\log\left|\frac{x-x_1}{x-x_2}\right| + k \ .$$

2b. $\Delta = 0$.
La funzione integranda si può riscrivere nella forma seguente

$$\frac{1}{ax^2+bx+c} = \frac{1}{a(x-x_1)^2} \ ,$$

ove x_1 è il valore delle due soluzioni coincidenti dell'equazione $ax^2+bx+c=0$. L'integrale indefinito quindi diventa

$$\int \frac{1}{ax^2+bx+c}\, dx = \frac{1}{a} \int \frac{1}{(x-x_1)^2}\, dx = -\frac{1}{a(x-x_1)} + k \ .$$

2c. $\Delta < 0$.
La funzione integranda si può riscrivere nella forma seguente.

$$\frac{1}{ax^2+bx+c} = \frac{1}{a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2}\right) - \frac{b^2}{4a} + c} = \frac{1}{a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac-b^2}{4a}} =$$

$$= \frac{1}{a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{-\Delta}{4a}} = -\frac{4a}{\Delta} \cdot \frac{1}{1+\frac{4a^2}{-\Delta}\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2} \ .$$

Con il cambio della variabile indipendente e la sostituzione formale seguenti

$$t = \frac{2a}{\sqrt{-\Delta}}\left(x+\frac{b}{2a}\right) = \frac{2ax+b}{\sqrt{4ac-b^2}} \qquad , \qquad dt = \frac{2a}{\sqrt{4ac-b^2}}\, dx \ ,$$

l'integrale indefinito diviene

$$\int \frac{dx}{ax^2+bx+c} = \left[\frac{2}{\sqrt{-\Delta}} \int \frac{1}{1+t^2}\, dt\right]_{t=\frac{2ax+b}{\sqrt{4ac-b^2}}} =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{4ac-b^2}} \operatorname{arctg}\left[\frac{2ax+b}{\sqrt{4ac-b^2}}\right] + k \ .$$

I risultati precedenti sono illustrati dagli esempi seguenti.

Esempio 82. Si consideri l'integrale indefinito

$$\int \frac{2x-1}{x+3}\, dx \ .$$

La funzione integranda si può scrivere nella forma

$$\frac{2x-1}{x+3} = 2 - \frac{7}{x+3}$$

e quindi

$$\int \frac{2x-1}{x+3}\, dx = \int \left(2 - \frac{7}{x+3}\right) dx = 2x - 7\log|x+3| + k \ .$$

Esempio 83. Si consideri l'integrale indefinito

$$\int \frac{3x-1}{2x^2+x-1}\, dx \ .$$

La funzione integranda si può scrivere in modo tale che al numeratore compaia la derivata del denominatore, cioè

$$\frac{3x-1}{2x^2+x-1} = \frac{3}{4}\,\frac{4x-\frac{4}{3}}{2x^2+x-1} = \frac{3}{4}\,\frac{4x+1-\frac{7}{3}}{2x^2+x-1} = \frac{3}{4}\,\frac{4x+1}{2x^2+x-1} - \frac{7}{4}\,\frac{1}{2x^2+x-1}$$

e quindi l'integrale diventa

$$\int \frac{3x-1}{2x^2+x-1}\,dx = \frac{3}{4}\int \frac{4x+1}{2x^2+x-1}\,dx - \frac{7}{4}\int \frac{dx}{2x^2+x-1} =$$
$$= \frac{3}{4}\log|2x^2+x-1| - \frac{7}{4}\int \frac{dx}{2x^2+x-1} \quad .$$

L'equazione $2x^2+x-1=0$ ha le due soluzioni distinte

$$x_1 = \frac{1}{2} \qquad , \qquad x_2 = -1$$

quindi

$$\int \frac{dx}{2x^2+x-1} = \frac{1}{2(1/2+1)}\log\left|\frac{x-1/2}{x+1}\right| = \frac{1}{3}\log\left|\frac{2x-1}{2x+2}\right| + k$$

Pertanto, tornando all'integrale, si ha

$$\int \frac{3x-1}{2x^2+x-1}\,dx = \frac{3}{4}\log|2x^2+x-1| - \frac{7}{4}\cdot\frac{1}{3}\log\left|\frac{x-1}{2x+2}\right| =$$
$$= \frac{3}{4}\log|2x^2+x-1| - \frac{7}{12}\log\left|\frac{2x-1}{2x+2}\right| + k \ .$$

Esempio 84. Si consideri l'integrale indefinito

$$\int \frac{1}{2x^2-3x+4}\,dx \ .$$

La funzione integranda si può riscrivere in modo da mettere in evidenza il quadrato di un binomio, cioè

$$\frac{1}{2x^2-3x+4} = \frac{1}{2\left(x^2-\frac{3}{2}x+\frac{9}{16}\right)-\frac{9}{8}+4} = \frac{1}{2\left(x-\frac{3}{4}\right)^2+\frac{23}{8}} = \frac{8}{23}\frac{1}{1+\frac{16}{23}\left(x-\frac{3}{4}\right)^2} \ .$$

Tornando all'integrale, con il cambio di variabile dipendente e la sostituzione formale seguenti,

$$\frac{4}{\sqrt{23}}\left(x-\frac{3}{4}\right) = t \qquad , \qquad \frac{4}{\sqrt{23}}\,dx = dt$$

si trova

$$\int \frac{3x-1}{2x^2-3x+4}\,dx = \left[\frac{2}{\sqrt{23}}\int \frac{dt}{1+t^2}\right]_{t=\frac{4x-3}{\sqrt{23}}} = \left[\frac{2}{\sqrt{23}}\operatorname{arctg} t\right]_{t=\frac{4x-3}{\sqrt{23}}} + k =$$
$$= \frac{2}{\sqrt{23}}\operatorname{arctg}\left[\frac{4x-3}{\sqrt{23}}\right] + k \ .$$

Si presenta ora il metodo di integrazione di altre due classi di funzioni razionali.
L'integrale della prima classe è un integrale elementare:

$$\int \frac{x}{(1+x^2)^n}\,dx = \begin{cases} \dfrac{-1}{2(n-1)(1+x^2)^{n-1}} + k & \text{se } n>1 \\ \dfrac{1}{2}\log(1+x^2)+k & \text{se } n=1 \ . \end{cases} \tag{11.29}$$

Quello della seconda classe si esegue per ricorsione. Sia

$$I_n = \int \frac{1}{(1+x^2)^n}\,dx$$

per ogni naturale $n \geq 1$. Per $n = 1$ si ha, com'è noto,

$$I_1 = \int \frac{1}{1+x^2}\, dx = \operatorname{arctg} x + k \ .$$

Per $n > 1$, vale la relazione

$$\frac{1}{(1+x^2)^n} = \frac{1}{(1+x^2)^{n-1}} - \frac{x^2}{(1+x^2)^n}$$

e quindi, passando all'integrale, si ha

$$I_n = I_{n-1} - \int \frac{x^2}{(1+x^2)^n}\, dx \ ;$$

quest'ultimo integrale si calcola per parti considerando x come fattore finito e $xdx/(1+x^2)^n$ come fattore differenziale; la primitiva del fattore differenziale non è altro che il risultato dell'integrale (11.29)

$$\int \frac{x^2}{(1+x^2)^n}\, dx = -x \cdot \frac{1}{2(n-1)(1+x^2)^{n-1}} + \frac{1}{2(n-1)} \int \frac{dx}{(1+x^2)^{n-1}} =$$
$$= \frac{-x}{2(n-1)(1+x^2)^{n-1}} + \frac{1}{2(n-1)} I_{n-1} \quad .$$

Si è cosí trovato

$$I_n = I_{n-1} + \frac{x}{2(n-1)(1+x^2)^{n-1}} - \frac{1}{2(n-1)} I_{n-1} \ = \frac{x}{2(n-1)(1+x^2)^{n-1}} + \left[1 - \frac{1}{2(n-1)}\right] I_{n-1}$$

e quindi

$$I_n = \frac{2n-3}{2n-2} I_{n-1} + \frac{x}{2(n-1)(1+x^2)^{n-1}}$$

equazione che, noto I_1, permette di calcolare I_n per ogni n.

11.11. Integrali generalizzati

L'integrale di Riemann, come si è visto, è definito per funzioni limitate e definite in un segmento, cioè in un sottoinsieme chiuso e limitato di $\mathbb{R}$. Queste due limitazioni della funzione integranda e dell'intervallo di integrazione possono essere superate dando una definizione di integrabilità che generalizza quella di Riemann. Si considerano qui i due casi separatamente.

Definizione 11.12 (Integrale generalizzato per funzioni non limitate)**.** Sia $f : [a, b[\to \mathbb{R}$ una funzione integrabile secondo Riemann in $[a, b[$ cioè tale sia integrabile in $[a, c]$ per ogni $c \in [a, b[$; allora, se esiste finito il limite

$$\lim_{c \to b^-} \int_a^c f(x)\, dx$$

si dice che f è *integrabile in senso generalizzato* in $[a, b]$ e si pone per definizione

$$\int_a^b f(x)\, dx \equiv \lim_{c \to b^-} \int_a^c f(x)\, dx \ .$$

Similmente, sia $f :]a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione integrabile secondo Riemann in $]a, b]$ cioè tale sia integrabile in $[c, b]$ per ogni $c \in]a, b]$; allora se esiste finito il limite

$$\lim_{c \to a^+} \int_c^b f(x)\, dx$$

si dice che f è *integrabile in senso generalizzato* in $[a, b]$ e si pone per definizione

$$\int_a^b f(x)\, dx \equiv \lim_{c \to a^+} \int_c^b f(x)\, dx \ .$$

Geometricamente l'integrale generalizzato rappresenta l'area della porzione illimitata, ma finita, di piano compresa fra il grafico della funzione e l'asse delle ascisse.

Esempio 85. Si consideri la funzione $f : [a, b[\to \mathbb{R}$ di equazione

$$f(x) = \frac{1}{(b-x)^\alpha}$$

con $\alpha > 0$. Tale funzione è evidentemente illimitata, in quanto per x che tende a b^- diverge a $+\infty$. Si vuole determinare per quali valori di α esiste l'integrale generalizzato di f in $[a, b]$; a tale scopo si osservi che, per ogni $c \in [a, b[$, esiste l'integrale secondo Riemann di f su $[a, c]$ e vale

$$\int_a^c \frac{1}{(b-x)^\alpha}\,dx = \begin{cases} \Big[-\log(b-x)\Big]_a^c = \log\dfrac{b-a}{b-c} & \text{se } \alpha = 1 \\ \Big[-\dfrac{1}{1-\alpha}\cdot\dfrac{1}{(b-x)^{\alpha-1}}\Big]_a^c = \dfrac{1}{\alpha-1}\left[\dfrac{1}{(b-c)^{\alpha-1}} - \dfrac{1}{(b-a)^{\alpha-1}}\right] & \text{se } \alpha \neq 1\ . \end{cases}$$

Quindi il limite per c che tende a b esiste finito solo se $\alpha - 1 < 0$, cioè se $\alpha < 1$; e si trova

$$\int_a^b \frac{1}{(b-x)^\alpha}\,dx = \lim_{c\to b^-}\int_a^c \frac{1}{(b-x)^\alpha}\,dx = \frac{1}{1-\alpha}(b-a)^{1-\alpha}\ .$$

Se la funzione f presenta una discontinuità di seconda specie in un punto interno all'intervallo di integrazione si definisce l'integrale generalizzato spezzando l'intervallo di integrazione in due, si dà cioè la seguente definizione.

