

PIETRO DONATIS

LEZIONI DI FISICA I

Queste lezioni sono pubblicate sotto una licenza



che può essere visionata al sito

<http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/2.5/it/>.

Premessa e notazioni.

Queste *Lezioni di fisica 1* sono rivolte agli studenti del terzo anno di un liceo scientifico, ma possono essere utilizzate, apportando i tagli che si riterranno opportuni, anche da studenti di altri indirizzi di studio.

L'idea da cui sono nate non è quella di affiancare il libro di testo in adozione, ma di sostituirlo. Questo principalmente per motivi economici, perché gli allievi possano disporre di un testo serio e gratuito: scaricabile dalla rete e fotocopabile liberamente.

Il contenuto copre l'attuale programma ministeriale per il liceo scientifico; oltre a ciò si potranno trovare approfondimenti ed alcuni argomenti tradizionalmente tralasciati in un corso tradizionale. Si è ritenuto infatti utile presentare al lettore un riferimento chiaro e quanto più possibile semplice per argomenti solitamente considerati molto ostici. Alcune parti, tralasciabili senza compromettere la comprensione del seguito, sono presentate come *intermezzi*.

La responsabilità di quanto scritto, e di tutti gli eventuali errori, è esclusivamente di Pietro Donatis; il quale, tuttavia, deve riconoscere che tutta la parte IV sulla Termodinamica è dovuto per l'impostazione e la quasi totalità dei testi a Fabio Acerbi. Deve inoltre ringraziare Fabio Maria Antoniali, Carlo Càssola e Teodoro Natelli per le numerose discussioni, indispensabili a chiarirgli i molti punti delicati.

Questo lavoro è senz'altro da considerarsi in evoluzione; sarò grato a tutti coloro che vorranno essere tanto gentili da segnalare errori o fornire commenti utili al miglioramento di quanto scritto in vista di auspicabili nuove versioni.

Per separare la parte decimale di un numero si è usato il punto invece della virgola.

Le quantità vettoriali sono indicate in grassetto mentre i corrispondenti moduli sono in carattere normale; cosicché, ad esempio, \mathbf{v} indica un vettore e v il suo modulo.

Le costanti fisiche citate nel testo sono riportate utilizzando, se non diversamente indicato, i valori forniti dal Particle Data Group (<http://pdg.lbl.gov>), dal National Institute of Standard and Technology (<http://www.nist.gov>) e dalla NASA (<https://nssdc.gsfc.nasa.gov/planetary/planetfact.html>). Questi valori sono riportati con il loro errore sperimentale sulle ultime cifre indicato fra parentesi tonde: per esempio, il valore della costante di gravitazione universale è $G = 6.674\,30(15) \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$ e quindi le ultime due cifre, 30, sono incerte e l'errore commesso nella loro determinazione è 15; in maniera meno compatta tale valore si scriverebbe $G = (6.674\,30 \pm 0.000\,15) \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$. Le costanti senza errore, come l'accelerazione di gravità standard, sono valori esatti.

Tutti i logaritmi presenti nel seguito, indicati con il simbolo \log , sono logaritmi naturali in base e . Si è ritenuto di utilizzare lo strumento delle funzioni goniometriche, le principali proprietà delle quali sono riassunte in appendice B.

Queste lezioni sono state scritte usando il programma di composizione tipografica \LaTeX ; per le figure è stato usato il pacchetto `pstricks`.

Palermo, 10 agosto 2021

Parte I. Meccanica del punto materiale	1
1. Introduzione.	2
1.1. Considerazioni metodologiche.	2
1.2. Grandezze fisiche fondamentali e derivate.	3
1.2.1. Intervallo di tempo.	3
1.2.2. Lunghezza.	4
1.2.3. Massa	4
1.3. Dimensioni.	4
2. Cinematica del punto materiale.	6
2.1. Il modello di punto materiale.	6
2.2. Sistema di riferimento.	6
2.3. Moti rettilinei.	7
2.3.1. Moto rettilineo uniforme.	8
2.3.2. Moto vario.	9
2.3.3. Moto uniformemente accelerato	12
2.3.4. Moto di caduta libera.	14
Intermezzo. Moto uniformemente accelerato e numeri dispari	16
2.4. Moti piani.	17
2.4.1. Algebra dei vettori.	17
2.4.2. Descrizione dei moti piani.	21
2.4.3. Scomposizione di un moto piano.	23
2.4.4. Moto di un proiettile.	23
2.5. Moto circolare uniforme.	26
2.5.1. Coordinate angolari.	27
2.5.2. Coordinate cartesiane.	29
2.6. Moto armonico.	31
2.7. Coordinate polari.	32
2.8. Cinematica dei moti relativi.	32
2.8.1. Moto relativo di due punti materiali.	34
2.8.2. Caso traslatorio.	34
2.8.3. Caso rotatorio.	36
2.8.4. Caso rototraslatorio.	38
2.8.5. Trasformazioni di Galilei.	38
Intermezzo. Achille e la Tartaruga	39
3. Dinamica del punto materiale.	42
3.1. La massa inerziale.	42
3.2. La legge fondamentale della dinamica.	43
3.3. Principio di azione e reazione.	44
3.4. Sistemi di riferimento inerziali.	45
3.5. I principi di Newton.	46
3.6. Forza peso.	46
3.6.1. Piano orizzontale liscio.	46
3.6.2. Piano inclinato liscio.	47
3.7. Forza di attrito radente.	49
3.7.1. Attrito radente statico.	49
3.7.2. Attrito radente dinamico.	50
3.8. Fili e molle.	50
3.8.1. Filo ideale.	50
3.8.2. Molla ideale.	51

3.8.3. Il dinamometro..	52
3.9. Carrucole..	52
3.9.1. Carrucola mobile..	53
3.10. Pendolo semplice..	54
3.11. Forza centripeta..	56
3.12. Dinamica dei moti relativi..	56
3.13. Principio di relatività..	58
3.14. Statica del punto materiale..	59
Intermezzo. Il pendolo di Foucault..	60
4. Gravitazione..	63
4.1. Le osservazioni..	63
4.2. I modelli antichi..	64
4.3. I modelli moderni..	65
4.4. Le leggi di Kepler..	65
4.5. La legge di gravitazione universale..	66
4.6. Massa gravitazionale..	68
4.7. L'accelerazione gravitazionale..	68
4.8. Satelliti..	70
4.9. Campo gravitazionale..	71
Intermezzo. La misura della densità della Terra..	71
5. Leggi di conservazione..	73
5.1. Conservazione dell'energia meccanica..	73
5.1.1. Lavoro..	73
5.1.2. Potenza..	76
5.1.3. Teorema dell'energia cinetica..	77
5.1.4. Forze conservative. Energia potenziale..	78
5.1.5. Casi particolari..	80
5.1.6. La relazione tra forza ed energia potenziale..	81
5.1.7. Conservazione dell'energia meccanica..	83
5.1.8. Energia totale nel caso della forza gravitazionale..	84
5.2. Conservazione della quantità di moto..	85
5.2.1. Impulso..	85
5.2.2. Quantità di moto..	86
5.2.3. Conservazione della quantità di moto..	87
5.3. Conservazione del momento angolare..	87
5.3.1. Momento di un vettore..	87
5.3.2. Momento angolare..	89
5.3.3. Conservazione del momento angolare..	89
5.4. Forze centrali..	90
Parte II. Meccanica dei sistemi materiali..	92
6. Dinamica dei sistemi materiali..	93
6.1. Forze interne ed esterne..	93
6.2. Equazioni cardinali..	94
6.3. Centro di massa..	95
6.4. Energia cinetica di un sistema materiale..	96
Intermezzo. Problema dei due corpi. Massa ridotta..	97
7. Urti..	101
7.1. I diversi tipi di urto..	101
7.2. Urto elastico..	102
7.2.1. Casi particolari..	103
7.3. Urto anelastico..	104
7.4. Nel sistema del centro di massa..	104
7.4.1. Urto elastico..	105

7.4.2. Urto completamente anelastico.	105
7.5. Urti obliqui.	106
7.6. Esplosioni.	107
8. Dinamica del corpo rigido.	109
8.1. Moto traslatorio e moto rotatorio.	109
8.2. Momento d'inerzia.	109
8.3. Teorema di Huygens-Steiner	111
8.4. Dinamica rotazionale del corpo rigido.	112
8.4.1. Conservazione del momento angolare assiale.	114
8.5. Applicazioni.	115
8.5.1. Rotazione attorno ad un asse non principale.	115
8.5.2. Moto di rotolamento.	117
8.5.3. Il pendolo di torsione.	119
8.5.4. Pendolo composto.	120
8.5.5. Carrucola.	121
Intermezzo. Il caso generale. Equazioni di Eulero	123
9. Statica del corpo rigido.	127
9.1. Equilibrio della bilancia a bracci.	127
9.2. Equazioni cardinali della statica.	133
9.3. Centro di forze parallele. Baricentro	133
9.3.1. La scala appoggiata.	135
9.4. Equilibrio di un corpo rigido vincolato.	136
9.4.1. Corpo vincolato ad un asse.	136
9.4.2. Corpo rigido appoggiato su di un piano orizzontale.	137
9.5. La leva.	138
Parte III. Meccanica dei liquidi.	139
10. Statica dei liquidi.	140
10.1. Stati di aggregazione della materia.	140
10.2. Densità e pressione.	140
10.2.1. Pressione atmosferica.	141
10.3. Liquido in equilibrio.	142
10.4. Legge di Stevin.	143
10.4.1. Torchio idraulico.	145
10.4.2. Barometro di Torricelli.	145
10.5. Legge di Archimede.	146
10.5.1. Equilibrio dei galleggianti.	148
10.5.2. Bilancia idrostatica.	148
10.6. Tensione superficiale.	149
10.6.1. Linee di contatto.	150
10.6.2. Legge di Young-Laplace.	152
10.6.3. Capillarità.	153
Intermezzo. Liquido in rotazione	154
11. Dinamica dei liquidi.	156
11.1. Definizione del modello.	156
11.2. Portata.	157
11.3. Teorema di Bernoulli.	158
11.3.1. Teorema di Torricelli.	160
11.3.2. Effetto Venturi.	160
11.3.3. Effetto Magnus.	161
11.4. Viscosità.	162
11.4.1. Attrito viscoso.	163