Definizione 11.13. Sia $f : D \to \mathbb{R}$ una funzione e siano $a, b \in D$, con $a < b$ e sia $c \in]a, b[$ ma $c \notin D$; allora la funzione f è integrabile in senso generalizzato in $[a, b]$ se è integrabile secondo Riemann su $[a, c[$ e su $]c, b]$ ed esistono finiti i limiti

$$\lim_{p\to c^-}\int_a^p f(x)\,dx \qquad , \qquad \lim_{q\to c^+}\int_q^b f(x)\,dx$$

e in tal caso si pone per definizione

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{p\to c^-}\int_a^p f(x)\,dx + \lim_{q\to c^+}\int_q^b f(x)\,dx\ .$$

Esempio 86. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ di equazione

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{|x|}}$$

definita e continua per ogni $x \neq 0$. Si vuole calcolare l'integrale generalizzato di f in $[-1, 1]$. Poiché il punto $x = 0$ in cui la funzione non è definita appartiene all'intervallo di integrazione, occorre spezzare tale intervallo e calcolare separatamente gli integrali generalizzati in $[-1, 0]$ e in $[0, 1]$, cioè

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{|x|}}\,dx = \lim_{c\to 0^-}\int_{-1}^c \frac{1}{\sqrt{-x}}\,dx + \lim_{d\to 0^+}\int_d^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx\ .$$

Si ha pertanto

$$\int_{-1}^c \frac{1}{\sqrt{-x}}\,dx = \Big[-2\sqrt{-x}\,\Big]_{-1}^c = -2\sqrt{-c} + 2$$

e

$$\int_d^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \Big[2\sqrt{x}\Big]_d^1 = 2 - 2\sqrt{d}$$

e quindi

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{|x|}}\,dx = \lim_{c\to 0^-}\big(-2\sqrt{-c} + 2\big) + \lim_{d\to 0^+}\big(2 - 2\sqrt{d}\big) = 4\ .$$

Il valore dell'integrale generalizzato è la misura dell'area della figura, illimitata ma finita, rappresentata in figura 11.7.

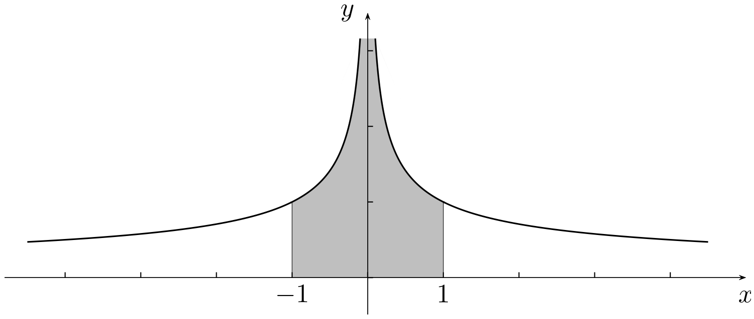


Figura 11.7: La porzione di piano illimitata ma finita.

Definizione 11.14 (Integrale generalizzato con intervallo di integrazione illimitato)**.** Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione integrabile secondo Riemann su ogni intervallo $[a, b] \subset \mathbb{R}$; allora, se esiste finito il limite

$$\lim_{b\to+\infty} \int_a^b f(x)\, dx$$

si dice che f è integrabile in senso generalizzato in $[a, +\infty[$ e si pone per definizione

$$\int_a^{+\infty} f(x)\, dx \equiv \lim_{b\to+\infty} \int_a^b f(x)\, dx \ .$$

Similmente, sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione integrabile secondo Riemann su ogni intervallo $[a, b] \in \mathbb{R}$; allora, se esiste finito il limite

$$\lim_{a\to-\infty} \int_a^b f(x)\, dx$$

si dice che f è integrabile in senso generalizzato in $]-\infty, b]$ e si pone per definizione

$$\int_{-\infty}^b f(x)\, dx \equiv \lim_{a\to-\infty} \int_a^b f(x)\, dx \ .$$

Se l'intervallo di integrazione è l'intera retta reale è necessario spezzare l'intervallo di integrazione illimitato in due intervalli uno limitato superiormente e uno inferiormente come illustrato dal seguente esempio.

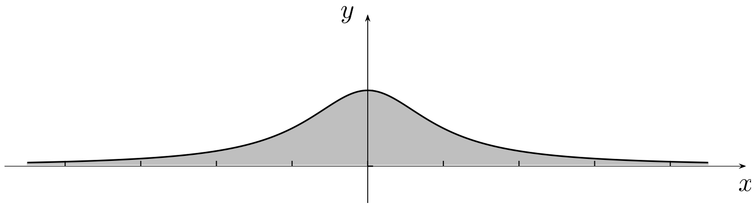


Figura 11.8: La porzione di piano illimitata ma finita.

Esempio 87. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ di equazione

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2} \ .$$

Si vuole calcolare l'integrale generalizzato di f sull'intera retta reale, cioè

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\, dx = \lim_{a\to-\infty} \int_a^c \frac{1}{1+x^2}\, dx + \lim_{b\to+\infty} \int_c^b \frac{1}{1+x^2}\, dx$$

e quindi, ricordando che la primitiva di f è la funzione arcotangente, si trova

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx &= \lim_{a\to-\infty} \Big[\operatorname{arctg} x\Big]_a^c + \lim_{b\to+\infty} \Big[\operatorname{arctg} x\Big]_c^b = \\ &= \lim_{a\to-\infty} \Big[\operatorname{arctg} c - \operatorname{arctg} a\Big] + \lim_{b\to+\infty} \Big[\operatorname{arctg} b - \operatorname{arctg} c\Big] = \\ &= \operatorname{arctg} c - \left(-\frac{\pi}{2}\right) + \left(\frac{\pi}{2}\right) - \operatorname{arctg} c = \pi\ .\end{aligned}$$

Il valore dell'integrale generalizzato è la misura dell'area della figura, illimitata ma finita, rappresentata in figura 11.8.

12

SOLUZIONE APPROSSIMATA DI EQUAZIONI

In questo capitolo si affronta lo studio dei metodi numerici per la soluzione approssimata di equazioni algebriche o trascendenti non risolubili analiticamente.

12.1. Teoremi di esistenza e unicità

Si consideri un'equazione algebrica o trascendente nella variabile x che si presenti nella forma

$$f(x) = 0 \ ;$$

la soluzione di questa equazione è uguale alla soluzione del sistema

$$\begin{cases} y = f(x) \\ y = 0 \ . \end{cases}$$

La soluzione dell'equazione è quindi stata ricondotta al problema di determinare gli zeri della funzione di equazione $y = f(x)$, rappresentati graficamente dalle intersezioni del grafico di $f(x)$ con l'asse delle ascisse.
Il problema dell'esistenza di una radice è risolto dal teorema di esistenza degli zeri [corollario 7.9]; questo, si ricorda, garantisce l'esistenza di almeno uno zero nell'intervallo $]a, b[$ nel caso in cui la funzione sia continua in $[a, b]$ e abbia segni diversi agli estremi dell'intervallo, cioè valga $f(a) \cdot f(b) < 0$. Quindi il problema dell'esistenza di uno zero è ridotto al problema di trovare un intervallo $[a, b]$ in cui la funzione verifichi le ipotesi del teorema. Una guida euristica per la determinazione di tale intervallo è data dall'analisi del grafico di f.
Il problema dell'unicità della radice è anch'esso spesso ricondotto all'analisi del grafico di f. Tuttavia esistono due teoremi che forniscono delle condizioni sufficienti all'unicità della soluzione.

Teorema 12.1. *Sia $f : d \to \mathbb{R}$ una funzione continua in $[a, b]$ che sia derivabile in $]a, b[$ e sia tale che valga $f(a) \cdot f(b) < 0$; valga inoltre $f'(x) \neq 0$ per ogni $x \in\ ]a, b[$ allora l'equazione $f(x) = 0$ ammette una unica soluzione in $]a, b[$.*

Dimostrazione (per assurdo)
L'esistenza è una conseguenza immediata del teorema di esistenza degli zeri. Per dimostrare l'unicità si supponga che esistano due soluzioni distinte cioè esistano $x_1 \neq x_2$ per i quali sia $f(x_1) = f(x_2) = 0$; nelle ipotesi fatte vale il teorema di Rolle [teorema 9.4] e quindi esiste $\xi \in\ ]a, b[$ per il quale vale $f'(\xi) = 0$ contro l'ipotesi che f abbia derivata non nulla in $]a, b[$. □

Teorema 12.2. *Sia $f : d \to \mathbb{R}$ una funzione continua in $[a, b]$ e derivabile due volte in $]a, b[$ e sia $f(a) \cdot f(b) < 0$; sia inoltre $f''(x)$ di segno definito in $]a, b[$, sia cioè sempre positiva o sempre negativa in $]a, b[$ allora l'equazione $f(x) = 0$ ammette una unica soluzione in $]a, b[$.*

Dimostrazione (costruttiva)
L'esistenza è una conseguenza immediata del teorema di esistenza degli zeri. Per dimostrare l'unicità si consideri il caso in cui valga $f''(x) > 0$ in $]a, b[$; allora $f'(x)$ è derivabile con derivata positiva e quindi è crescente in $]a, b[$; si possono allora distinguere due casi.
1. f' è sempre positiva o sempre negativa e quindi è sempre diversa da zero; in questo caso l'unicità è garantita dal teorema 12.1.
2. f' cambia segno e quindi, essendo crescente, valgono senz'altro $f'(a) < 0$ e $f'(b) > 0$; ma

allora, ancora per il teorema 12.1, l'equazione $f'(x) = 0$ ammette una sola soluzione in $]a, b[$; sia c tale soluzione. Valgono quindi

$$\begin{cases} f'(x) < 0 & \text{per } a < x < c \\ f'(x) = 0 & \text{per } x = c \\ f'(x) > 0 & \text{per } c < x < b \ ; \end{cases}$$

f è quindi decrescente in $]a, c[$ e crescente in $]c, b[$; $x = c$ è pertanto un punto di minimo per $f(x)$ in $]a, b[$. Si supponga ora che sia $f(a) > 0$ e $f(b) < 0$ (si lascia al lettore studioso il semplice compito di riformulare quanto segue nel caso opposto) allora, essendo c punto di minimo in $]a, b[$, vale

$$f(c) < f(b) < 0$$

e quindi nel intervallo $[a, d]$ valgono tutte le ipotesi del teorema 12.1; vi è dunque una unica soluzione in $]a, c[$. Nell'intervallo $]c, b[$ non vi può essere alcuna soluzione, infatti se fosse $f(\xi) = 0$ per $c < \xi < b$ si avrebbe, ricordando che $f(b) < 0$,

$$f(\xi) > f(b) \qquad \text{con} \qquad \xi < b$$

contro la crescenza di f in $]c, b[$. □

Una volta determinata l'esistenza e unicità della radice di un'equazione in un dato intervallo, è necessario determinarla; se l'equazione non è risolubile con metodi elementari si fa ricorso ad un metodo di risoluzione approssimata.
Con i metodi presentati qui di seguito si costruisce una successione x_n di valori che approssimano la radice dell'equazione sempre piú all'aumentare di n; si costruisce cioè una successione che tende alla radice richiesta.

12.2. Metodo di bisezione

Sia $f : D \to \mathbb{R}$ una funzione continua in $[a, b]$ tale che valga $f(a) \cdot f(b) < 0$; esiste quindi in $]a, b[$ almeno una soluzione dell'equazione $f(x) = 0$. Si supponga di aver stabilito, utilizzando il grafico di f o per mezzo di uno dei teoremi visti nella sezione precedente, che la soluzione sia unica in $]a, b[$ Sia ξ tale unica soluzione. Per costruire la successione approssimante si procede come segue.
Per comodità si ponga $a \equiv a_0$ e $b \equiv b_0$ e si supponga, per fissare le idee, $f(a_0) < 0$ e $f(b_0) > 0$.
Posto $x_0 = \frac{a_0+b_0}{2}$, se $f(x_0) = 0$ la soluzione è trovata altrimenti si procede per iterazione.
Passo 1. Se $f(x_0) \neq 0$, allora vale $f(x_0) < 0$ o $f(x_0) > 0$. Se $f(x_0) < 0$, la soluzione deve trovarsi nell'intervallo $]x_0, b_0[$; se $f(x_0) > 0$ la soluzione deve trovarsi nell'intervallo $]a_0, x_0[$. L'intervallo cosí determinato in cui si trova la soluzione sia indicato con $]a_1, b_1[$ e si ponga $x_1 = \frac{a_1+b_1}{2}$; se $f(x_1) = 0$ la soluzione è trovata.
Passo 2. Se $f(x_1) \neq 0$, allora vale $f(x_1) < 0$ o $f(x_1) > 0$. Se $f(x_1) < 0$, la soluzione deve trovarsi nell'intervallo $]x_1, b_1[$; se $f(x_1) > 0$ la soluzione deve trovarsi nell'intervallo $]a_1, x_1[$. L'intervallo cosí determinato in cui si trova la soluzione sia indicato con $]a_2, b_2[$ e si ponga $x_2 = \frac{a_2+b_2}{2}$; se $f(x_2) = 0$ la soluzione è trovata.
$\vdots$
Passo n. Se $f(x_{n-1}) \neq 0$, allora vale $f(x_{n-1}) < 0$ o $f(x_{n-1}) > 0$. Se $f(x_{n-1}) < 0$, la soluzione deve trovarsi nell'intervallo $]x_{n-1}, b_{n-1}[$; se $f(x_{n-1}) > 0$ la soluzione deve trovarsi nell'intervallo $]a_{n-1}, x_{n-1}[$. L'intervallo cosí determinato in cui si trova la soluzione sia indicato con $]a_n, b_n[$ e si ponga $x_n = \frac{a_n+b_n}{2}$.
In questo modo si viene a costruire la successione

$$x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$$

in cui ogni termine è una migliore approssimazione della radice cercata rispetto al termine precedente. Poiché a ogni passo l'intervallo in cui si trova la radice si dimezza, dopo n passi l'intervallo misura

$$d_n = \frac{b - a}{2^n}$$

e quindi l'errore commesso approssimando la radice ξ con l'n-esimo termine della successione è

$$|\xi - x_n| < \frac{d_n}{2} = \frac{b-a}{2^{n+1}} \ .$$

Quindi volendo determinare la soluzione dell'equazione con un errore inferiore a ε si deve iterare il procedimento fino a che valga

$$\frac{b-a}{2^{n+1}} < \varepsilon \qquad \longrightarrow \qquad n > \log_2 \frac{b-a}{\varepsilon} - 1 \ .$$

Teorema 12.3. *Sia $f : D \to \mathbb{R}$ una funzione continua in $[a, b]$ e sia $f(a) \cdot f(b) < 0$ e sia unica la soluzione dell'equazione $f(x) = 0$, allora la successione di intervalli $[a_n, b_n]$ costruita come descritto sopra, ciascuno dei quali contiene la soluzione ξ dell'equazione $f(x) = 0$, è tale che valgano*

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} b_n = \xi \ .$$

Dimostrazione (costruttiva)
Per come sono stati costruiti gli intervalli $[a_n b_n]$, valgono le relazioni

$$a_n < \frac{a_n + b_n}{2} < b_n \ ;$$

ma $\frac{a_n+b_n}{2} = a_{n+1}$ oppure $\frac{a_n+b_n}{2} = b_{n+1}$, quindi vale

$$a_n < a_{n+1} < b_{n+1} = b_n \qquad \text{o} \qquad a_n = a_{n+1} < b_{n+1} < b_n \ ;$$

in generale quindi vale

$$a_n \le a_{n+1} < b_{n+1} \le b_n \ .$$

La successione a_n è quindi monotòna crescente e superiormente limitata, mentre la successione b_n è monotòna decrescente e inferiormente limitata. Sono quindi due successioni entrambe convergenti. Si noti che vale $b_n = a_n + \dfrac{b-a}{2^n}$ e quindi

$$\lim_{n\to+\infty} b_n = \lim_{n\to+\infty} \left(a_n + \frac{b-a}{2^n} \right) = \lim_{n\to+\infty} a_n$$

quindi le due successioni convergono allo stesso limite; sia c il valore di tale limite. Per la continuità di f vale

$$\lim_{n\to+\infty} f(a_n) = \lim_{n\to+\infty} f(b_n) = f(c) \ .$$

Ora, per come sono stati costruiti, per ogni n, i valori di $f(a_n)$ sono concordi ad $f(a)$ e i valori di $f(b_n)$ sono concordi ad $f(b)$. Ma allora se fosse $f(c) \neq 0$ per il teorema della permanenza del segno [teorema 5.3] esisterebbe un naturale k tale si avrebbe $f(a_n)$ e $f(b_n)$ entrambi concordi con $f(c)$ per ogni $n > k$; ma questo è impossibile poiché $f(a_n)$ e $f(b_n)$ sono discordi. Quindi deve essere $f(c) = 0$ cioè $c = \xi$. □

Esempio 88. Verificare che l'equazione $e^x + x = 0$ ammette una sola soluzione e determinarla, con il metodo di bisezione, con un errore inferiore a 0.01.
Per verificare che la soluzione esiste ed è unica conviene riscrivere l'equazione nella forma

$$\begin{cases} y = e^x \\ y = -x \ ; \end{cases}$$

in questo modo le soluzioni dell'equazione corrispondono alle intersezioni dei grafici delle funzioni di equazione $y = e^x$ e $y = -x$. Dalla figura 12.1 si vede che i due grafici si intersecano in un solo punto compreso nell'intervallo $[-1, 0]$. D'altra parte, considerando la funzione $f(x) = e^x + x$ è immediato verificare che per qualunque intervallo $[a, b]$ che contenga $[-1, 0]$ vale $f(a) \cdot f(b) < 0$ e che in tale intervallo $f'(x) = e^x + 1$ è sempre non nulla; valgono quindi le ipotesi del teorema

12.1 che garantisce l'esistenza e l'unicità della soluzione. Scelto dunque $[a, b] = [-1, 0]$, per avere un errore inferiore a $\varepsilon = 0.01$ deve essere

$$n > \log_2 \frac{1}{0.01} - 1 \simeq 5.64$$

e quindi $n = 6$; per determinare la radice ξ con l'errore richiesto sono pertanto necessarie 6 iterazioni.

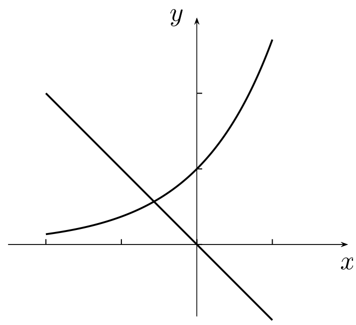


Figura 12.1: L'intersezione dei grafici.

Si comincia con l'osservare che vale

$$f(a) = f(-1) \simeq -0.632 < 0 \qquad , \qquad f(b) = f(0) = 1 > 0 \;;$$

quindi,
posto $x_0 = -0.5$ si ha

$$f(-0.5) \simeq 0.106 > 0 \qquad \longrightarrow \qquad \xi \in [-1, -0.5] \;;$$

posto $x_1 = -0.75$ si ha

$$f(-0.75) \simeq -0.278 < 0 \qquad \longrightarrow \qquad \xi \in [-0.75, -0.5] \;;$$

posto $x_2 = -0.625$ si ha

$$f(-0.625) \simeq -0.906 < 0 \qquad \longrightarrow \qquad \xi \in [-0.625, -0.5] \;;$$

posto $x_3 = -0.5625$ si ha

$$f(-0.5625) \simeq 0.045 > 0 \qquad \longrightarrow \qquad \xi \in [-0.625, -0.5625] \;;$$

posto $x_4 = -0.59375$ si ha

$$f(-0.59375) \simeq -0.042 < 0 \qquad \longrightarrow \qquad \xi \in [-0.5625, -0.59375] \;;$$

posto $x_5 = -0.578125$ si ha

$$f(-0.578125) \simeq -0.017 < 0 \qquad \longrightarrow \qquad \xi \in [-0.625, -0.5] \;;$$

pertanto posto $x_6 = -0.5703125$ si ha

$$\xi \simeq -0.5703125 \;.$$

Il valore corretto di ξ è, considerando le prime 7 cifre decimali, $\xi = -0.567\,143\,3$; l'errore effettivamente commesso è quindi $\varepsilon = 0.003\,169\,2$ che è minore di 0.01 come previsto. È facile verificare che, invece, approssimando ξ con x_5 si ottiene un errore maggiore di 0.01.

12.3. Metodo del punto unito

Sia $f(x) = 0$ l'equazione algebrica o trascendente da risolvere; si scriva questa equazione nella forma

$$x = g(x)$$

ove $g(x)$ è un'opportuna funzione. Questa relazione consente di costruire, per iterazione, la successione che approssima la radice ξ dell'equazione, a partire da un valore x_0 scelto adeguatamente e ponendo

$$x_{n+1} = g(x_n) \ .$$

Se la successione x_n non converge il metodo evidentemente non funziona. Esiste però un teorema che fornisce una condizione sufficiente alla convergenza, che garantisce la convergenza alla radice ξ e dà una stima dell'errore.

Teorema 12.4 (di Banach[1]-Caccioppoli[2]). *Sia $g : D \to \mathbb{R}$ una funzione continua in $[a, b]$ ed esista q tale che $0 < q < 1$ per cui valga la condizione*

$$|g(x_2) - g(x_1)| \leq q|x_2 - x_1| \qquad\qquad \forall\ x_1, x_1 \in [a, b] \ ,$$

allora g ha un solo punto unito in $[a, b]$, cioè esiste un solo $\xi \in [a, b]$ tale che valga

$$\xi = g(\xi) \ .$$

Inoltre, scelto $x_0 \in [a, b]$, la successione definita iterativamente da $x_{n+1} = g(x_n)$ converge a ξ e vale

$$|\xi - x_n| \leq \frac{q^n}{1-q}|x_1 - x_0| \ .$$

Dimostrazione (per induzione, costruttiva e per assurdo)
Si comincia col dimostrare, per induzione, che vale

$$|x_{n+1} - x_n| \leq q^n|x_1 - x_0| \ ;$$

per $n = 1$ infatti si ha

$$|x_2 - x_1| = |g(x_1) - g(x_0)| \leq q|x_1 - x_0| \ ;$$

inoltre, supposto vero per n, si dimostra vero per $n + 1$:

$$|x_{n+2} - x_{n+1}| = |g(x_{n+1}) - g(x_n)| \leq |x_{n+1} - x_n| \leq q \cdot q^n|x_1 - x_0| = q^{n+1}|x_1 - x_0|$$

Fissato arbitrariamente $\epsilon > 0$ è possibile scegliere un naturale k sufficientemente grande per ché sia

$$q^k < \frac{\epsilon(1-q)}{|x_1 - x_0|} \qquad \longrightarrow \qquad |x_1 - x_0|\frac{q^k}{1-q} < \epsilon \ ;$$

allora per ogni m, n tali che valga $m > n > k$ si ha

$$\begin{aligned} |x_m - x_n| &\leq |x_m - x_{m-1}| + |x_{m-1} - x_{m-2}| + \cdots + |x_{n+1} - x_n| \leq \\ &\leq q^{m-1}|x_1 - x_0| + \cdots + q^n|x_1 - x_0| = \\ &= |x_1 - x_0|q^n \sum_{i=0}^{m-n-1} q^i \leq |x_1 - x_0|q^n \sum_{i=0}^{\infty} q^i = \\ &= |x_1 - x_0|q^n \frac{1}{1-q} < |x_1 - x_0|\frac{q^k}{1-q} < \epsilon \ , \end{aligned} \tag{12.1}$$

ove si è usata la convergenza della serie geometrica di ragione minore di 1 [equazione (5.1)]. Quindi la successione converge secondo Cauchy [definizione 5.18] e ha un limite finito [teorema 5.40]. Quindi esiste $\xi \in [a, b]$ tale che sia

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = \xi \ ;$$

[1] Stefan Banach (1892-1945), matematico polacco.
[2] Renato Caccioppoli (1904-1959), matematico italiano.

ma calcolando il limite di entrambi i membri dell'uguaglianza $x_{n+1} = g(x_n)$, utilizzando la continuità di g, si trova

$$\xi = \lim_{n\to+\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to+\infty} g(x_n) = g\left(\lim_{n\to+\infty} x_n\right) = g(\xi)$$

e quindi il limite ξ della successione è proprio il punto unito.
Il punto unito cosí determinato è unico. Si supponga, per assurdo, che ve ne sia un secondo, esista cioè $\zeta \in [a, b]$ tale che sia $\zeta \neq \xi$ e $g(\zeta) = \zeta$; allora varrebbe

$$0 \leq |\xi - \zeta| = |g(\xi) - g(\zeta)| \leq q|\xi - \zeta|$$

e quindi

$$0 \leq (1-q)|\xi - \zeta| \leq 0 \qquad \longrightarrow \qquad (1-q)|\xi - \zeta| = 0\ ;$$

ma $q < 1$ quindi deve essere $\xi = \zeta$.
Infine prendendo il limite per m che tende all'infinito dei due membri della disuguaglianza (12.1), si trova

$$\lim_{m\to+\infty} |x_m - x_n| \leq \lim_{m\to+\infty} \frac{q^n}{1-q}|x_1 - x_0|$$

utilizzando la convergenza di x_m e il teorema 5.5, si trova

$$|\xi - x_n| \leq \frac{q^n}{1-q}|x_1 - x_0|\ ,$$

il che conclude la dimostrazione. □

Osservazione 1. Se la funzione g è derivabile in $[a, b]$, l'ipotesi $|g(x_2) - g(x_1)| \leq q|x_2 - x_1|$ del teorema precedente si può riscrivere come disuguaglianza del rapporto incrementale:

$$\left|\frac{g(x_2) - g(x_1)}{x_2 - x_1}\right| \leq q$$

e quindi, calcolando il limite per x_2 che tende a x_1, si trova

$$|g'(x_1)| \leq q < 1$$

per ogni $x_1 \in [a, b]$. Nel caso di una funzione derivabile quindi, per la validità del teorema basterà verificare che in $[a, b]$ il valore assoluto della derivata sia minore di 1.