Parte IV. Termodinamica	164
12. Termometria	165
12.1. Sistema termodinamico. Stato.	165
12.2. Principio ‘zero’ della termodinamica.	166
12.3. Regola delle fasi Gibbs.	167
12.4. Misurazione della temperatura.	167
12.5. Dilatazione termica.	168
12.6. Trasformazioni di un sistema termodinamico.	169
12.7. Termometri a gas. Leggi di Gay–Lussac e temperatura assoluta.	170
12.8. Legge di Boyle. Equazione dei gas perfetti.	172
13. Modello molecolare dei gas	175
13.1. Analisi del modello: relazione di Joule-Clausius.	175
13.2. Equazione di van der Waals.	179
13.3. Gradi di libertà.	180
13.4. Principio di equipartizione dell’energia.	181
Intermezzo. Sul concetto di modello	181
14. Calore e lavoro	183
14.1. Capacità termica.	183
14.2. Cambiamenti di stato: calori latenti.	184
14.3. Misura dei calori specifici.	185
14.4. Evaporazione, vaporizzazione e condensazione.	186
14.5. Temperatura critica e diagramma di fase.	187
14.6. Diagramma pT e punto triplo.	188
14.7. Ancora sulle trasformazioni.	189
14.8. Lavoro di una trasformazione.	190
Intermezzo 1. Sudore quotidiano	192
Intermezzo 2. Capacità termica del sistema solare	193
Intermezzo 3. Calore specifico negativo ed equilibrio.	193
15. Primo principio della termodinamica	194
15.1. Energia interna.	194
15.1.1. Moto perpetuo di prima specie	198
15.2. Capacità termiche di un gas perfetto.	199
15.3. Equazione delle trasformazioni adiabatiche.	200
Intermezzo. La temperatura dell’universo	202
16. Secondo principio della termodinamica	203
16.1. Rendimento di un ciclo termodinamico.	203
16.2. Rendimento di un ciclo di Carnot.	203
16.3. Macchine frigorifere.	205
16.4. Secondo principio della termodinamica.	205
16.5. Equivalenza degli enunciati di Clausius e Kelvin.	206
16.5.1. Moto perpetuo di seconda specie	207
16.6. Teorema di Carnot.	207
16.7. Disuguaglianza di Clausius.	209
16.8. Definizione operativa della temperatura assoluta.	209
16.8.1. Inaccessibilità dello zero assoluto	210
16.9. Forma generale della disuguaglianza di Clausius.	210
16.10. Una conseguenza della disuguaglianza di Clausius.	213
17. Entropia	215
17.1. Esistenza della funzione di stato S .	215
17.2. Entropia e irreversibilità di una trasformazione.	218
17.3. Esempi.	220
17.4. Interpretazione microscopica dell’entropia.	224
17.4.1. Terzo principio della termodinamica.	225

Intermezzo. Variazione di entropia di un sasso	225
Parte V. Appendici.	229
A. Unità di misura e costanti fisiche.	230
A.1. Grandezze fisiche fondamentali.	230
A.2. Prefissi per multipli e sottomultipli.	230
A.3. Grandezze derivate.	230
A.4. Alcune costanti fisiche.	232
A.5. Dati sul Sistema Solare.	232
B. Funzioni goniometriche.	233
C. Coordinate polari.	236
Bibliografia	238

Parte I

MECCANICA DEL PUNTO MATERIALE

1

INTRODUZIONE.

1.1 CONSIDERAZIONI METODOLOGICHE.

La fisica, dal greco *f'usis*, è la scienza che studia i fenomeni naturali enunciando le leggi che li descrivono. Questa descrizione è fatta in termini di concetti teorici, opportunamente scelti, che rappresentano il fenomeno fisico all'interno di un certo schema concettuale. Un concetto teorico utilizzato nella descrizione di un fenomeno fisico viene detto **grandezza fisica**, mentre lo schema concettuale di riferimento viene detto **modello**.

Per chiarire cosa sia una grandezza fisica e quale sia il suo ruolo nella descrizione di un fenomeno conviene fare qualche esempio. Se si intende descrivere il moto di un treno lungo un binario occorre definire grandezze fisiche come la posizione, il tempo, la velocità; descrivendo il moto delle molecole di un gas che si muovono all'interno di un recipiente chiuso saranno utili altre grandezze fisiche quali il volume del recipiente e la dimensione delle molecole; volendo descrivere dell'acqua portata ad ebollizione sarà necessario introdurre fra le grandezze fisiche la temperatura; e via di seguito. È bene sottolineare il fatto che le grandezze fisiche sono oggetti teorici che non costituiscono la realtà fisica, ma la rappresentano, all'interno del modello, attraverso una precisa corrispondenza fra oggetti reali e teorici.

Un modello è costituito da una serie di ipotesi sulle grandezze fisiche che semplificano il fenomeno in questione: per esempio si può supporre che le ruote del treno siano perfettamente circolari e che le molecole di un gas siano piccole sferette rigide; nonostante queste ipotesi non siano 'vere' ma siano semplificazioni, esse consentono di dare una rappresentazione del fenomeno in linguaggio matematico. La matematica è quindi lo strumento fondamentale perché, rappresentando le grandezze fisiche, consente di metterle in relazione tramite equazioni o formule che vanno sottoposte al vaglio sperimentale. Ognuna di queste equazioni o formule è detta **legge fisica**.

La bontà di un modello è pertanto costituita dall'accordo fra la descrizione matematica che ne risulta, cioè la legge fisica, ed il dato sperimentale; tale accordo non è mai perfetto visto che le ipotesi fatte semplificano sempre. Di uno stesso fenomeno fisico si possono dare descrizioni più o meno accurate a seconda del diverso modello scelto per la descrizione: solitamente i modelli più accurati sono anche i più complessi quindi spesso si sceglie la semplicità sacrificando l'accuratezza. Un modello può anche essere preferito perché descrive meglio certi aspetti di un fenomeno pur trascurandone altri che, per lo studio in questione, non sono considerati rilevanti. Per esempio volendo descrivere il galleggiamento di una nave in mezzo all'Oceano Atlantico si userà un modello che considera la superficie dell'acqua come piatta, volendo invece descrivere il fenomeno delle maree dell'Oceano Atlantico si userà un modello che considera la superficie dell'acqua come una porzione di sfera; questi due modelli consentono di dare una buona descrizione dei fenomeni in questione nonostante il fatto che la superficie dell'Oceano Atlantico non sia né piatta né una porzione di sfera.

Ogni teoria fisica ha i suoi limiti di validità entro i quali le ipotesi che stanno alla base del modello consentono una buona descrizione del fenomeno. Per esempio un modello che descriva la caduta dei gravi sotto l'azione della forza attrattiva della Terra trascurando l'effetto dell'attrito dell'aria è valido per una piccola pallina che cada per qualche metro. Invece nel caso in cui il corpo che cade sia esteso e la caduta sia di diverse decine o centinaia di metri l'attrito ha un ruolo importante che non si può trascurare senza ritrovarsi con un modello teorico in forte disaccordo con il dato sperimentale.

Quanto detto dovrebbe aver convinto il lettore che

1. la fisica non descrive la realtà in sé, ma ne dà una rappresentazione attraverso dei modelli che usano ipotesi che semplificano il fenomeno in questione rendendone possibile una descrizione che utilizzi il linguaggio matematico;

2. le bontà di un modello può essere valutata solo in rapporto alla corrispondenza con il dato sperimentale del fenomeno che si vuole descrivere;
3. una teoria fisica, quindi, basandosi su modelli, non è né giusta né sbagliata e ancor meno *vera*, ma piuttosto descrive più o meno accuratamente un fenomeno entro certi limiti di validità.

Il metodo di formazione di una teoria fisica per mezzo della costruzione di modelli e della loro verifica sperimentale è noto con il nome di **metodo scientifico** o **metodo sperimentale** la cui codificazione nella scienza moderna è dovuta a Galilei¹ ed è stata enormemente sviluppata nei quattro secoli successivi.

La fisica viene tradizionalmente divisa in diverse *branche*; le principali sono la **meccanica**, che studia il moto dei corpi, la **termodinamica**, che studia i fenomeni termici, l'**ottica**, che studia le proprietà della luce, l'**elettromagnetismo**, studia le proprietà elettriche e magnetiche della materia. Queste branche sono dette far parte della **fisica classica**, con il qual termine si intendono designare tutte le teorie fisiche sviluppate fino alla fine dell'Ottocento e che non fanno uso né della teoria della relatività né della meccanica quantistica.

Il testo che state leggendo tratta le prime due di queste branche.

1.2 GRANDEZZE FISICHE FONDAMENTALI E DERIVATE.

La comunità scientifica ha adottato il *Sistema internazionale di unità di misura* (SI) che usa sette *grandezze fondamentali*; esse sono l'intervallo di tempo t , la lunghezza l , la massa m , la temperatura T , l'intensità di corrente elettrica i , la quantità di sostanza n e l'intensità luminosa I . Tutte le altre si dicono *grandezze derivate*. La scelta delle grandezze fondamentali è convenzionale: sarebbe stato possibile effettuare una scelta diversa.

Per lo studio della meccanica si utilizzano solo le prime tre grandezze fondamentali: tempo, lunghezza e massa. Occorre tener presente che la definizione di una grandezza fisica è sempre una *definizione operativa*; questa scelta si oppone alla definizione *essenzialista* che invece si propone di cogliere l'essenza dell'oggetto da definire.

Esempi classici di definizioni essenzialiste sono le prime definizioni degli *Elementi* di Euclide² (si veda [1]); la prima, per esempio, suona: «Un punto non ha parti».

La definizione operativa, invece, rinuncia a cercare l'essenza ma definisce la grandezza spiegando come essa viene misurata. La misura di una grandezza è una procedura, che può far uso di una strumentazione più o meno complicata, che la confronta con una grandezza di riferimento, detta **unità di misura**, e con i suoi multipli e sottomultipli. Per una descrizione dei multipli e sottomultipli standard di una unità di misura, si veda l'appendice A.