Esempio 89. Determinare la soluzione dell'equazione $e^x + x = 0$, con il metodo del punto unito, con un errore inferiore a 0.01.
In questo caso si riscrive l'equazione nella forma $x = g(x)$ con $g(x) = -e^x$. La derivata di $g(x)$ vale $g'(x) = -e^x$. In questo caso non possibile scegliere $[a, b] = [-1, 0]$ come fatto nel metodo di bisezione perché $|g'(0)| = 1$ mentre si è visto che la convergenza è assicurata nel caso $|g'(x)| < 1$ in $[a, b]$; poiché $e^x < 1$ per ogni $x < 0$, basta scegliere $b < 0$ si può scegliere allora $[a, b] = [-1, -0.5]$.
In tale caso

$$|g'(x)| = e^x < e^{-0.5} \simeq 0.606$$

quindi si può fissare $q = 0.61$. Scelto quindi $x_0 = -0.75$ si trova, approssimando a 3 cifre decimali, $x_1 = -e^{-0.75} = 0.472$; quindi $|x_1 - x_0| = 0.378$. Per aver la precisione richiesta , pertanto, deve essere

$$\frac{q^n}{1-q}|x_1 - x_0| < \varepsilon \qquad \longrightarrow \qquad n > \log_q \frac{1-q}{|x_1 - x_0|}\varepsilon = 8.573$$

sono pertanto necessarie $n = 9$ iterazioni. Si trova quindi

$$\begin{array}{ccccccc} x_0 = -0.75 & , & x_1 = -0.472 & , & x_2 = -0.623 & , & x_4 = -0.585 \\ x_5 = -0.557 & , & x_6 = -0.573 & , & x_7 = -0.564 & , & x_8 = -0.569 \end{array}$$

$$x_9 = -0.566\ .$$

Confrontando l'ultimo valore ottenuto, x_9, con il valore corretto, che è $\xi = -0.567\,143\,3$, si trova un errore effettivamente commesso molto minore di 0.01, l'iterazione quindi avrebbe potuto interrompersi prima. Si noti tuttavia che il teorema fornisce una condizione sufficiente ma non necessaria.

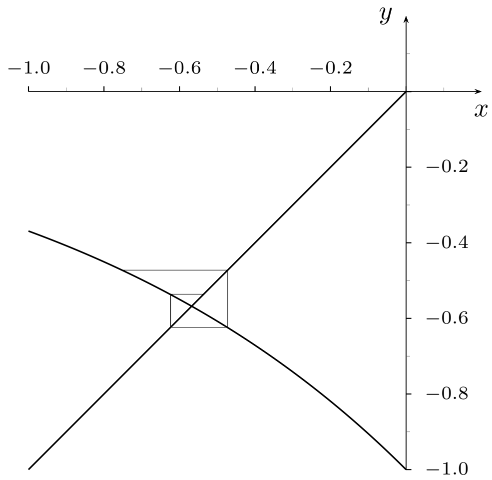


Figura 12.2: Interpretazione grafica.

Il metodo del punto ha una semplice interpretazione geometrica illustrata in figura 12.2 in cui sono rappresentati i grafici delle curve $y = -e^x$ e $y = x$ nell'intervallo $[-1, 0]$. Il primo passo calcola il valore della funzione $-e^x$ nel punto $x_0 = -0.75$ e si trova $x_1 = -e^{x_0}$. Per il secondo passo si deve calcolare la funzione $-e^x$ in x_1; questo corrisponde graficamente a tracciare la retta $y = x_1$ fino ad incontrare la retta $y = x$ e quindi tracciare la retta $x = x_1$ fino ad incontrare nuovamente la funzione $-e^x$ nel punto di ordinata $x_2 = -e^{x_1}$. Continuando per iterazione si determina una sorta di spirale di segmenti che converge sempre piú al punto di intersezione fra le due curve, cioè al punto cercato.

12.4. Metodo delle secanti

Il metodo presentato in questo paragrafo, insieme a quello presentato nel prossimo, è praticamente sempre applicabile e permette di costruire una successione che converge alla radice cercata molto velocemente. Si basa sul seguente teorema.

Teorema 12.5 (Metodo delle secanti.). *Sia $f : D \to \mathbb{R}$ una funzione con derivata seconda continua in $[a, b]$, cioè di classe $\mathcal{C}^2([a, b])$, tale che sia f'' sempre positiva e sempre negativa in $[a, b]$ e quindi la funzione sia convessa o concava in $[a, b]$; e sia $f(a) \cdot f(b) < 0$; allora la soluzione $x = \xi$ dell'equazione $f(x) = 0$ è unica e*
1. se $f(a) < 0$ e la funzione è convessa in $[a, b]$ o se $f(a) > 0$ e la funzione è concava in $[a, b]$, cioè se $f''(x)$ in $[a, b]$ è discorde ad $f(a)$, la successione approssimante il valore di ξ è data iterativamente dalla relazione

$$x_0 = a \qquad , \qquad x_{n+1} = x_n - \frac{b - x_n}{f(b) - f(x_n)} f(x_n) \ ;$$

2. se $f(a) < 0$ e la funzione è concava in $[a, b]$ o se $f(a) > 0$ e la funzione è convessa in $[a, b]$, cioè se $f''(x)$ in $[a, b]$ è concorde ad $f(a)$, la successione approssimante il valore di ξ è data iterativamente dalla relazione

$$x_0 = b \qquad , \qquad x_{n+1} = x_n - \frac{a - x_n}{f(a) - f(x_n)} f(x_n) \ .$$

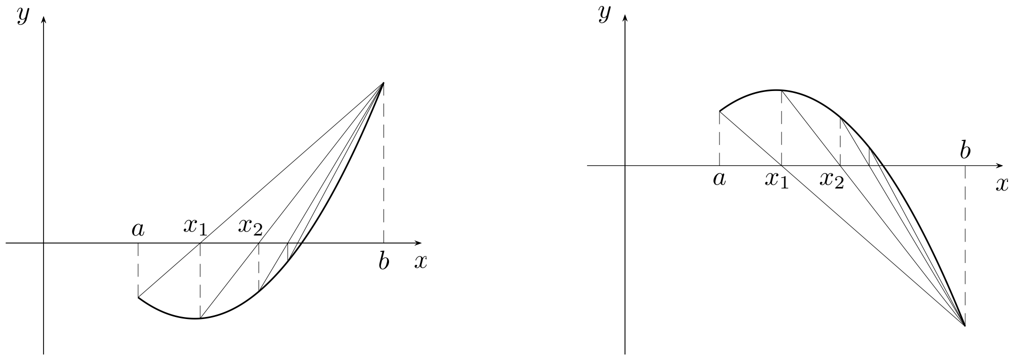
Dimostrazione (costruttiva)
L'unicità della soluzione è garantita dal teorema 12.2.

1. Se f è convessa e $f(a) < 0$ allora $f(b) > 0$; allora posto come primo valore della successione approssimante $x_0 = a$ si consideri la retta che passa per i punti di coordinate $\big(a, f(a)\big)$ e $\big(b, f(b)\big)$, tale retta ha equazione

$$y = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a)$$

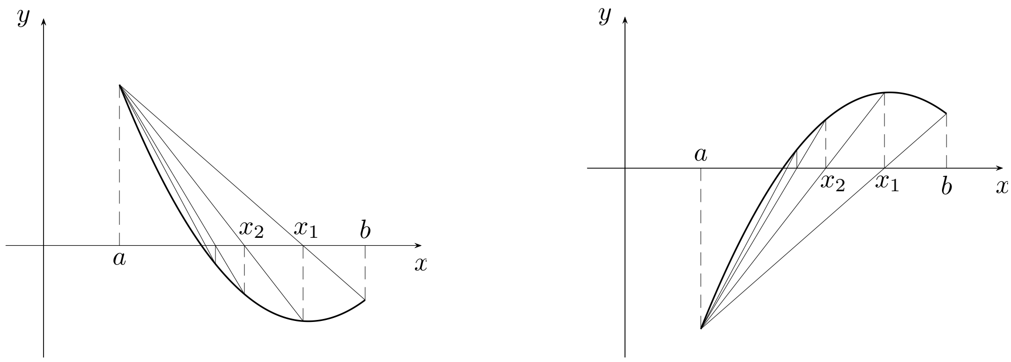
e interseca l'asse delle ascisse nel punto di ascissa x_1 data da

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a) = 0 \qquad \longrightarrow \qquad x_1 = a - \frac{b - a}{f(b) - f(a)} f(a) \; .$$



(a) Il caso $f''(x) > 0, f(a) < 0$ **(b)** Il caso $f''(x) < 0, f(a) > 0$

Figura 12.3: Il metodo delle secanti: $f''(x)$ e $f(a)$ discordi.



(a) Il caso $f''(x) > 0, f(a) > 0$ **(b)** Il caso $f''(x) < 0, f(a) < 0$

Figura 12.4: Il metodo delle secanti: $f''(x)$ e $f(a)$ concordi.

Nelle ipotesi fatte, valgono le relazioni

$$a = x_0 < x_1 < b \qquad , \qquad f(x_1) < 0 \; .$$

Infatti la retta passante per $\big(a, f(a)\big)$ e $\big(b, f(b)\big)$ è una funzione continua e strettamente crescente nell'intervallo $[x_n, b]$ e quindi interseca l'asse delle ascisse in un solo punto compreso nell'intervallo $[x_n, b]$ tale punto, per costruzione x_1 e quindi vale $a = x_0 < x_1 < b$. Inoltre vale

$$x_1 = x_0 - \frac{b - x_0}{f(b) - f(x_0)} f(x_0) \qquad \longrightarrow \qquad f(x_0) + \frac{f(b) - f(x_0)}{b - x_0}(x_1 - x_0) = 0 \; .$$

Ma per la condizione di convessità di f in x_1 [equazione (10.1)] deve valere

$$f(x_1) < f(x_0) + \frac{f(b) - f(x_0)}{b - x_0}(x_1 - x_0) = 0$$

e quindi

$$f(x_1) < 0 \ .$$

A questo punto la procedura si può ripetere considerando il punto di intersezione con l'asse delle ascisse della retta passante per i punti di coordinate $\big(x_1, f(x_1)\big)$ e $\big(b, f(b)\big)$; ottenendo il punto di ascissa

$$x_2 = x_1 - \frac{b - x_1}{f(b) - f(x_1)} f(x_1) \ .$$

Iterando la procedura si ottiene la relazione di ricorsione

$$x_{n+1} = x_n - \frac{b - x_n}{f(b) - f(x_n)} f(x_n) \qquad (12.2)$$

che genera la successione

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n < \cdots < b \ .$$

Resta da mostrare che questa successione ha limite ξ. Per farlo si osservi che la successione è superiormente limitata e quindi converge ad un limite ℓ, quindi

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = \ell \ ;$$

ma allora calcolando il limite di entrambi im membri della (12.2), si trova

$$\ell = \lim_{n\to+\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to+\infty} \left[x_n - \frac{b - x_n}{f(b) - f(x_n)} f(x_n)\right] = \ell - \frac{b - \ell}{f(b) - f(\ell)} f(\ell) \ .$$

Quindi

$$\frac{b - \ell}{f(b) - f(\ell)} f(\ell) = 0 \ ;$$

ma $\ell < b$ quindi deve essere

$$f(\ell) = 0 \qquad \longrightarrow \qquad \ell = \xi$$

che è quanto si doveva dimostrare.
Il caso con $f''(x) < 0$ e $f(a) > 0$ si tratta allo stesso modo dimostrando che, essendo la funzione concava, $f(x_1) > 0$ e garantendo cosí l'iterabilità del procedimento.
2. La dimostrazione si muove sulle stesse linee del caso 1 e viene lasciata alla cura del lettore studioso. □

Esempio 90. Si risolva l'equazione $e^x + x = 0$ con il metodo delle secanti.
Scelto l'intervallo $[a, b] = [-1, 0]$ che, com'è noto dagli esempi precedenti, contiene l'unica soluzione dell'equazione, e osservato che

$$f''(x) = e^x > 0$$

per ogni $x \in \mathbb{R}$ e quindi, in particolare, in $[-1, 0]$, si ha

$$x_0 = a = -1 \ ;$$

osservato che $f(x_0) = e^{-1} - 1 = -0.6321206$ si ha

$$x_1 = x_0 - \frac{b - x_0}{f(b) - f(x_0)} f(x_0) = -1 - \frac{0 + 1}{1 + 0.6321206} \cdot (-0.6321206) = -0.6326998 \ ;$$

osservato che $f(x_1) = -0.0708138$ si ha

$$x_2 = x_1 - \frac{b - x_1}{f(b) - f(x_1)} f(x_1) = -0.6321206 - \frac{0 + 0.6321206}{1 + 0.0708138} \cdot (-0.0708138) = -0.5721814 \ ;$$

osservato che $f(x_2) = -0.0078887$ si ha

$$x_3 = x_2 - \frac{b - x_2}{f(b) - f(x_2)} f(x_2) = -0.5721814 - \frac{0 + 0.5721814}{1 + 0.0078887} \cdot (-0.0778887) = -0.5677032 \ .$$

Come si vede è stata raggiunta una notevole precisione (si confronti con il risultato corretto di ξ riportato alla fine dell'esempio 88) con sole tre iterazioni. Si noti inoltre che in questo caso la successione fornisce un'approssimazione per difetto, mentre nel caso con $f''(x)$ e $f(a)$ concordi fornisce un'approssimazione per eccesso.

12.5. Metodo delle tangenti

Il metodo qui presentato, noto anche con il nome di *metodo di Newton-Raphson*[3], è solitamente utilizzato insieme al precedente perché quando il primo dà un'approssimazione per eccesso il secondo la dà per difetto e viceversa. Si basa sul seguente teorema.

Teorema 12.6 (Metodo delle tangenti). *Sia $f : D \to \mathbb{R}$ una funzione con derivata seconda continua in $[a, b]$, cioè di classe $\mathcal{C}^2([a, b])$, tale che sia $f'(x) \neq 0$ in $[a, b]$ e f'' sempre positiva o sempre negativa in $[a, b]$ e quindi la funzione sia convessa o concava in $[a, b]$; e sia $f(a) \cdot f(b) < 0$; allora la soluzione $x = \xi$ dell'equazione $f(x) = 0$ è unica e*
1. se $f(a) < 0$ e la funzione è convessa in $[a, b]$ o se $f(a) > 0$ e la funzione è concava in $[a, b]$, cioè se $f''(x)$ in $[a, b]$ è discorde ad $f(a)$, la successione approssimante il valore di ξ è data iterativamente dalla relazione

$$x_0 = b \quad , \quad x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \; ; \tag{12.3}$$

2. se $f(a) < 0$ e la funzione è concava in $[a, b]$ o se $f(a) > 0$ e la funzione è convessa in $[a, b]$, cioè se $f''(x)$ in $[a, b]$ è concorde ad $f(a)$, la successione approssimante il valore di ξ è data iterativamente dalla relazione

$$x_0 = a \quad , \quad x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \; .$$

Dimostrazione (costruttiva)
L'unicità della soluzione è garantita dal teorema 12.2.
1. Se f è convessa e $f(a) < 0$ allora $f(b) > 0$; allora posto come primo valore della successione approssimante $x_0 = b$ si consideri la retta tangente al grafico della funzione nel punto di coordinate $\big(x_0, f(x_0)\big)$; tale tangente certamente esiste ed ha coefficiente angolare reale, vista la derivabilità di f, quindi la tangente interseca l'asse delle ascisse in un punto di ascissa x_1. Tale retta ha equazione

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

e interseca l'asse delle ascisse nel punto di ascissa data da

$$f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) = 0 \qquad \longrightarrow \qquad x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \; . \tag{12.4}$$

Nelle ipotesi fatte, valgono le relazioni

$$a < \xi < x_1 < x_0 = b \quad , \quad f(x_1) > 0 \; .$$

Infatti se f è convessa in $[a, b]$ allora $f''(x) > 0$ in $[a, b]$ e quindi $f'(x)$ è crescente; allora $f'(x) > 0$ poiché se fosse $f'(x) < 0$ la funzione sarebbe decrescente, contro l'ipotesi che sia $f(a) < 0 < f(b)$. Quindi se f' è positiva in $[a, b]$, in particolare quindi è positiva in b e si ha $f'(b) > 0$. Dalla (12.4) segue $x_1 < x_0 = b$.
Inoltre per il teorema di Lagrange [equazione (9.1)] esiste $c \in \,]\xi, x_0[$ per il quale vale

$$\frac{f(x_0) - f(\xi)}{x_0 - \xi} = f'(c) \qquad \longrightarrow \qquad \frac{f(x_0)}{x_0 - \xi} = f'(c) \; ,$$

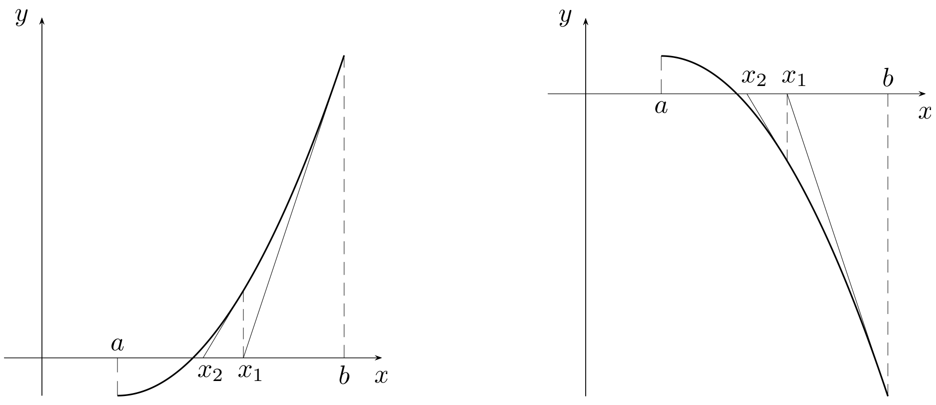
ove si è usato il fatto che $f(\xi) = 0$. Poiché per ipotesi fatte vale $f''(x) >$ in $[a, b]$, $f'(x)$ è crescente in $[a, b]$ e quindi $0 < f'(c) < f'(x_0)$, pertanto si trova

$$\frac{f(x_0)}{x_0 - \xi} = f'(c) < f'(x_0) \qquad \longrightarrow \qquad f(x_0) < (x_0 - \xi) f'(x_0) \qquad \longrightarrow \qquad \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} < x_0 - \xi$$

e quindi

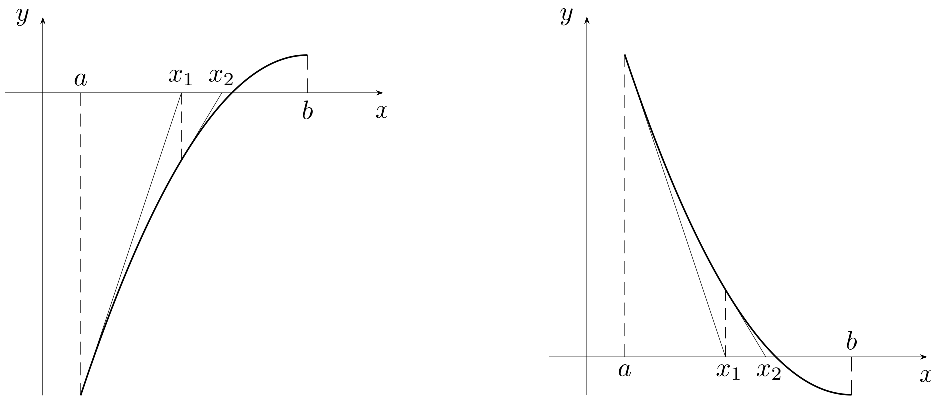
$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} > \xi \; .$$

[3] Joseph Raphson (∼1648-1715), matematico inglese.



(a) Il caso $f''(x) > 0, f(a) < 0$ **(b)** Il caso $f''(x) < 0, f(a) > 0$

Figura 12.5: Il metodo delle tangenti: $f''(x)$ e $f(a)$ discordi.



(a) Il caso $f''(x) < 0, f(a) < 0$ **(b)** Il caso $f''(x) > 0, f(a) > 0$

Figura 12.6: Il metodo delle tangenti: $f''(x)$ e $f(a)$ concordi.

Inoltre, visto che $f'(x) > 0$ in $[a, b]$, f è crescente in $[a, b]$ e quindi

$$\xi < x_1 \qquad \longrightarrow \qquad 0 = f(\xi) < f(x_1)$$

È quindi possibile ripetere la procedura considerando la retta tangente al grafico della funzione nel suo punto di coordinate $\big(x_1, f(x_1)\big)$. Tale retta ha equazione

$$y = f'(x_1)(x - x_1) + f(x_1)$$

ed interseca l'asse delle ascisse nel punto di ascissa x_2 data da

$$f'(x_1)(x - x_1) + f(x_1) = 0 \qquad \longrightarrow \qquad x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

per il quale si dimostrano, come visto sopra, le relazioni

$$a < \xi < x_2 < x_1 < x_0 = b \qquad , \qquad f(x_2) > 0\ .$$

Ripetendo ancora questa operazione si genera una successione definita per iterazione dalla relazione

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

i cui termini verificano, per ogni n, la relazione

$$a < \xi < \cdots < x_n < \cdots < x_1 < x_0 = b \ .$$

Resta da mostrare che questa successione ha limite ξ. Per farlo si osservi che la successione è inferiormente limitata ed ammette pertanto un limite finito ℓ per cui si ha

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = \ell$$

con $\xi < \ell < b$. Calcolando il limite ad entrambi i membri della (12.3) si trova

$$\ell = \lim_{n\to+\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to+\infty} \left[x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \right] = \ell - \frac{f(\ell)}{f'(\ell)}$$

ove è stata usata la continuità di f e di f'. Ma $f'(\ell) =\neq 0$ quindi deve essere

$$f(\ell) = 0 \qquad \longrightarrow \qquad \ell = \xi$$

che è quanto si doveva dimostrare. Il caso con $f''(x) < 0$ e $f(a) > 0$ si tratta allo stesso modo dimostrando che $f'(x) < 0$ e procedendo per il resto in modo analogo.
2. La dimostrazione si muove sulle stesse linee del caso 1 e viene lasciata alla cura del lettore studioso. □

Esempio 91. Si risolva l'equazione $e^x + x = 0$ con il metodo delle tangenti.
Scelto l'intervallo $[a, b]=[-1, 0]$ che, com'è noto dagli esempi precedenti, contiene l'unica soluzione dell'equazione, e osservato che

$$f'(x) = e^x + 1 > 0 \qquad , \qquad f''(x) = e^x > 0$$

per ogni $x \in \mathbb{R}$ e quindi certamente in $[-1, 0]$.
Allora posto

$$x_0 = b = 0$$

e osservato che $f(x_0) = 1$ e $f'(x_0) = 2$, si ha

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 0 - \frac{1}{2} = -0.5 \ ;$$

osservato che $f(x_1) = 0.1065307$ e $f'(x_1) = 1.6065307$, si ha

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = -0.5 - \frac{0.1065307}{1.6065307} = -0.566311 \ ;$$

osservato che $f(x_2) = 0.0013045$ e $f'(x_2) = 1.5676154$, si ha

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} = -0.566311 - \frac{0.0013045}{1.5676154} = -0.5671431 \ .$$

Anche in questo caso, come con il metodo delle secanti si è trovata una approssimazione molto buona con sole tre iterazioni. In questo caso l'approssimazione trovata è per eccesso. Come osservato sopra, il metodo delle secanti e delle tangenti danno sempre approssimazioni di segno diverso; è quindi particolarmente utile utilizzare i due metodi insieme per avere un controllo dell'errore e per dare una stima ancora piú precisa della soluzione cercata. Nel caso presente si può stimare la radice dell'equazione proposta calcolando la media aritmetica delle soluzioni trovate con i metodi delle secanti e delle tangenti e prendendo come errore massimo la semidifferenza dei due valori; quindi, detta x_s la soluzione trovata con il metodo delle secanti e x_t quella trovata con il metodo delle tangenti si ha

$$\xi \simeq \frac{x_s + x_t}{2} = -0.5674232$$

$$\varepsilon < \frac{|x_s - x_t|}{2} = 0.00028$$

13

INTEGRAZIONE APPROSSIMATA

In questo capitolo si prosegue l'analisi dei metodi di calcolo approssimato. Qui ci si rivolge al calcolo approssimato di integrali. I metodi qui descritti permettono di calcolare integrali definiti, e quindi aree, nel caso in cui il calcolo di una primitiva sia particolarmente ostico o nel caso in cui tale primitiva non sia esprimibile tramite funzioni elementari.