1.2.1 INTERVALLO DI TEMPO.

Un intervallo di tempo t viene definito operativamente utilizzando appositi strumenti detti orologi; la misura viene effettuata leggendo sull'orologio il numero t_1 indicato all'inizio e il numero t_2 indicato alla fine dell'intervallo temporale che si vuole misurare; in questo modo l'intervallo di tempo è dato da

$$t_2 - t_1 \tag{1.1}$$

Perché la definizione operativa sia completa rimane da dire che cosa si un **orologio**. Si tratta di uno strumento con una parte mobile che compie il suo movimento in un intervallo di tempo noto. La parte mobile può essere dell'acqua, della sabbia, un pendolo, delle lancette, la rotazione apparente del Sole attorno alla Terra o altro. Il punto è che il movimento dell'orologio deve essere compiuto sempre nello stesso intervallo di tempo. Il problema è che il controllo sulla regolarità del moto di un orologio può essere fatto solo per mezzo di un altro orologio. Da questo circolo vizioso si esce scegliendo *arbitrariamente* un orologio di riferimento standard il cui comportamento viene *convenzionalmente* ritenuto regolare. Come orologio standard è stato scelto un orologio atomico

¹ Galileo Galilei (1564-1642), scienziato italiano.

² Euclide (III sec. a.C.), grande matematico e scienziato di Alessandria (?).

che utilizza il periodo di oscillazione della radiazione elettromagnetica prodotta dalla transizione fra due livelli iperfini dello stato fondamentale dell'atomo di cesio-133. Non è così importante sapere qui cosa siano due livelli iperfini o cosa sia una transizione fra di essi; quello che importa è sapere che si tratta di un processo che si ripete con una regolarità che viene ritenuta sufficiente ad essere usato come standard per la misurazione del tempo.

Il Sistema internazionale utilizza come unità di misura con cui confrontare gli intervalli di tempo il **secondo**, indicato con il simbolo s . Per definire il secondo si è cercato per lungo tempo di fare riferimento al moto del Sole definendolo come $1/86400$ del giorno solare medio; il giorno solare non ha però un valore stabile poiché la rotazione della Terra attorno al proprio asse non è sufficientemente uniforme. Oggi si definisce secondo come la durata di $9\,192\,631\,770$ periodi dell'orologio atomico standard.

Definita l'unità di misura, ogni altro intervallo di tempo viene misurato per confronto con questa unità o con i suoi multipli quali il minuto, l'ora, il giorno e così via; o i suoi sottomultipli quali il decimo, il centesimo o il millesimo di secondo.

1.2.2 LUNGHEZZA.

Una lunghezza l (a volte anche detta distanza d) viene definita operativamente utilizzando appositi regoli graduati; volendo misurare, ad esempio, la lunghezza di un tavolo si pone un'estremità del regolo graduato in corrispondenza di una delle estremità del tavolo di cui si vuole conoscere la lunghezza; l'altra estremità del tavolo si viene a trovare in corrispondenza con una certa graduazione del regolo ove si trova un numero; tale numero è la lunghezza del tavolo.

Rimane da spiegare come fare a graduare un regolo; per farlo occorre disporre di una lunghezza di riferimento, e dei suoi multipli e sottomultipli, da riportare sul regolo usato per la misura. Tale lunghezza di riferimento è l'unità di misura della lunghezza e viene detta **metro**, indicata il simbolo m . La definizione di metro è mutata nel corso degli anni; per esempio è stato definito come la quarantamilionesima parte del meridiano terrestre passante per Parigi e come la lunghezza di una sbarra campione di platino-iridio, conservata nei pressi di Parigi. Oggi il metro è definito come lo spazio percorso dalla luce nel vuoto in $1/299\,792\,458$ s.

1.2.3 MASSA

La procedura per la definizione operativa della massa m richiede alcune conoscenze che verranno date solo nel seguito del testo, se ne rimanda quindi la descrizione al luogo opportuno. Qui ci si limita a definire quale sia la massa di riferimento per la misura e quale ne sia l'unità. La massa unitaria di riferimento è stata per molti anni quella di un litro, cioè 1 dm^3 , di acqua distillata alla temperatura di 3.98°C ; ora si utilizza quella di un cilindro di altezza e diametro pari a 0.039 m di una lega di platino-iridio depositato presso l'Ufficio internazionale dei pesi e delle misure a Sèvres, vicino a Parigi. Il valore attribuito a tale massa di riferimento è detto **chilogrammo** e indicato con il simbolo kg .

1.3 DIMENSIONI.

Alle grandezze fisiche fondamentali vengono attribuite delle dimensioni indicate con i simboli

$$[t] \quad , \quad [l] \quad , \quad [m] \quad , \quad [T] \quad , \quad [i] \quad , \quad [n] \quad , \quad [I] \quad . \quad (1.2)$$

Per la generica grandezza derivata X le dimensioni sono date da un'equazione della forma

$$[X] = [t]^\alpha [l]^\beta [m]^\gamma [T]^\delta [i]^\epsilon [n]^\zeta [I]^\eta ; \quad (1.3)$$

$\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon, \zeta, \eta$ sono numeri razionali e si dicono le *dimensioni* di X rispetto alle dimensioni delle grandezze fondamentali, così, per esempio, una grandezza F per cui valga

$$[F] = [t]^{-2} [l]^1 [m]^1 \quad (1.4)$$

ha dimensioni -2 rispetto al tempo e $+1$ rispetto a lunghezza e massa; si dice anche che F ha le dimensioni di una lunghezza per una massa diviso un tempo al quadrato; la sua unità di misura è, conseguentemente, m kg s^{-2} .

Una grandezza si dice *adimensionale* se le sue dimensioni sono nulle, cioè se vale $\alpha = \beta = \gamma = 0$; due grandezze avente le stesse dimensioni si dicono *omogenee*.

Il termine dimensioni si riferisce al fatto che se l'unità di misura di una grandezza fondamentale viene moltiplicata per un fattore k l'unità di misura della grandezza derivata X risulta moltiplicata per k elevato a una potenza uguale alla dimensione di X rispetto a quella grandezza fondamentale. Per esempio se la lunghezza viene misurata in centimetri anziché in metri e il tempo in minuti invece che in secondi, cioè se l'unità di misura della lunghezza viene divisa per 100 e quella del tempo moltiplicata per 60 la nuova unità di misura di F è

$$\text{cm kg min}^{-2} = \frac{1}{100 \cdot 60^2} \text{m kg s}^{-2} . \quad (1.5)$$

Ogni legge fisica è una relazione fra grandezze omogenee; quindi se la legge ha la forma

$$A + B = C + D \quad (1.6)$$

tutti i termini A, B, C, D devono avere le stesse dimensioni. Questa richiesta di omogeneità è spesso un'utile euristica per la determinazione di una legge fisica.

2

CINEMATICA DEL PUNTO MATERIALE.

2.1 IL MODELLO DI PUNTO MATERIALE.

Si dice **cinematica** quella teoria fisica che descrive il moto dei corpi. Si dice **punto materiale** un corpo le cui dimensioni non sono rilevanti per la descrizione del suo moto; questo non significa però che le dimensioni dell'oggetto siano effettivamente piccole. Qualche esempio servirà a chiarire questo punto molto importante. Si consideri una vettura che percorre una strada rettilinea: per descrivere il suo moto non ha alcuna importanza sapere quali siano le sue dimensioni, se si tratta di una motocicletta, una utilitaria, un fuoristrada o un furgone con rimorchio, come non è rilevante conoscerne il colore, l'anno di fabbricazione o il nome della ditta che l'ha fabbricata. Nella descrizione del moto della vettura si fa astrazione da tutte le caratteristiche che non concorrono a determinarne il moto: quello che rimane è un *punto*. L'aggettivo *materiale* serve a rimarcare il fatto che, fatta l'astrazione, rimane comunque qualcosa di fisico, di esistente, qualcosa di percepibile per mezzo dei cinque sensi; diversamente il punto *geometrico* è un ente astratto non reperibile in natura.

Si consideri ora una delle ruote della vettura in questione; per descrivere il moto rotatorio che essa compie è necessario tenere debito conto delle sue dimensioni; il moto rotatorio, quindi, non può essere descritto utilizzando il concetto di punto materiale. Il moto di una palla da tennis colpita da una racchetta può essere descritto considerandola un punto materiale fino a che sia possibile disinteressarsi della rotazione della palla; se il moto rotatorio diventa rilevante (per esempio perché si vogliono studiare certi strani rimbalzi che ha una palla rotante) la palla non può più essere considerata solo un punto (che, come tale, non ruota). L'asse di un trampolino deformato dai salti di un tuffatore non può certamente essere considerato un punto materiale (che non si deforma). Come illustrato dagli esempi fatti, il modello di punto materiale è adeguato a descrivere il moto di corpi nei limiti in cui è possibile trascurare le variazioni di forma o di volume del corpo e il suo moto di rotazione.

Ove il modello di punto materiale risulti insufficiente occorrerà, come si vedrà a suo tempo, utilizzare uno modello differente.

2.2 SISTEMA DI RIFERIMENTO.

La descrizione del moto di un punto materiale P consiste nello specificare la sua posizione in ogni istante di tempo; per far ciò l'osservatore O del moto di P utilizza un sistema di assi cartesiani e un orologio; in questo modo la posizione di P è individuata dalle tre coordinate (x_p, y_p, z_p) e gli istanti di tempo in cui ciascuna posizione dello spazio viene occupata da P è letta sull'orologio. L'insieme di osservatore, assi cartesiani e orologio viene detto **sistema di riferimento**.

La descrizione del moto è dunque completa se per ogni istante t è nota ciascuna delle coordinate che individuano la posizione di P , cioè se sono note le tre equazioni

$$x_p = x(t) \quad , \quad y_p = y(t) \quad , \quad z_p = z(t) \quad (2.1)$$

L'insieme delle tre relazioni precedenti è detta **legge oraria** del moto. Evidentemente la legge oraria dipende dal sistema di riferimento scelto; converrà pertanto orientare gli assi e sceglierne l'origine in modo da ottenere la legge oraria più semplice.

Si dice **traiettoria** l'insieme di tutte le posizioni occupate dal punto materiale P ; essa è sempre una linea continua. A seconda del tipo di linea è possibile dare una prima classificazione del moto. Il moto è detto *rettilineo* se la sua traiettoria è una retta; in questo caso per la descrizione del moto è sufficiente una sola coordinata cartesiana x definita lungo l'asse che si sovrappone alla traiettoria. Se la traiettoria non è rettilinea ma giace su un piano si parla di moto *piano*; in

questo caso sono necessarie due coordinate cartesiane x, y ; un moto piano può essere circolare, parabolico, ellittico o altro a seconda della forma della traiettoria.