13.1. Metodo dei rettangoli

Si tratta di approssimare l'integrale definito mediante un opportuno plurirettangolo [definizione 11.7].
Sia f una funzione integrabile secondo Riemann in $[a,b]$; si suddivida l'intervallo $[a,b]$ in n parti di uguale ampiezza $h = \frac{b-a}{n}$, dagli $n+1$ punti

$$x_0 = a \qquad , \qquad x_1 = a+h \qquad , \qquad x_2 = a+2h \qquad \ldots \qquad x_n = a+nh = b \ .$$

Si consideri il plurirettangolo formato dagli n rettangoli aventi per base gli n intervalli di ampiezza h per altezza ciascuno degli $f(x_k)$.

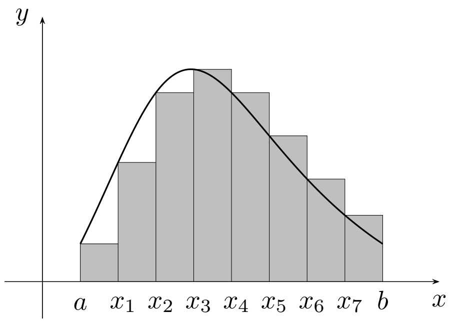


Figura 13.1: Metodo dei rettangoli.

Tale plurirettangolo ha area

$$S_n = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)$$

tale valore costituisce, per ogni n un approssimazione di

$$S = \int_a^b f(x)\,dx \ .$$

L'errore massimo commesso approssimando S con S_n è dato dal seguente teorema.

Teorema 13.1. *Sia f una funzione integrabile secondo Riemann in $[a,b]$ derivabile con derivata prima limitata in $[a,b]$, cioè tale che esista un reale positivo M tale che, per ogni $x \in \,]a,b[$, valga*

$$|f'(x)| \leq M$$

allora l'errore commesso approssimando l'integrale definito S di f esteso ad $[a,b]$ con il metodo dei rettangoli sopra descritto è minore di

$$\frac{(b-a)^2}{2n} M \ .$$

Dimostrazione (costruttiva)
Si consideri l'intervallo $[x_0, x_1]$; l'approssimazione con il metodo dei triangoli sostituisce il valore esatto

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)\, dx$$

con il valore approssimato

$$hy_0 = (x_1 - x_0) f(x_0) = \int_{x_0}^{x_1} f(x_0)\, dx \ .$$

L'errore commesso è, pertanto,

$$\varepsilon_1 = \left| \int_{x_0}^{x_1} f(x)\, dx - \int_{x_0}^{x_1} f(x_0)\, dx \right| = \left| \int_{x_0}^{x_1} \big[f(x) - f(x_0) \big]\, dx \right| \le \int_{x_0}^{x_1} \big| f(x) - f(x_0) \big|\, dx$$

ove si è usata la disuguaglianza fondamentale (11.9). Per il teorema di Lagrange [equazione (9.1)] esiste $\xi \in \,]x_0, x[$ tale che valga

$$f(x) - f(x_0) = f'(\xi)(x - x_0) \qquad \longrightarrow \qquad |f(x) - f(x_0)| = |f'(\xi)| \cdot |x - x_0| \le M(x - x_0)$$

e quindi

$$\varepsilon_1 \le \int_{x_0}^{x_1} M(x - x_0)\, dx = M \frac{(x_1 - x_0)^2}{2} = M \frac{h^2}{2}$$

Ripetendo il ragionamento per ciascuno degli altri n_1 intervalli, si trova che l'errore totale ε è dato da

$$\varepsilon = \varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_n = n\varepsilon_1 \le nM \frac{h^2}{2} = \frac{(b-a)^2}{2n} M$$

ove si è usata la relazione $h = \dfrac{b-a}{n}$. □

13.2. Metodo dei trapezi

In questo caso l'integrale viene approssimato mediante un pluritrapezio, cioè un'unione disgiunta di trapezi.
Sia f una funzione integrabile secondo Riemann in $[a, b]$; si suddivida l'intervallo $[a, b]$, come nel caso del metodo dei rettangoli, in n parti di uguale ampiezza $h = \frac{b-a}{n}$, delimitati dagli $n+1$ punti

$$x_0 = a \qquad , \qquad x_1 = a + h \qquad , \qquad x_2 = a + 2h \qquad \ldots \qquad x_n = a + nh = b \ .$$

Si consideri il poligono avente per vertici i punti

$$(a, 0) \quad , \quad \big(a, f(a)\big) \quad , \quad \big(x_1, f(x_1)\big) \quad \ldots \quad \big(x_{n_1}, f(x_{n-1})\big) \quad , \quad \big(b, f(b)\big)$$

tale poligono può essere visto come l'insieme di n trapezi rettangoli disgiunti aventi per basi i valori $f(x_k)$ e per altezza l'ampiezza h delle suddivisioni dell'intervallo $[a, b]$, come illustrato in figura 13.2.

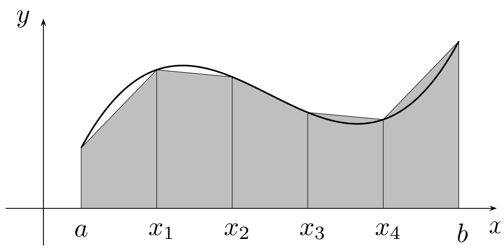


Figura 13.2: Metodo dei trapezi.

Quindi l'area complessiva T_n del poligono in questione è data da

$$T_n = \frac{h}{2}\sum_{k=1}^{n}[f(x_{k-1}) + f(x_k)]$$

T_n costituisce, per ogni n un approssimazione di

$$T = \int_a^b f(x)\,dx \ .$$

L'errore massimo commesso approssimando T con T_n è dato dal seguente teorema. È però necessario premettere un lemma.

Lemma 4. Sia $f : D \to \mathbb{R}$ una funzione di classe $\mathcal{C}^2([a,b])$, allora per ogni scelta di $x_0, x_1 \in \,]a,b[$ esiste $\xi_1 \in \,]x_0,x_1[$ tale che valga

$$f(x) = f(x_0)\frac{x-x_1}{x_0-x_1} + f(x_1)\frac{x-x_0}{x_1-x_0} + \frac{1}{2}f''(\xi_1)(x-x_0)(x-x_1) \ .$$

Dimostrazione (costruttiva)
Posto

$$g(x) = (x-x_0)(x-x_1) \qquad , \qquad h(x) = f(x_0)\frac{x-x_1}{x_0-x_1} + f(x_1)\frac{x-x_0}{x_1-x_0}$$

si osservi che valgono

$$g(x_0) = g(x_1) = 0 \qquad , \qquad h(x_0) = f(x_0) \qquad , \qquad h(x_1) = f(x_1) \ .$$

Per ogni $x \in \,]x_0,x_1[$ si consideri quindi la funzioni ausiliaria della variabile $t \in [a,b]$

$$F(t) = f(t) - h(t) - \big[f(x) - h(x)\big]\,\frac{g(t)}{g(x)}$$

che è derivabile in $[a,b]$ e per la quale valgono le relazioni

$$F(x_0) = F(x) = F(x_1) = 0 \ ;$$

è pertanto possibile applicare il teorema di Rolle [teorema 9.4] alla funzione F negli intervalli $[x_0,x]$ e $[x,x_1]$ e quindi esistono $c \in \,]x_0,x[$ e $d \in \,]x,x_1[$ per i quali valga

$$F'(c) = F'(d) = 0 \ .$$

Quindi essendo F' a sua volta derivabile, ad essa si può applicare nuovamente il teorema di Rolle; esiste quindi ξ_1, per cui vale $x_0 < c < \xi_1 < d < x_1$ e tale che sia

$$F''(\xi_1) = 0 \ .$$

Si osservi ora che $h(x)$ è un polinomio di primo grado e quindi la sua derivata seconda è nulla e che, inoltre, vale $g''(x) = 2$; quindi si ha

$$0 = F(\xi_1) = f''(\xi_1) - \big[f(x) - h(x)\big]\,\frac{2}{g(x)} \qquad \longrightarrow \qquad f(x) = h(x) + \frac{1}{2}\,g(x)f''(\xi_1)$$

che è quanto si doveva mostrare. □

Teorema 13.2. *Sia $f : D \to \mathbb{R}$ una funzione integrabile secondo Riemann in $[a,b]$ derivabile due volte con derivata seconda limitata in $[a,b]$, cioè tale che esista un reale positivo M tale che, per ogni $x \in \,]a,b[$, valga*

$$|f''(x)| \le M$$

allora l'errore commesso approssimando l'integrale definito T di f esteso ad $[a,b]$ con il metodo dei trapezi sopra descritto è minore di

$$\frac{(b-a)^3}{12\,n^2}M \ .$$

Dimostrazione (costruttiva)
Si consideri l'intervallo $[x_0, x_1]$; utilizzando il risultato del lemma, esiste un $\xi_1 \in]x_0, x_1[$ per il quale l'integrale di f esteso all'intervallo $[x_0, x_1]$ si può scrivere nella forma

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx =$$

$$= \int_{x_0}^{x_1} \left[f(x_0)\frac{x - x_1}{x_0 - x_1} + f(x_1)\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \right] dx + \frac{1}{2}f''(\xi_1) \int_{x_0}^{x_1} \left[x^2 - (x_0 + x_1)x + x_0x_1\right] dx =$$

$$= -\frac{f(x_0)}{x_0 - x_1}\frac{(x_0 - x_1)^2}{2} + \frac{f(x_1)}{x_1 - x_0}\frac{(x_1 - x_0)^2}{2} + \frac{1}{2}f''(\xi_1)\left[\frac{x^3}{3} - (x_0 + x_1)\frac{x^2}{2} + x_0x_1x\right]_{x_0}^{x_1} =$$

$$= \frac{1}{2}(x_1 - x_0)\big[f(x_0) + f(x_1)\big] + \frac{1}{2}f''(\xi_1)\left[\frac{x_1^3 - x_0^3}{3} - (x_0 + x_1)\frac{(x_1^2 - x_0^2)}{2} + x_0x_1^2 - x_{=}0^2x_1\right] =$$

$$= \frac{1}{2}(x_1 - x_0)\big[f(x_0) + f(x_1)\big] + \frac{1}{12}f''(\xi_1)(x_0^3 - 3x_0^2x_1 + 3x_0x_1^2 - x_1^3) =$$

$$= \frac{1}{2}(x_1 - x_0)\big[f(x_0) + f(x_1)\big] - \frac{1}{12}f''(\xi_1)(x_1 - x_0)^3 =$$

$$= \frac{h}{2}\big[f(x_0) + f(x_1)\big] - \frac{h^3}{12}f''(\xi_1)$$

Considerando tutti gli n intervalli, è possibile trovare in ciascuno di essi un ξ_k tale che valga la relazione precedente e quindi sommando tutti i contributi si ha

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{k=1}^{n} \frac{h}{2}\big[f(x_{k-1}) + f(x_k)\big] - \frac{h^3}{12}\sum_{k=1}^{n} f''(\xi_k)$$

La prima sommatoria in questa espressione è proprio l'area T_n del poligono approssimante; la parte rimanente può essere riscritta nella forma

$$-\frac{(b-a)h^2}{12} \cdot \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f''(\xi_k)$$

ove compare la media delle derivate seconde di f calcolate nei punti ξ_k; tale media è certamente minore della limitazione superiore M della funzione f''. Si può quindi scrivere