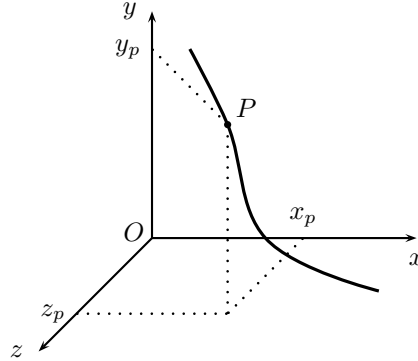


Figura 2.1: Un sistema di riferimento.

Infine il moto, come nell'esempio della figura 2.1, può svolgersi nello spazio tridimensionale, in questo caso sono necessarie le tre coordinate cartesiane x, y, z . Un'altra classificazione è data dal tipo di moto con cui viene percorsa la traiettoria; come si vedrà nella prossima sezione.

2.3 MOTI RETTILINEI.

Come detto sopra, il sistema di riferimento utilizzato per la descrizione di un moto rettilineo è costituito da una sola retta orientata, dotata di un'origine ed una unità di misura (il metro) su cui è definita la coordinata¹ x come in figura 2.2. La posizione occupata all'istante t dal punto materiale è individuata dalla sua ascissa x .

Se ad un certo istante t_1 il punto materiale si trova nella posizione $x_1 = x(t_1)$ e al successivo istante t_2 si trova nella posizione $x_2 = x(t_2)$ si dice **spostamento** s la quantità

$$s = x_2 - x_1 \equiv \Delta x . \quad (2.2)$$

Il simbolo Δ che compare nella precedente equazione viene usato per indicare la variazione della grandezza che lo segue.

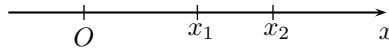


Figura 2.2: Il sistema di riferimento per il moto uniforme.

Quindi Δx rappresenta la variazione della posizione x e quindi lo spostamento. Similmente $\Delta t = t_2 - t_1$ indica la variazione di istante di tempo e quindi l'intervallo temporale intercorso fra i due istanti t_1 e t_2 . Il simbolo Δ con questo significato di variazione verrà utilizzato frequentemente in questo testo.

Si osservi che lo spostamento è positivo se il moto si svolge nel verso positivo dell'asse di riferimento, negativo se si svolge nel verso opposto.

Si definisce **distanza** percorsa il valore assoluto d dello spostamento, cioè

$$d = |x_2 - x_1| = |\Delta x| : \quad (2.3)$$

la distanza percorsa è quindi sempre non negativa.

¹ Si potrebbe definire una coordinata x anche nel caso di una traiettoria non rettilinea: si pensi al caso del moto di una autovettura lungo un'autostrada con curve; in ogni istante l'ascissa che va associata alla posizione dell'autovettura è il numero che si legge sul contachilometri. La scelta di un'ascissa 'curvilinea', tuttavia, presenta delle complicazioni che non è il caso di affrontare in questa sede.

2.3.1 MOTO RETTILINEO UNIFORME.

Il piú semplice moto con cui un punto materiale può percorrere una certa traiettoria è il **moto uniforme**; la sua prima definizione² è dovuta a Galilei ed è la seguente.

Si dice moto uniforme quello di un punto materiale che compie spostamenti uguali in intervalli di tempo uguali, comunque questi siano scelti.

Lo stesso Galilei accompagna questa definizione con una *admonitio* sottolineando l'importanza di poter scegliere gli intervalli di tempo in maniera arbitraria; diversamente potrebbe capitare che gli spostamenti siano uguali per una certa scelta degli intervalli di tempo e non lo siano per una scelta di intervalli minori. La definizione data afferma che l'insieme degli spostamenti e dei tempi impiegati a percorrerli costituiscono due classi di grandezze direttamente proporzionali e, quindi, il rapporto fra elementi corrispondenti delle due classi deve essere costante; in altre parole nel moto uniforme il rapporto fra lo spostamento s e il tempo t impiegato a percorrerlo è costante, non dipende dalla scelta dall'intervallo di tempo. Tale costante è detta **velocità** v del moto uniforme; vale quindi

$$v = \frac{s}{t} . \quad (2.4)$$

L'unità di misura della velocità è il *metro al secondo* e si indica con il simbolo m s^{-1} .

Se la traiettoria percorsa dal punto materiale è una retta il moto si dice **rettilineo uniforme**. Alla luce di quanto visto nella sezione precedente, la velocità di un moto rettilineo uniforme si può scrivere nella forma

$$v = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta x}{\Delta t} . \quad (2.5)$$

Si osservi che il denominatore della (2.5) è una quantità positiva, quindi la velocità ha lo stesso segno dello spostamento e quindi è positiva per moti che si svolgono nel verso positivo dell'asse di riferimento e negativa per moti che si svolgono in verso opposto.

Per ricavare la legge oraria del moto rettilineo uniforme si consideri un istante iniziale t_0 e sia $x_0 = x(t_0)$ la posizione in questo istante iniziale, allora se è nota la velocità del moto è possibile determinare la posizione in ogni istante t successivo, vale infatti

$$v = \frac{x(t) - x_0}{t - t_0} \quad \Longleftrightarrow \quad x(t) = x_0 + v(t - t_0) . \quad (2.6)$$

La scelta dell'istante iniziale t_0 è evidentemente arbitraria; si può pensare di considerarlo come l'istante in cui l'osservatore O comincia a misurare il moto del punto materiale. Quando è possibile, è sempre conveniente considerare nullo tale istante iniziale e porre $t_0 = 0\text{ s}$; questo corrisponde a far partire un cronometro all'istante iniziale. In questo caso la precedente equazione (2.6) si semplifica e diventa

$$x(t) = x_0 + vt , \quad (2.7)$$

che è la **legge oraria del moto rettilineo uniforme**. Non è possibile porre $t_0 = 0\text{ s}$ nel caso in cui ci siano due punti materiali in moto tale che i loro istanti iniziali siano diversi, per esempio perché uno dei due parte dopo l'altro; in tal caso per uno dei due si può porre $t_0 = 0\text{ s}$ e usare la (2.7) per l'altro occorre usare la legge generale (2.6).

È utile rappresentare la legge (2.7) su un piano cartesiano ove si pongano gli istanti in ascissa e le posizioni in ordinata; il grafico che si ottiene è detto **grafico spazio-tempo**; per il moto rettilineo uniforme è rappresentato da una retta in cui l'intersezione con l'asse delle ordinate rappresenta la posizione iniziale x_0 , mentre la pendenza, o coefficiente angolare, rappresenta la

² Di seguito si riporta il testo originale latino tratto dall'inizio della 'Giornata terza' dei *Discorsi e dimostrazioni matematiche* (si veda [2], pag. 166): *Aequalem, seu uniformem, motum intelligo eum cuius partes quibuscumque temporibus aequalibus a mobili peractae, sunt inter se aequales.*

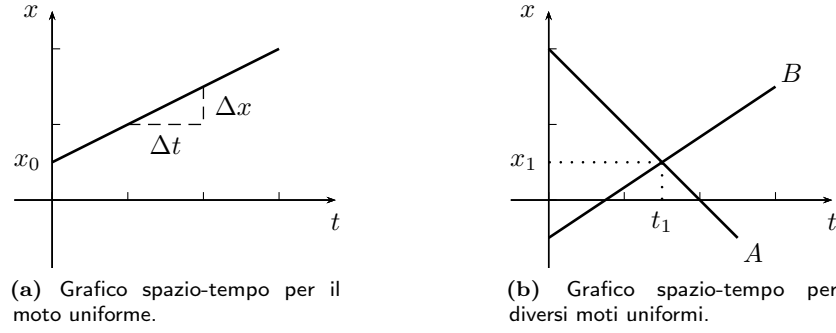


Figura 2.3: Alcuni grafici spazio-tempo per il moto uniforme.

velocità. In figura 2.3a è rappresentato il grafico spazio-tempo di un punto materiale che si muove di moto uniforme con legge oraria

$$x(t) = \frac{1}{2}(t + 1) \quad (2.8)$$

cioè che all'istante t_0 si trova nella posizione $x_0 = 0.5 \text{ m}$ e si muove con velocità $v = 0.5 \text{ m s}^{-1}$ fino ad arrivare, all'istante $t = 3 \text{ s}$ nella posizione $x(t) = 2 \text{ m}$.

In figura 2.3 sono stati anche rappresentati un intervallo di tempo Δt e il corrispondente spostamento Δx per mettere in evidenza che il loro rapporto, che per definizione è il coefficiente angolare della retta, rappresenta la velocità del moto uniforme e che tale rapporto è indipendente dalla scelta di Δt .

È chiaro che il grafico spazio-tempo di un moto non uniforme, la cui velocità non è costante, non può essere una retta. Conseguentemente, la legge oraria del moto rettilineo uniforme è un'equazione algebrica di primo grado nelle variabili t e x e viceversa ogni equazione algebrica di primo grado nelle variabili t e x è la legge oraria di qualche moto rettilineo uniforme.

Si osservi inoltre che il grafico spazio-tempo *non* è la traiettoria del moto ma rappresenta la legge oraria.

La figura 2.3b rappresenta il grafico spazio-tempo di due punti materiali A e B che percorrono l'asse delle ascisse x con versi opposti e leggi orarie date dalle equazioni

$$x_A(t) = 2 - t \quad , \quad x_B(t) = -\frac{1}{2} + \frac{2}{3}t \quad (2.9)$$

A e B si incontrano all'istante t_1 nella posizione $x_1 = x_A(t_1) = x_B(t_1)$ dati dall'intersezione delle due rette che rappresentano il grafico spazio-tempo dei due moti e possono essere determinati risolvendo il sistema

$$\begin{cases} x_A(t) = 2 - t \\ x_B(t) = -\frac{1}{2} + \frac{2}{3}t \end{cases} \implies \begin{cases} t_1 = 1.5 \text{ s} \\ x_1 = 0.5 \text{ m} \end{cases} \quad (2.10)$$

Tutte le equazioni scritte sopra sono tutte coerenti dal punto di vista dimensionale; si consideri per esempio la legge oraria del moto uniforme; considerato che la posizione ha le dimensioni di una lunghezza, cioè $[x] = [l]$, e che la velocità ha le dimensioni di una lunghezza diviso un tempo, cioè $[v] = [l][t]^{-1}$, dal punto di vista dimensionale la (2.7) si scrive

$$[l] = [l] + [l][t]^{-1}[t] \quad ; \quad (2.11)$$

entrambi i membri dell'equazione quindi hanno le dimensioni di una lunghezza.

2.3.2 MOTO VARIO.

Se la velocità di un moto non è costante, cioè se in intervalli di tempo uguali il punto materiale P compie spostamenti diversi il moto di P si dice *vario*. In questo caso il rapporto fra lo spostamento e il tempo impiegato si dice **velocità media** v_m :

$$v_m = \frac{\Delta x}{\Delta t} ; \quad (2.12)$$

il secondo membro della precedente equazione è formalmente uguale a quello della (2.5) ma si riferisce a una situazione fisica diversa: lì il rapporto è indipendente dalla scelta dell'intervallo di tempo e ne risulta una velocità costante, qui il rapporto dipende dalla scelta dell'intervallo di tempo e la velocità è diversa per diverse scelte di Δt . Riferendosi al grafico spazio-tempo, la velocità media ha una semplice interpretazione geometrica; è infatti legata alla pendenza del grafico nell'intervallo di tempo considerato. Per vederlo si consideri la figura 2.4 ove è rappresentato il grafico spazio-tempo di un moto con velocità variabile; la velocità media è il coefficiente angolare della retta secante la curva nei punti di ascissa t_1 e t_2 .

La nozione di velocità media, benché sia sufficiente a dare un'idea del moto del punto materiale in un certo intervallo di tempo non dice qual è la velocità in un dato istante; in fondo esistono strumenti, detti *tachimetri*, che consentono di determinare la velocità di un'autovettura o di una motocicletta in ogni istante.

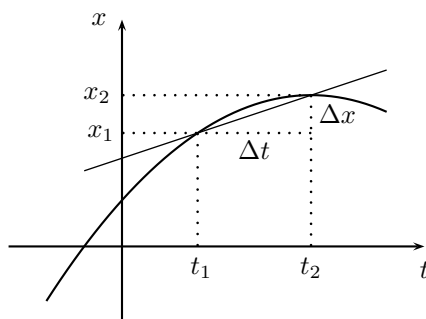


Figura 2.4: Velocità media.

Deve quindi essere possibile definire la **velocità istantanea**. Per farlo si osservi che la velocità media misurata fra l'istante t_1 e l'istante t_2 si approssima tanto meglio alla velocità all'istante t_1 quanto più è piccolo l'intervallo di tempo $\Delta t = t_2 - t_1$. Quindi la velocità media diventa la velocità istantanea quando l'intervallo di tempo diventa zero.

Dal punto di vista matematico questo è un problema; nella definizione di velocità media, equazione (2.12), l'intervallo di tempo è al denominatore, e se il denominatore diventa zero, la frazione perde di senso. Si noti però che in un intervallo di tempo nullo anche lo spostamento effettuato è nullo; quindi anche il numeratore della (2.12) è nullo. Si tratta così di quello che in algebra viene talvolta detta una forma indeterminata. Il punto qui è che la velocità del punto materiale all'istante t_1 non è indeterminata, anzi è perfettamente definita, tanto che può essere misurata da un tachimetro.

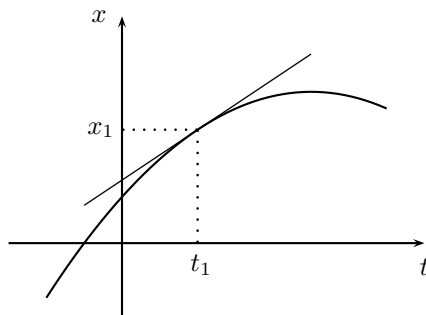


Figura 2.5: Velocità istantanea all'istante t_1 .

Quello che accade è che il numeratore ed il denominatore diventano nulli in modo tale che il loro rapporto abbia un valore ben definito.

Dal punto di vista geometrico si è visto che la velocità media è il coefficiente angolare della retta

secante; quando l'intervallo di tempo si annulla, cioè quando t_2 si avvicina a t_1 , la retta secante diventa la retta tangente, come rappresentato in figura 2.5: la velocità del moto di un punto materiale all'istante t è quindi il coefficiente angolare della retta tangente al grafico spazio-tempo del moto nel punto di ascissa t .

La cosa, che in effetti è un punto molto delicato, risulta più chiara considerando il seguente esempio. Si consideri un punto materiale che percorre un moto vario con legge oraria

$$x(t) = t^2 - 3t + 1 . \quad (2.13)$$

Si determini la velocità media nell'intervallo compreso fra l'istante t e l'istante $t + \Delta t$; in tale intervallo di tempo, lo spostamento è dato da

$$\begin{aligned} \Delta x &= x(t + \Delta t) - x(t) = (t + \Delta t)^2 - 3(t + \Delta t) + 1 - (t^2 - 3t + 1) = \\ &= t^2 + 2t\Delta t + (\Delta t)^2 - 3t - 3\Delta t + 1 - t^2 + 3t - 1 = \\ &= \Delta t(2t - 3 + \Delta t) \end{aligned} \quad (2.14)$$

Quindi la velocità media è

$$v_m = \frac{\Delta x}{\Delta t} = 2t - 3 + \Delta t ; \quad (2.15)$$

come si vede v_m dipende dalla scelta dell'intervallo di tempo Δt . Ma la velocità media diventa la velocità istantanea quanto Δt tende a zero³, cioè

$$v_m \xrightarrow{\Delta t \rightarrow 0} v(t) = 2t - 3 . \quad (2.16)$$

In questo esempio si è visto come il calcolo del rapporto $\Delta x / \Delta t$ per $\Delta t \rightarrow 0$ è tutt'altro che problematico o indeterminato. L'equazione ottenuta permette di calcolare senza problemi la velocità istantanea ad ogni istante t . Il lettore studioso può verificare con il calcolo che la tangente alla parabola di equazione $x = t^2 - 3t + 1$ nel suo punto di ascissa t_1 ha coefficiente angolare $m = 2t_1 - 3$.

La funzione $v = v(t)$ che fornisce in ogni istante il valore della velocità istantanea di un moto vario è detta **legge della velocità** del moto in questione ed è definita come il valore cui tende la velocità media al tendere a zero dell'intervallo di tempo Δt , cioè vale

$$\boxed{\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{v(t + \Delta t) - v(t)}{\Delta t} \xrightarrow{\Delta t \rightarrow 0} v(t) .} \quad (2.17)$$

Per la determinazione della legge oraria di un moto vario conviene procedere in maniera grafica. Si consideri come semplice esempio iniziale il caso di un moto uniforme e si disegni il grafico velocità-tempo; la velocità del moto uniforme è costante quindi il grafico risulta un segmento di retta parallelo all'asse dei tempi, come nella figura 2.6a.

Nell'intervallo $\Delta t = t - t_0$ lo spostamento $\Delta x = x(t) - x_0 = v\Delta t$ è uguale all'area compresa fra il grafico velocità-tempo e l'asse delle ascisse.

Il risultato qui trovato si estende in modo naturale al caso del moto vario. Per vederlo si suddivida l'intervallo Δt in tanti intervallini δt sufficientemente piccoli da poter ritenere che durante ciascuno di essi la velocità sia costante: quindi se nell'intervallo δt la velocità è costante per il ragionamento appena visto lo spostamento nel tempo δt è uguale all'area compresa fra il grafico e l'asse delle ascisse cioè la regione tratteggiata in figura 2.6b⁴. Questo è vero per ognuno degli intervallini in cui è stato suddiviso Δt , quindi lo spostamento totale complessivo (o, meglio, il suo valore assoluto) è la somma di tutte le aree di larghezza δt e quindi è uguale all'intera area sottostante il grafico.

Le proprietà del moto vario viste in questa sezione possono essere riassunte nei punti seguenti:

³ Si usa l'espressione *tende a* invece che 'è uguale a' e una freccia invece del simbolo $=$ per rimarcare il fatto che dal punto di vista matematico si tratta di un procedimento delicato, detto *limite*, e studiato dall'analisi matematica. In questa sede si rinuncia ad una descrizione precisa del concetto di limite ma se ne conserva il simbolo.

⁴ Evidentemente questa è una approssimazione ed è tanto più precisa quanto più piccoli sono gli intervallini δt scelti; d'altra parte questi possono essere scelti arbitrariamente piccoli, quindi mediante questa approssimazione si commette un errore che può essere reso arbitrariamente piccolo.

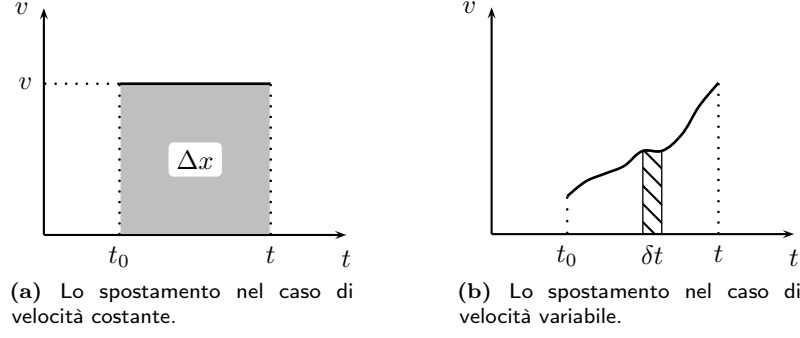


Figura 2.6: Lo spostamento di un moto vario.

1. in un moto vario la velocità media dipende dall'intervallo di tempo considerato ed è il coefficiente angolare della retta secante il grafico spazio-tempo del moto negli istanti iniziale e finale;
2. quando l'intervallo di tempo tende a zero la velocità media coincide con la velocità istantanea;
3. la velocità all'istante t è il coefficiente angolare della retta tangente al grafico spazio-tempo del moto nel punto di ascissa t ;
4. il valore assoluto dello spostamento effettuato è uguale all'area compresa fra il grafico velocità-tempo e l'asse dei tempi nell'intervallo di tempo corrispondente.

2.3.3 MOTO UNIFORMEMENTE ACCELERATO

Il più semplice dei moti vari è il moto **uniformemente accelerato**, la sua prima definizione⁵ è dovuta ancora a Galilei.

Si dice uniformemente accelerato quel moto in cui ad intervalli di tempo uguali corrispondono le stesse variazioni di velocità.