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx - T_n \right| = \left| \frac{(b-a)h^2}{12} \cdot \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f''(\xi_k) \right| \leq \frac{(b-a)h^2}{12}M = \frac{(b-a)^3}{12\,n^2}M$$

che è quanto si doveva mostrare. □

Esempio 92. Si calcoli l'integrale definito

$$\int_0^2 \frac{x}{x+1}\,dx$$

con il metodo dei rettangoli e con il metodo dei trapezi con un errore inferiore a 0.2; si confrontino quindi i risultati con il valore esatto dell'integrale.
Posto $\varepsilon = 0.2$, approssimando il metodo dei rettangoli, deve valere

$$\frac{(b-a)^2}{2n}M \leq \varepsilon$$

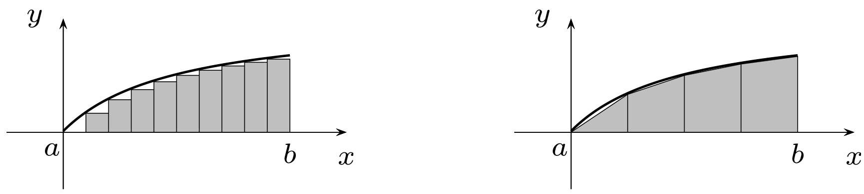
ove $M =$ è la limitazione superiore, in $[a, b]$ di $|f'(x)|$. Vale quindi

$$|f'(x)| = \frac{1}{(x+1)^2}$$

che, in $[0,2]$, è minore o uguale a 1; quindi, scegliendo $M = 1$, si trova

$$n \geq \frac{4}{0.4} = 10 \; ;$$

occorre quindi dividere l'intervallo in $n = 10$ parti e l'ampiezza di ogni suddivisione è $h = 0.2$. Si



(a) Rettangoli

(b) Trapezi

Figura 13.3: Il confronto fra i due metodi per la funzione $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$.

ha quindi

$$f(0) = 0 \quad , \quad f(0.2) = \frac{1}{6} \quad , \quad f(0.4) = \frac{2}{7} \quad , \quad f(0.6) = \frac{3}{8} \quad , \quad f(0.8) = \frac{4}{9}$$

$$f(1) = \frac{1}{2} \quad , \quad f(1.2) = \frac{6}{11} \quad , \quad f(1.4) = \frac{7}{12} \quad , \quad f(1.6) = \frac{8}{13} \quad , \quad f(1.8) = \frac{9}{14}$$

e quindi il metodo dei rettangoli fornisce il valore

$$S_{10} = \frac{2}{10}\left(0 + \frac{1}{6} + \frac{2}{7} + \frac{3}{8} + \frac{4}{9} + \frac{1}{2} + \frac{6}{11} + \frac{7}{12} + \frac{8}{13} + \frac{9}{14}\right) = \frac{1}{5} \cdot \frac{299737}{72072} = 0.8318 \; .$$

Posto $\varepsilon = 0.2$, approssimando il metodo dei trapezi, deve valere

$$\frac{(b-a)^3}{12\; n^2} M \leq \varepsilon$$

ove M è la limitazione superiore, in $[a,b]$, di $|f''(x)|$. Vale quindi

$$|f''(x)| = \frac{2}{(x+1)^3}$$

che in $[0,2]$, è minore o uguale a 2; quindi, scegliendo $M = 2$, si trova

$$n \geq \sqrt{\frac{8}{2.4} 2} = 3.65$$

occorre quindi dividere l'intervallo in $n = 4$ parti e l'ampiezza di ogni suddivisione è $h = 0.5$. Si ha quindi

$$f(0) = 0 \quad , \quad f(0.5) = \frac{1}{3} \quad , \quad f(1) = \frac{1}{2} \quad , \quad f(1.5) = \frac{3}{5} \quad , \quad f(2) = \frac{2}{3}$$

il metodo dei trapezi fornisce pertanto il valore

$$T_4 = \frac{0.5}{2}\left(0 + 2 \cdot \frac{1}{3} + 2 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{3}{5} + \frac{2}{3}\right) = \frac{1}{4} \cdot \frac{53}{15} = \frac{53}{60} = 0.8833 \; .$$

I valori ottenuti con i metodi approssimati vanno confrontati con il valore esatto dato da

$$\int_0^2 \frac{x}{x+1}\, dx = \int_0^2 \left[1 - \frac{1}{x+1}\right] dx = x - \log(x+1)\Big|_0^2 = 2 - \log 3 = 0.9014 \; .$$

Si vede quindi, che i due metodi hanno dato un risultato con errore inferiore a quanto richiesto. Emerge anche il fatto che il metodo dei trapezi è ben piú preciso di quello dei rettangoli.

A

FORMULARIO

A.1. Proprietà di esponenziali e logaritmi

La funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^*_+$ di equazione $f(x) = a^x$, con $a \in \mathbb{R}^*_+ \setminus \{1\}$ è invertibile e la sua inversa $f^{-1}\mathbb{R}^*_+ \to \mathbb{R}$ ha equazione $f^{-1}(x) = \log_a x$. In figura A.1 sono riportati i grafici delle due funzioni nel caso di una base maggiore di 1 e di una base minore di 1.

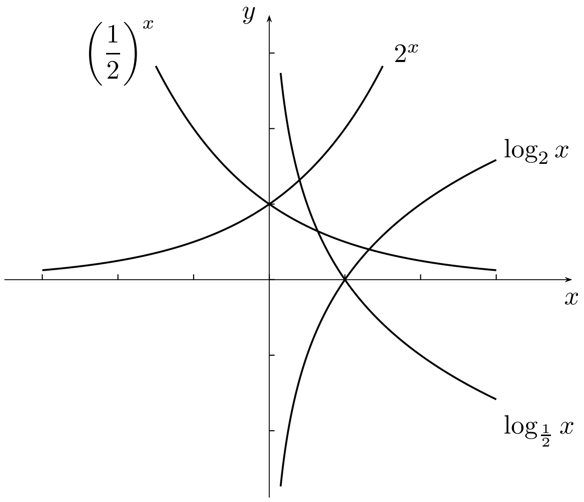


Figura A.1: I grafici delle funzioni esponenziali e logaritmiche.

Per ogni $a, b \in \mathbb{R}^*_+ \setminus \{1\}$ e $x, y \in \mathbb{R}$ valgono le seguenti proprietà

$$
\begin{aligned}
&a^0 = 1 \qquad &, \qquad & a^x a^y = a^{x+y} \ , \\
&\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y} \qquad &, \qquad & (a^x)^y = a^{xy} \ , \\
&a^x b^x = (ab)^x \qquad &, \qquad & a^{-x} = \frac{1}{a^x} = \left(\frac{1}{a}\right)^x \ ,
\end{aligned}
$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x} \ .$$

Per ogni $a, b \in \mathbb{R}^*_+ \setminus \{1\}$, $x, y \in \mathbb{R}^*_+$ e $k \in \mathbb{R}$ valgono le seguenti proprietà

$$
\begin{aligned}
&\log_a 1 = 0 \qquad &, \qquad & \log_a x + \log_a y = \log_a(xy) \ , \\
&\log_a x - \log_a y = \log_a \frac{x}{y} \qquad &, \qquad & k \log_a x = \log_a x^k \ ,
\end{aligned}
$$

$$\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b} \ .$$

A.2. Funzioni goniometriche

Si consideri un angolo α di vertice O, e sia A un qualsiasi punto su uno dei due lati dell'angolo e B la sua proiezione sull'altro lato. Comunque si scelga il punto A, tutti i triangoli rettangoli ottenuti sono simili e quindi i rapporti fra i lati sono non dipendono dalla scelta di A ma solo dall'angolo α.

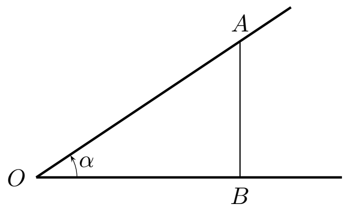


Figura A.2: L'angolo α.

Si definiscono allora le seguenti funzioni goniometriche:

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{AB}{OA} \quad , \quad \cos\alpha = \frac{OB}{OA} \quad , \quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{AB}{OB} \, . \quad , \quad \operatorname{cotg}\alpha = \frac{OB}{AB} \, . \tag{A.1}$$

le quattro funzioni di α qui definite non sono indipendenti, ma valgono le relazioni

$$\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \quad , \quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} \, . \quad , \quad \operatorname{cotg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} = \frac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha} \, . \tag{A.2}$$

Le funzioni goniometriche qui introdotte possono essere assai convenientemente rappresentate sul piano cartesiano utilizzando una circonferenza, detta goniometrica, avente il centro nell'origine degli assi e raggio unitario.
L'angolo positivo α viene rappresentato con il vertice nell'origine, un lato coincidente con il semiasse positivo delle ascisse e l'altro lato ruotato in senso antiorario, riservando la rotazione oraria per gli angoli negativi.
In questo modo il valore in radianti di α è rappresentato dalla lunghezza dell'arco sotteso sulla circonferenza.

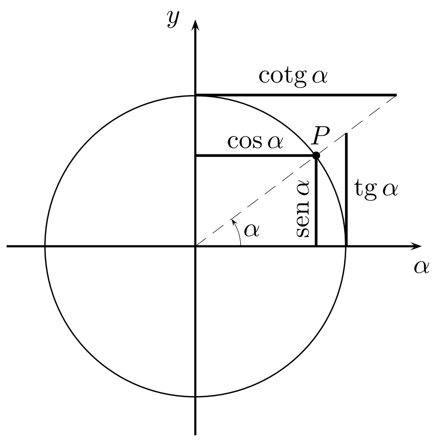


Figura A.3: La circonferenza goniometrica.

Il seno e il coseno di α sono rappresentati dalle coordinate del punto P, intersezione del lato mobile dell'angolo con la circonferenza. Vale quindi

$$P(\cos\alpha, \operatorname{sen}\alpha) \tag{A.3}$$

Inoltre la tangente e la cotangente di α sono rappresentati dai segmenti tangenti alla circonferenza rispettivamente nei punti di coordinate $(1,0)$ e $(0,1)$ compresi fra la circonferenza e il lato mobile di α, come rappresentato in figura A.3.
Uno dei vantaggi della rappresentazione delle funzioni goniometriche sulla circonferenza è la estensione della loro definizione ad angoli qualunque.
Si fornisce una tabella di corrispondenza fra le misure di alcuni angoli in gradi e in radianti e i valori corrispondenti delle funzioni goniometriche.

gradi	radianti	sen	cos	tg	cotg
0°	0	0	1	0	$\nexists$
30°	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
45°	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
60°	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
90°	$\frac{\pi}{2}$	1	0	$\nexists$	0
180°	π	0	-1	0	$\nexists$
270°	$\frac{3}{2}\pi$	-1	0	$\nexists$	0
360°	2π	0	1	0	$\nexists$

Si forniscono infine i grafici delle funzioni seno, coseno e tangente al variare dell'angolo.

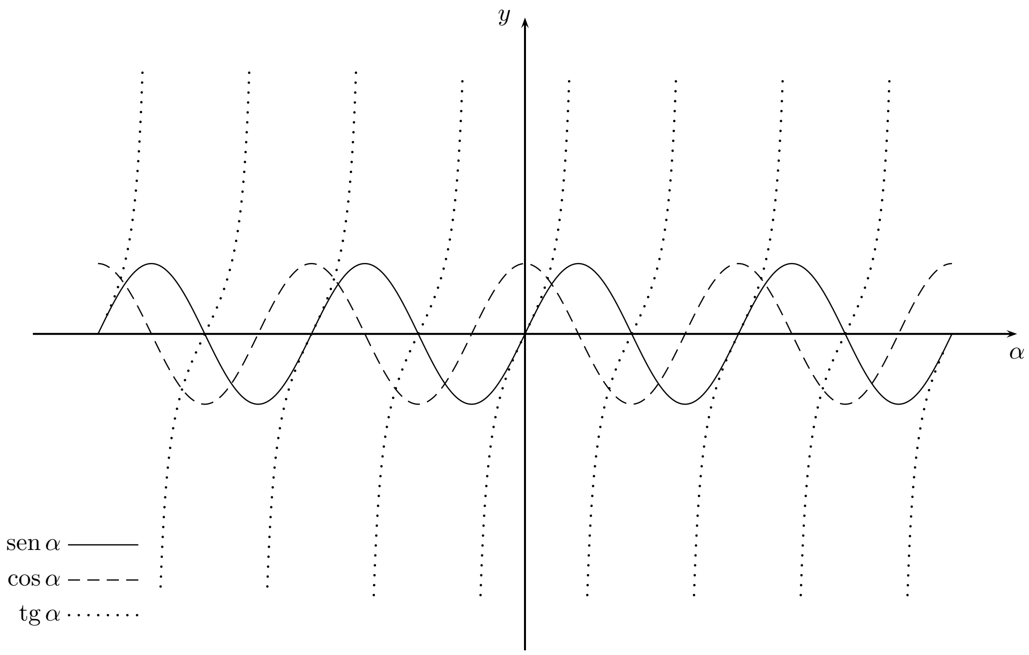


Figura A.4: Grafici delle funzioni goniometriche nell'intervallo $-720° \leq \alpha \leq 720°$.