Gli intervalli di tempo sono quindi direttamente proporzionali alle variazioni della velocità, vi è pertanto una costante di proporzionalità: questa costante è detta l'**accelerazione** a del moto uniformemente accelerato; indicando con $v_1 = v(t_1)$ la velocità all'istante t_1 e con $v_2 = v(t_2)$ quella all'istante t_2 , l'accelerazione è definita da

$$a = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta v}{\Delta t} . \quad (2.18)$$

L'unità di misura dell'accelerazione è il *metro al secondo quadrato* e si scrive ms^{-2} , le sue dimensioni sono $[a] = [l][t]^{-2}$.

Similmente a quanto visto per la velocità, l'accelerazione è positiva se la velocità aumenta nell'intervallo di tempo Δt ed è negativa se la velocità diminuisce; in questo caso si dice che vi è una *decelerazione*.

Dalla (2.18) si può ottenere la legge della velocità $v(t)$ per il moto uniformemente accelerato. Il procedimento è formalmente identico a quello che ha portato alle leggi orarie (2.6) e (2.7). Si consideri un istante iniziale t_0 e sia $v_0 = v(t_0)$ la velocità in questo istante iniziale. Allora la (2.18) fornisce la velocità all'istante t

$$a = \frac{v(t) - v_0}{t - t_0} \iff v(t) = v_0 + a(t - t_0) . \quad (2.19)$$

⁵ Di seguito si riporta il testo originale latino tratto dalla 'Giornata terza' dei *Discorsi e dimostrazioni matematiche* (si veda [2], pag. 179): *Motum aequabiliter, seu uniformiter, acceleratum dicimus eum, qui, a quiete recedens, temporibus aequalibus aequalia celeritatis momenta sibi superaddit.*

Se è possibile scegliere nullo l'istante iniziale la precedente equazione prende la semplice forma

$$v(t) = v_0 + at . \quad (2.20)$$

Il grafico velocità-tempo per il moto uniformemente accelerato è quindi una retta la cui intersezione con l'asse delle ordinate rappresenta la velocità iniziale mentre la pendenza rappresenta l'accelerazione.

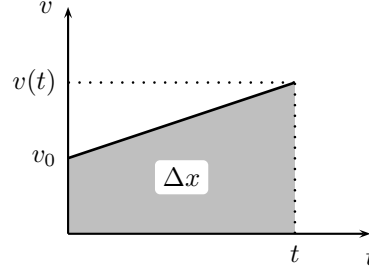


Figura 2.7: Lo spostamento del moto uniformemente accelerato.

Alla luce di quanto visto nella sezione precedente, lo spostamento del punto materiale in moto uniformemente accelerato fra l'istante iniziale $t_0 = 0$ s e il generico istante successivo t è dato dall'area del trapezio rettangolo ombreggiato in figura 2.7; questo trapezio rettangolo ha le basi uguali a v_0 e $v(t)$ e l'altezza uguale a t ; quindi lo spostamento è

$$\Delta x = \frac{1}{2}[v_0 + v(t)]t ; \quad (2.21)$$

osservando che vale $\Delta x = x(t) - x_0$, e usando la (2.20), si ottiene

$$x(t) - x_0 = \frac{1}{2}(2v_0 + at)t \quad (2.22)$$

e quindi

$$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2 \quad (2.23)$$

che è la **legge oraria del moto uniformemente accelerato**. Il lettore studioso provi a tracciare un grafico velocità-tempo e a dedurre la corrispondente legge oraria nel caso in cui sia $t_0 \neq 0$ s. L'equazione (2.23) è di secondo grado in t ; quindi il suo grafico nel piano cartesiano spazio-tempo è una parabola. Viceversa ogni equazione nelle variabili t e x di secondo grado rispetto t e di primo grado rispetto a x è la legge oraria di qualche moto uniformemente accelerato e, se scritta in forma esplicita come la (2.23), il coefficiente del termine di secondo grado è la metà dell'accelerazione, il coefficiente del termine di primo grado è la velocità iniziale ed il termine noto la posizione iniziale.

Si riconsideri l'esempio visto sopra del moto di legge oraria (2.13); evidentemente si tratta di un moto uniformemente accelerato con accelerazione $a = 2 \text{ m s}^{-2}$, velocità iniziale $v_0 = -3 \text{ m s}^{-1}$ e posizione iniziale $x_0 = 1 \text{ m}$. Utilizzando la legge della velocità (2.20) è possibile trovare la velocità in ogni istante:

$$v(t) = -3 + 2t \quad (2.24)$$

risultato in accordo con quanto trovato sopra, equazione (2.16), usando la definizione di velocità istantanea.

È utile calcolare la velocità media di un moto uniformemente accelerato fra l'istante iniziale t_0 e un dato istante finale t ; qui si considera il caso in cui l'istante iniziale sia nullo in modo tale che valga $\Delta t = t - t_0 = t$, lasciando al lettore studioso il caso generale con $t_0 \neq 0$. Lo spostamento nell'intervallo di tempo considerato è $\Delta x = x(t) - x_0$; usando la (2.23), la velocità media è quindi

$$v_m = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x(t) - x_0}{t} = \frac{v_0 t + \frac{1}{2}at^2}{t} = v_0 + \frac{1}{2}at . \quad (2.25)$$

Dalla (2.20) si ottiene la relazione $at = v(t) - v_0$ che, sostituita nella precedente, dà

$$v_m = v_0 + \frac{1}{2}[v(t) - v_0] = \frac{v(t) + v_0}{2} . \quad (2.26)$$

Quindi per il moto uniformemente accelerato la velocità media è la media aritmetica delle velocità iniziale e finale.

Un'altra utile relazione è quella che lega lo spostamento alla variazione di velocità; anche qui si considera il caso in cui l'istante iniziale sia nullo. Lo spostamento si può scrivere come velocità media per intervallo di tempo, quindi

$$\Delta x = v_m t = \frac{v(t) + v_0}{2} t ; \quad (2.27)$$

ricavando t dalla (2.20) e sostituendolo nella precedente si trova

$$\Delta x = \frac{v(t) + v_0}{2} \cdot \frac{v(t) - v_0}{a} \quad (2.28)$$

e quindi

$$\Delta x = \frac{v^2(t) - v_0^2}{2a} \iff v^2(t) = v_0^2 + 2a\Delta x . \quad (2.29)$$

2.3.4 MOTO DI CADUTA LIBERA.

Tra i moti uniformemente accelerati è particolarmente importante il moto di caduta libera dei corpi verso il centro della Terra. È un fatto sperimentale che, nell'approssimazione in cui sia possibile trascurare l'attrito dell'aria, tutti i corpi cadono con la stessa accelerazione; questa accelerazione è detta **accelerazione di gravità** e viene indicata con il simbolo g ; il suo valore dipende dalla posizione sulla superficie terrestre: aumenta con la latitudine, cioè con la distanza dall'equatore e diminuisce all'aumentare dell'altezza sul livello del mare. Il valore standard è

$$g = 9.806\,65 \text{ m s}^{-2} , \quad (2.30)$$

ed è convenzionalmente considerato esatto, cioè privo di errore; tradizionalmente viene approssimato in 9.81 m s^{-2} .

Si consideri quindi un punto materiale P che cade da un'altezza h dal suolo; come sistema di riferimento si scelga un asse verticale orientato verso il basso con l'origine nel punto di partenza di P , come illustrato in figura 2.8a. Il moto del punto materiale è descritto dalla sua legge oraria e dalla legge della velocità:

$$\begin{cases} y(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}gt^2 \\ v(t) = v_0 + gt . \end{cases} \quad (2.31)$$

Si suppone che P venga lasciato cadere con velocità iniziale nulla da un punto che, come detto, è l'origine dell'asse di riferimento; in tal caso $v_0 = 0 \text{ m s}^{-1}$ e $x_0 = 0 \text{ m}$. L'istante t_c in cui P raggiunge il suolo è quello in cui $y(t_c) = h$; tale istante si ottiene dalla prima delle (2.31):

$$h = \frac{1}{2}gt_c^2 \quad (2.32)$$

e quindi il **tempo di caduta libera** da un'altezza h è dato da

$$t_c = \sqrt{\frac{2h}{g}} . \quad (2.33)$$

La velocità con la quale P giunge al suolo si ottiene sostituendo la precedente (2.33) nella seconda delle (2.31):

$$v(t_c) = g\sqrt{\frac{2h}{g}} \quad (2.34)$$

e quindi la **velocità d'impatto** è

$$v_c = \sqrt{2gh} . \quad (2.35)$$

Si consideri ora il caso in cui il punto materiale P viene lanciato verticalmente dal suolo con una

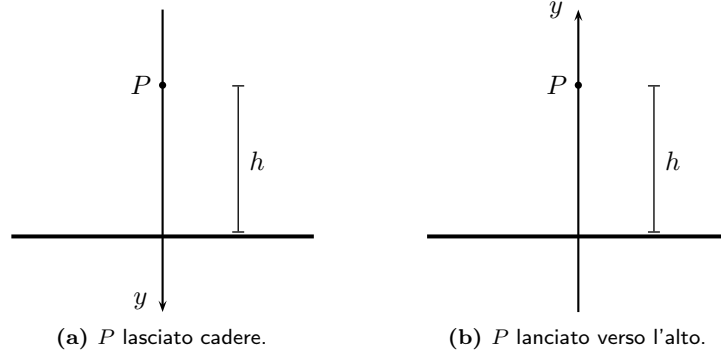


Figura 2.8: Due esempi del moto di caduta libera.

velocità iniziale v_0 ; in questo caso conviene scegliere come sistema di riferimento un asse orientato verso l'alto con l'origine al suolo, come in figura 2.8b. In questo caso la velocità diminuisce al passare del tempo, l'accelerazione è quindi negativa: $a = -g$. Le leggi che descrivono il moto in questo caso sono:

$$\begin{cases} y(t) = y_0 + v_0 t - \frac{1}{2}gt^2 \\ v(t) = v_0 - gt . \end{cases} \quad (2.36)$$

Se P parte dal suolo, come si suppone qui, la posizione iniziale è nulla, quindi $y_0 = 0$ m. Per determinare l'istante t_s in cui P raggiunge la quota massima si osservi che in tale istante la velocità è nulla; usando la seconda delle (2.36) deve valere quindi

$$v(t_s) = v_0 - gt_s = 0 \quad (2.37)$$

e quindi il **tempo di salita** è

$$t_s = \frac{v_0}{g} . \quad (2.38)$$

Sostituendo questa espressione nella prima delle (2.36), ricordando che $y_0 = 0$ m, si trova l'altezza h raggiunta:

$$h = y(t_s) = v_0 \frac{v_0}{g} - \frac{1}{2}g \frac{v_0^2}{g^2} = \frac{v_0^2}{g} - \frac{v_0^2}{2g} \quad (2.39)$$

e quindi

$$h = \frac{v_0^2}{2g} . \quad (2.40)$$

Una volta giunto all'altezza massima il punto materiale P ricade; l'istante in cui giunge al suolo è determinato dalla prima delle (2.36) con la condizione $y = 0$ m; ricordando che nel caso presente y_0 è nullo, si impone

$$v_0 t - \frac{1}{2}gt^2 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad t_1 = 0 \text{ s} \vee t_2 = \frac{2v_0}{g} = 2t_s . \quad (2.41)$$

Vi sono due soluzioni perché due sono gli istanti in cui $y = 0$ m, uno è l'istante iniziale, l'altro è l'istante finale che qui si vuole determinare; quindi l'istante di ricaduta è il doppio dell'istante

di salita, quindi P impiega lo stesso tempo a salire e a ricadere. La velocità di impatto nella ricaduta è

$$v(t_2) = v_0 - gt_2 = v_0 - 2v_0 = -v_0 . \quad (2.42)$$

La velocità di impatto nella ricaduta ha quindi lo stesso valore della velocità iniziale; il segno negativo è dovuto al fatto che nel moto di ricaduta P si muove nel verso opposto a quello dell'asse di riferimento scelto.

Quindi un punto materiale lanciato verticalmente verso l'alto impiega lo stesso tempo a salire e a ricadere e la velocità con cui giunge al suolo è uguale alla velocità iniziale con la quale è stato lanciato verso l'alto.

Se l'accelerazione non è costante il rapporto $\Delta v / \Delta t$ è l'accelerazione media nell'intervallo Δt . In maniera analoga a quanto fatto per la velocità, è possibile definire una **accelerazione istantanea**: considerato un intervallo di tempo compreso fra t e $t + \Delta t$ si definisce accelerazione istantanea all'istante t il rapporto fra la variazione di velocità e l'intervallo di tempo per Δt che tende a zero.

$$\frac{\Delta v}{\Delta t} \xrightarrow{\Delta t \rightarrow 0} a(t) . \quad (2.43)$$

INTERMEZZO. MOTO UNIFORMEMENTE ACCELERATO E NUMERI DISPARI.

Si consideri un punto materiale che, partendo da fermo, si muova di moto uniformemente accelerato con accelerazione a ; la legge oraria è dunque data da

$$x(t) = x_0 + \frac{1}{2}at^2 \quad (2.44)$$

cioè le posizioni via via assunte dal punto materiale sono proporzionali ai quadrati dei tempi. Si considerino ora le posizioni occupate agli istanti multipli di un certo tempo T , cioè agli istanti

$$t_0 = 0 , \quad t_1 = T , \quad t_2 = 2T , \quad \dots , \quad t_{n-1} = (n-1)T , \quad t_n = nT ; \quad (2.45)$$

queste posizioni sono

$$\begin{aligned} x_0 &\equiv x(t_0) = x_0 \\ x_1 &\equiv x(t_1) = x_0 + \frac{1}{2}aT^2 \\ x_2 &\equiv x(t_2) = x_0 + \frac{4}{2}aT^2 \\ &\vdots \\ x_{n-1} &\equiv x(t_{n-1}) = x_0 + \frac{(n-1)^2}{2}aT^2 \\ x_n &\equiv x(t_n) = x_0 + \frac{n^2}{2}aT^2 \end{aligned} \quad (2.46)$$

È quindi possibile calcolare gli spostamenti effettuati dal punto materiale in ciascuno degli intervalli di tempo successivi di durata T ; essi sono

$$\begin{aligned} s_1 &\equiv x_1 - x_0 = \frac{1}{2}aT^2 = s_1 \\ s_2 &\equiv x_2 - x_1 = \frac{3}{2}aT^2 = 3s_1 \\ &\vdots \\ s_n &\equiv x_n - x_{n-1} = \frac{n^2 - (n-1)^2}{2}aT^2 = \frac{(2n-1)}{2}aT^2 = (2n-1)s_1 . \end{aligned} \quad (2.47)$$

Quindi gli spostamenti effettuati in intervalli di tempo successivi di ugual durata sono proporzionali alla successione dei numeri dispari. Questo fatto, osservato per primo da Galilei nel *Corollarium I* al *Theorema II* della *Giornata terza* dei suoi *Discorsi* (si veda [2], pagina 186), discende dal fatto che il quadrato del numero naturale n è la somma dei primi n dispari:

$$1 = 1 \quad , \quad 4 = 1 + 3 \quad , \quad 9 = 1 + 3 + 5 \quad , \quad \dots \quad , \quad n^2 = 1 + \dots + 2n - 1 \quad . \quad (2.48)$$

2.4 MOTI PIANI.

Si dicono piani quei moti la cui traiettoria giace su un piano; come già accennato sopra, il sistema di riferimento usato per per la descrizione dei moti piani è costituito da due assi cartesiani indicati con x e y . Sulla retta il punto materiale si muove lungo una direzione obbligata; tale direzione può essere percorsa in due versi. Sul piano la situazione è un po' più complicata poiché la direzione del moto non è costante ma varia da un istante all'altro. Per descrivere in modo adeguato questa situazione è necessario una nuova classe di grandezze fisiche dette *vettoriali*, le cui proprietà sono descritte nel paragrafo seguente.

2.4.1 ALGEBRA DEI VETTORI.

Si dice **vettore** un segmento orientato; esso è definito una volta che siano assegnate le sue tre proprietà:

1. la lunghezza, detta anche **modulo** o intensità del vettore;
2. la direzione;
3. il verso.

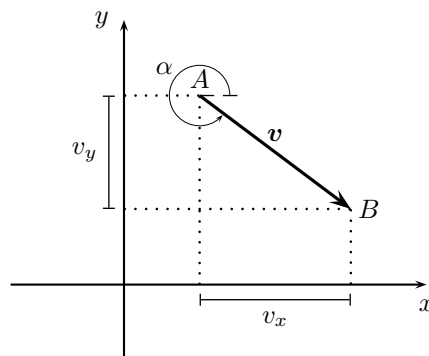


Figura 2.9: Un vettore e le sue componenti.

Due vettori paralleli hanno la stessa direzione; se hanno anche uguale verso e modulo sono *lo stesso* vettore; ogni vettore quindi è rappresentato da tutti i segmenti orientati che hanno lo stesso modulo, la stessa direzione e lo stesso verso. Una grandezza fisica è detta **vettoriale** se per la sua descrizione oltre ad un valore numerico in una unità di misura è necessario anche specificare una direzione ed un verso. Una grandezza fisica non vettoriale, cioè quella cui si associa solamente un numero e non anche una direzione ed un verso, è detta **scalare**.

Un vettore può essere indicato in molti modi; con una lettera che lo identifichi o esplicitandone i punti estremi; il vettore in figura 2.9 ad esempio si può indicare con \mathbf{v} o con \mathbf{AB} . In ogni caso, per distinguerle dagli scalari, le grandezze vettoriali si denotano in carattere tipografico grassetto. Il modulo, grandezza scalare, viene rappresentato in carattere normale o ponendo il vettore fra sbarrette verticali; così il modulo di \mathbf{v} si indica con v o con $\|\mathbf{v}\|$.

È estremamente comodo rappresentare i vettori sul piano cartesiano in termini delle loro proiezioni sugli assi coordinati; tali proiezioni si dicono **componenti** del vettore e si scrive

$$\mathbf{v} = (v_x, v_y) \quad (2.49)$$

in modo simile a come si indicano le coordinate cartesiane di un punto. Le componenti di un vettore sono positive o negative a seconda che la proiezione sia orientata come l'asse su cui è stata proiettata o meno; per esempio in figura 2.9 v_x è positiva mentre v_y è negativa. Note le sue componenti, è possibile determinare il modulo di un vettore con una semplice applicazione del teorema di Pitagora⁶:

$$\|\mathbf{v}\| = v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} . \quad (2.50)$$

La direzione e il verso di \mathbf{v} sono convenzionalmente individuati dall'angolo α formato dal vettore e il semiasse maggiore delle ascisse, come illustrato in figura 2.9; vale dunque (per la definizione e l'uso delle funzioni goniometriche si veda l'appendice B).

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{v_y}{v_x} \quad (2.51)$$

Viceversa, noto il modulo v del vettore e la sua direzione α le componenti sono date da

$$\begin{cases} v_x = v \cos \alpha \\ v_y = v \sin \alpha \end{cases} . \quad (2.52)$$

SOMMA E DIFFERENZA DI VETTORI. La somma di due vettori è definita nel modo seguente. Dati \mathbf{u} e \mathbf{v} , il vettore somma $\mathbf{w} = \mathbf{u} + \mathbf{v}$ è quello che ha come componenti la somma delle componenti dei vettori addendi, vale quindi

$$\begin{cases} w_x = u_x + v_x \\ w_y = u_y + v_y \end{cases} . \quad (2.53)$$

Dal punto di vista grafico, due vettori si sommano con il **metodo del parallelogramma** o con

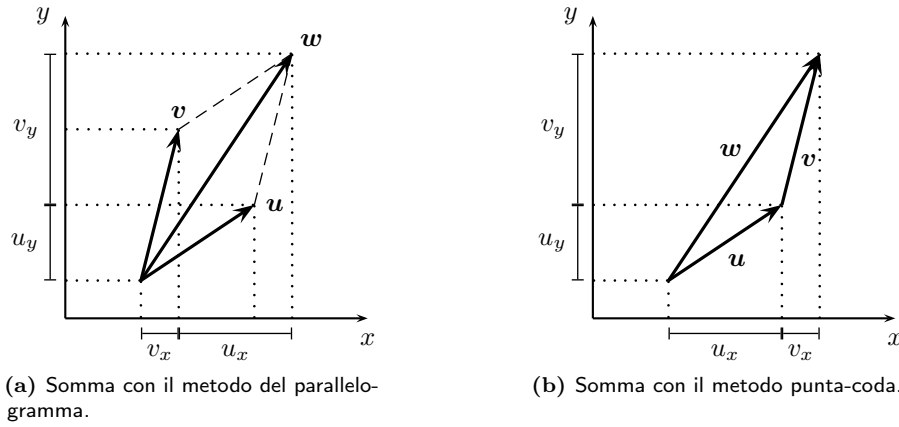
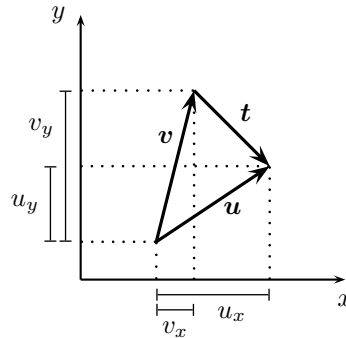


Figura 2.10: Somma di due vettori.

il **metodo punta-coda**, come illustrato nelle figure 2.10a e 2.10b.