A.3. Formule goniometriche

Valgono le seguenti formule.

Archi associati

$$\operatorname{sen}(-\alpha) = \operatorname{sen}(2\pi - \alpha) = -\operatorname{sen}\alpha \qquad \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} \pm \alpha\right) = \cos\alpha \qquad \operatorname{sen}(\pi \pm \alpha) = \mp \operatorname{sen}\alpha$$

$$\cos(-\alpha) = \cos(2\pi - \alpha) = \cos\alpha \qquad \cos\left(\frac{\pi}{2} \pm \alpha\right) = \mp\operatorname{sen}\alpha \qquad \cos(\pi \pm \alpha) = -\cos\alpha$$

$$\operatorname{tg}(-\alpha) = \operatorname{tg}(2\pi - \alpha) = -\operatorname{tg}\alpha \qquad \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} \pm \alpha\right) = \mp\operatorname{cotg}\alpha \qquad \operatorname{tg}(\pi \pm \alpha) = \pm\operatorname{tg}\alpha$$

$$\operatorname{cotg}(-\alpha) = \operatorname{cotg}(2\pi - \alpha) = -\operatorname{cotg}\alpha \qquad \operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{2} \pm \alpha\right) = \mp\operatorname{tg}\alpha \qquad \operatorname{cotg}(\pi \pm \alpha) = \pm\operatorname{cotg}\alpha$$

$$\operatorname{sen}\left(\frac{3}{2}\pi \pm \alpha\right) = -\cos\alpha \qquad \operatorname{tg}\left(\frac{3}{2}\pi \pm \alpha\right) = \mp\operatorname{cotg}\alpha$$

$$\cos\left(\frac{3}{2}\pi \pm \alpha\right) = \pm\operatorname{sen}\alpha \qquad \operatorname{cotg}\left(\frac{3}{2}\pi \pm \alpha\right) = \mp\operatorname{tg}\alpha$$

Formule di addizione e sottrazione

$$\operatorname{sen}(\alpha \pm \beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\operatorname{sen}\beta \qquad \cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta$$

$$\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{tg}\beta}{1 \mp \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta} \qquad \operatorname{cotg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{cotg}\alpha\operatorname{cotg}\beta \mp 1}{\operatorname{cotg}\beta \pm \operatorname{cotg}\alpha}$$

Formule di duplicazione e bisezione

$$\operatorname{sen}2\alpha = 2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\operatorname{sen}^2\alpha$$

$$\operatorname{tg}2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha}$$

$$\operatorname{cotg}2\alpha = \frac{\operatorname{cotg}^2\alpha - 1}{2\operatorname{cotg}\alpha}$$

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos\alpha}{2}}$$

$$\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1 + \cos\alpha}{2}}$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{1 + \cos\alpha} = \frac{1 - \cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}$$

$$\operatorname{cotg}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1 + \cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{1 - \cos\alpha}$$

Formule parametriche Posto $t = \operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}$, per ogni $\alpha \neq k\pi$. $k \in \mathbb{Z}$ si ha

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{2t}{1+t^2} \quad , \quad \cos\alpha = \frac{1-t^2}{1+t^2} \quad , \quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{2t}{1-t^2} \quad , \quad \operatorname{cotg}\alpha = \frac{1-t^2}{2t}$$

Formule di prostaferesi e di Werner [1]

$$\operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}\beta = 2\operatorname{sen}\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\operatorname{sen}\alpha - \operatorname{sen}\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\operatorname{sen}\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\operatorname{sen}\frac{\alpha+\beta}{2}\operatorname{sen}\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)\right]$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)\right]$$

$$\operatorname{sen}\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left[\operatorname{sen}(\alpha-\beta) + \operatorname{sen}(\alpha+\beta)\right]$$

[1] Johann Werner (1468-1522), matematico tedesco.

A.4. Trigonometria

Tenendo presente il triangolo in figura, ed essendo r_i ed r_c rispettivamente i raggi delle circonferenze inscritta e circoscritta e p il semiperimetro, valgono le proprietà di seguito elencate.

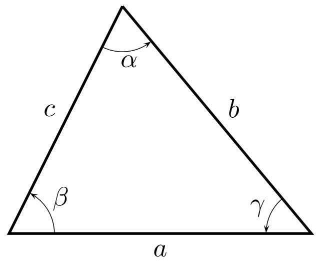


Figura A.5: Le convezioni sul triangolo.

Teorema dei seni

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{b}{\operatorname{sen}\beta} = \frac{c}{\operatorname{sen}\gamma}\ .$$

Teorema delle proiezioni

$$\begin{aligned} a &= b\cos\gamma + c\cos\beta \\ b &= a\cos\gamma + c\cos\alpha \\ c &= a\cos\beta + b\cos\alpha\ . \end{aligned}$$

Teorema del coseno

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha \\ b^2 &= c^2 + a^2 - 2ca\cos\beta \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma\ . \end{aligned}$$

Area del triangolo

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \frac{1}{2}\,ab\operatorname{sen}\gamma = \frac{1}{2}\,bc\operatorname{sen}\alpha = \frac{1}{2}\,ca\operatorname{sen}\beta \\ \mathcal{A} &= p\,r_i \\ \mathcal{A} &= \frac{abc}{4r_c} \\ \mathcal{A} &= \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} && \text{Formula di Erone}^2 \end{aligned}$$

[2] Erone di Alessandria (?,?), matematico greco.

A.5. Limiti notevoli

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{x}=1 \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{x}=1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}=0 \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x^2}=\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\log a \qquad \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\log_a e=\frac{1}{\log a} \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{x}=1$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e \qquad \lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{k}{x}\right)^x=e^k$$

$$\lim_{x\to 0}(1+kx)^{\frac{1}{x}}=e^k \qquad \lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^k-1}{x}=k$$

$$\lim_{x\to 0^+}x^c\log x=0 \quad \text{per } c>0 \qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{\log x}{x^c}=0 \quad \text{per } c>0$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^c}=+\infty \quad \forall\, c\in\mathbb{R} \qquad \lim_{x\to-\infty}x^c e^x=0 \quad \forall\, c\in\mathbb{R}\,.$$

A.6. Derivate

Regole di derivazione

$$D[kf(x)]=kf'(x)$$

$$D[f(x)\cdot g(x)]=f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)$$

$$D(f\circ g)(x)=Df[g(x)]=f'[g(x)]\cdot g'(x)$$

$$D[f(x)+g(x)]=f'(x)+g'(x)$$

$$D\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f'(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x)}{g^2(x)}$$

$$Df^{-1}(x)=\left[\frac{1}{f'(y)}\right]_{y=f^{-1}(x)}$$

Derivate elementari

$$Dk = 0 \qquad Dx = 1$$

$$Dx^n = nx^{n-1} \qquad D[f^n(x)] = nf^{n-1}(x) \cdot f'(x)$$

$$D \operatorname{sen} x = \cos x \qquad D \operatorname{sen}[f(x)] = \cos[f(x)] \cdot f'(x)$$

$$D \cos x = -\operatorname{sen} x \qquad D \cos[f(x)] = -\operatorname{sen}[f(x)] \cdot f'(x)$$

$$D \operatorname{tg} x = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x \qquad D \operatorname{tg}[f(x)] = \frac{f'(x)}{\cos^2[f(x)]}$$

$$D \operatorname{cotg} x = -\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x} = -1 - \operatorname{cotg}^2 x \qquad D \operatorname{cotg}[f(x)] = -\frac{f'(x)}{\operatorname{sen}^2[f(x)]}$$

$$D \operatorname{arcsen} x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad D \operatorname{arcsen}[f(x)] = \frac{f'(x)}{\sqrt{1-f^2(x)}}$$

$$D \arccos x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad D \arccos[f(x)] = -\frac{f'(x)}{\sqrt{1-f^2(x)}}$$

$$D \operatorname{arctg} x = \frac{1}{1+x^2} \qquad D \operatorname{arctg}[f(x)] = \frac{f'(x)}{1+f^2(x)}$$

$$D \operatorname{arccotg} x = -\frac{1}{1+x^2} \qquad D \operatorname{arccotg}[f(x)] = -\frac{f'(x)}{1+f^2(x)}$$

$$Da^x = a^x \cdot \log a \qquad Da^{f(x)} = a^{f(x)} \cdot \log a \cdot f'(x)$$

$$De^x = e^x \qquad De^{f(x)} = e^{f(x)} f'(x)$$

$$D \log_a x = \frac{\log_a e}{x} = \frac{1}{x \log a} \qquad D \log_a f(x) = \frac{f'(x)}{x \log a}$$

$$D[f(x)]^{g(x)} = De^{g(x)\log[f(x)]} = [f(x)]^{g(x)} \cdot \left[g'(x)\log[f(x)] + \frac{g(x) \cdot f'(x)}{f(x)}\right]$$

A.7. Integrali

Proprietà degli integrali

Se f e g sono due funzioni integrabili e F è una primitiva di f, valgono le seguenti proprietà.

$$\int_a^b [\alpha f(x) + \beta g(x)]\,dx = \alpha \int_a^b f(x)\,dx + \beta \int_a^b g(x)\,dx$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b \left|f(x)\right|\,dx$$

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(x)\,dx$$

Metodi di integrazione

$$\int f(x) \cdot g'(x)\,dx = f(x) \cdot g(x) - \int f'(x) \cdot g(x)\,dx \qquad \text{(per parti)}$$

$$\int f(x)\,dx = \left[\int f[g(t)] \cdot g'(t)\,dt\right]_{t=g^{-1}(x)} \qquad \text{(per sostituzione della variabile indipendente)}$$

$$\int f[g(x)] \cdot g'(x)\,dx = \left[\int f(t)\,dt\right]_{t=g^{-1}(x)} \qquad \text{(per sostituzione della variabile dipendente)}$$

Integrali elementari

$$\int x^\alpha \, dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + k \qquad \int [f(x)]^\alpha f'(x) \, dx = \frac{[f(x)]^{\alpha+1}}{\alpha+1} + k \qquad \text{se } \alpha \neq 1$$

$$\int \frac{1}{x} \, dx = \log|x| + k \qquad \int \frac{f'(x)}{f(x)} \, dx = \log|f(x)| + k$$

$$\int a^x \, dx = \frac{1}{\log a} a^x + k \qquad \int a^{f(x)} f'(x) \, dx = \frac{1}{\log a} a^{f(x)} + k$$

$$\int \operatorname{sen} x \, dx = -\cos x + k \qquad \int \operatorname{sen}[f(x)] f'(x) \, dx = -\cos[f(x)] + k$$

$$\int \cos x \, dx = \operatorname{sen} x + k \qquad \int \cos[f(x)] f'(x) \, dx = \operatorname{sen}[f(x)] + k$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} \, dx = \operatorname{tg} x + k \qquad \int \frac{f'(x)}{\cos^2[f(x)]} \, dx = \operatorname{tg}[f(x)] + k$$

$$\int \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x} \, dx = -\operatorname{cotg} x + k \qquad \int \frac{f'(x)}{\operatorname{sen}^2[f(x)]} \, dx = -\operatorname{cotg}[f(x)] + k$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} \, dx = \operatorname{arctg} x + k \qquad \int \frac{f'(x)}{1+[f(x)]^2} \, dx = \operatorname{arctg}[f(x)] + k$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arcsen} x + k \qquad \int \frac{1}{\sqrt{1-[f(x)]^2}} = \operatorname{arcsen}[f(x)] + k$$

Indice analitico