⁶ Pitagora (575?495 a.C. ?), grande matematico e filosofo di Samo.

Figura 2.11: Differenza di due vettori.

La differenza fra due vettori si definisce in modo simile: se $\mathbf{t} = \mathbf{u} - \mathbf{v}$ allora

$$\begin{cases} t_x = u_x - v_x \\ t_y = u_y - v_y \end{cases} . \quad (2.54)$$

Si osservi che costruendo il parallelogramma come in figura 2.10a, una delle diagonali è il vettore somma, mentre l'altra diagonale è il vettore differenza.

La differenza di due vettori uguali è il **vettore nullo** che si indica con il simbolo $\mathbf{0}$, vale quindi

$$\forall \mathbf{v} \quad \mathbf{v} - \mathbf{v} = \mathbf{0} . \quad (2.55)$$

Il modulo del vettore somma *non* è uguale alla somma dei moduli dei vettori addendi, similmente, il modulo del vettore differenza non è uguale alla differenza dei moduli dei vettori sottraendi; per rendersene conto basta osservare le figure 2.10b e 2.11 e ricordare la proprietà dei lati di un triangolo; fra i moduli della somma della differenza vale la seguente **relazione triangolare**

$$||\mathbf{v}|| - ||\mathbf{u}|| \leq ||\mathbf{v} + \mathbf{u}|| \leq ||\mathbf{v}|| + ||\mathbf{u}|| . \quad (2.56)$$

PRODOTTO PER UNO SCALARE. Dalla definizione di somma di due vettori si ottiene quella di multiplo di un vettore; per esempio il vettore $\mathbf{w} = \mathbf{v} + \mathbf{v} = 2\mathbf{v}$ è il vettore che ha componenti $w_x = 2v_x$ e $w_y = 2v_y$; questa proprietà si estende nella definizione del prodotto di un vettore per uno scalare:

$$\mathbf{w} = k\mathbf{v} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} w_x = kv_x \\ w_y = kv_y \end{cases} ; \quad (2.57)$$

Ne risulta che il vettore \mathbf{w} ha modulo $w = |k|v$, ha la stessa direzione di \mathbf{v} e verso uguale od opposto a quello di \mathbf{v} e seconda che k sia positivo o negativo.

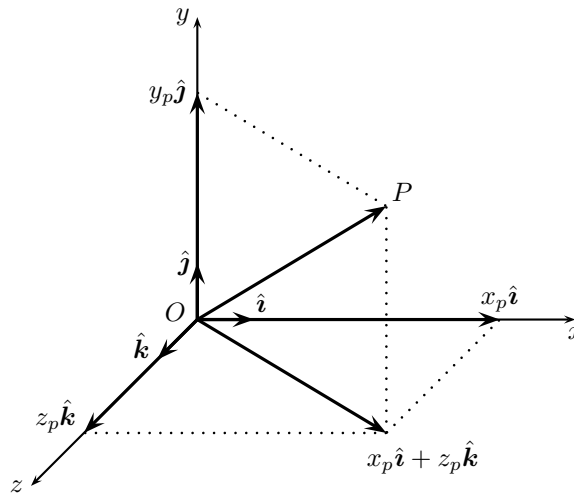
Il prodotto per uno scalare è distributivo rispetto alla somma e alla sottrazione di vettori, vale cioè

$$k(\mathbf{v} \pm \mathbf{u}) = k\mathbf{v} \pm k\mathbf{u} . \quad (2.58)$$

I VETTORI UNITARI. Risulta assai comodo rappresentare i vettori bi- e tridimensionali in termini di *vettori unitari* anche detti **versori**. Questi, come dice il nome, sono vettori di lunghezza unitaria che hanno la direzione ed il verso dei tre assi cartesiani del sistema di riferimento cartesiano prescelto.

Vengono indicati rispettivamente con i simboli (si veda la figura 2.12):

$$\hat{i} \quad , \quad \hat{j} \quad , \quad \hat{k} \quad (2.59)$$

**Figura 2.12:** Utilizzo dei versori nella rappresentazione di un vettore tridimensionale.

Con questa rappresentazione è possibile scrivere i vettori (bi-) tridimensionali come somma di (due) tre vettori perpendicolari di lunghezza pari alle componenti e aventi le direzioni e i versi degli assi coordinati.

Per esempio, il vettore \mathbf{OP} del caso illustrato in figura, si può scrivere nel modo seguente:

$$\mathbf{OP} = x_p \hat{\mathbf{i}} + y_p \hat{\mathbf{j}} + z_p \hat{\mathbf{k}} . \quad (2.60)$$

Analogamente si rappresentano tutti gli altri vettori, per esempio

$$\mathbf{v} = v_x \hat{\mathbf{i}} + v_y \hat{\mathbf{j}} + v_z \hat{\mathbf{k}} . \quad (2.61)$$

Utilizzando i versori, la somma e la differenza di due vettori bidimensionali pertanto si scrivono nel modo seguente

$$\mathbf{w} = \mathbf{v} \pm \mathbf{u} = (v_x \pm u_x) \hat{\mathbf{i}} + (v_y \pm u_y) \hat{\mathbf{j}} . \quad (2.62)$$

PRODOTTI FRA VETTORI. Si definiscono due diversi prodotti fra vettori: il primo è detto **prodotto scalare** ed ha come risultato uno scalare; il secondo è detto **prodotto vettoriale** ed ha come risultato un vettore. Il *prodotto scalare* fra i due vettori \mathbf{v} e \mathbf{u} è definito da

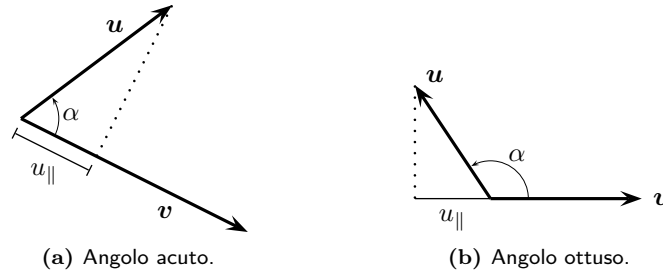


Figura 2.13: Prodotto scalare.

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{u} = vu \cos \alpha \quad (2.63)$$

ove α è l'angolo convesso formato dai due vettori. Poiché $u \cos \alpha = u_{\parallel}$ è la proiezione di \mathbf{u} nella direzione parallela a \mathbf{v} , si può anche scrivere:

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{u} = \pm v u_{\parallel} . \quad (2.64)$$

Il segno dipende dall'angolo α ; positivo per α acuto e negativo per α ottuso: se ne veda un esempio in figura 2.13b. Se i due vettori sono perpendicolari il loro prodotto è nullo; in effetti nell'algebra dei vettori non vale la proprietà di annullamento del prodotto: se il prodotto è nullo i due fattori possono essere entrambi diversi da zero; vale cioè

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{u} = 0 \iff \mathbf{v} \perp \mathbf{u} \quad , \quad \text{se } \mathbf{v} \neq \mathbf{0} \wedge \mathbf{u} \neq \mathbf{0} . \quad (2.65)$$

Il prodotto scalare è commutativo e distributivo rispetto alla somma e alla differenza:

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \quad , \quad \mathbf{v} \cdot (\mathbf{u} \pm \mathbf{w}) = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u} \pm \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} , \quad (2.66)$$

commuta inoltre con il prodotto per uno scalare

$$\mathbf{v} \cdot (k\mathbf{u}) = k(\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}) . \quad (2.67)$$

Si può dimostrare, e la dimostrazione viene lasciata al lettore studioso, che in termini delle loro componenti il prodotto scalare fra due vettori si scrive nel modo seguente:

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{u} = v_x u_x + v_y u_y . \quad (2.68)$$

Come immediata conseguenza di ciò si trova che il prodotto scalare di un vettore con sé stesso è il quadrato del suo modulo:

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = v_x^2 + v_y^2 = \|\mathbf{v}\|^2 . \quad (2.69)$$

Il *prodotto vettoriale* \mathbf{w} di due vettori \mathbf{v} e \mathbf{u} si indica con il simbolo

$$\mathbf{w} = \mathbf{v} \times \mathbf{u} \quad (2.70)$$

ed è il vettore \mathbf{w} di modulo

$$w = vu \sin \alpha = vu_{\perp} , \quad (2.71)$$

ha direzione perpendicolare a quella del piano individuato dai vettori fattori \mathbf{v} e \mathbf{u} e come verso quello dal quale la rotazione dal primo fattore al secondo è vista in senso antiorario, si veda la figura 2.14.

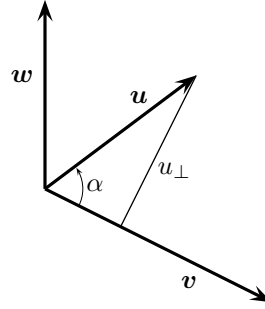


Figura 2.14: Prodotto vettoriale

Anche per il prodotto vettoriale non vale la legge di annullamento del prodotto; due vettori paralleli, equiversi o antiversi, hanno prodotto vettoriale nullo, vale cioè

$$\mathbf{v} \times \mathbf{u} = 0 \iff \mathbf{v} \parallel \mathbf{u} \quad , \quad \text{se } \mathbf{v} \neq \mathbf{0} \wedge \mathbf{u} \neq \mathbf{0} . \quad (2.72)$$

Il prodotto vettoriale non è commutativo, ma vale

$$\mathbf{v} \times \mathbf{u} = -\mathbf{u} \times \mathbf{v} ; \quad (2.73)$$

commuta però con il prodotto per uno scalare:

$$\mathbf{v} \times (k\mathbf{u}) = k(\mathbf{v} \times \mathbf{u}) ; \quad (2.74)$$

è inoltre distributivo sia rispetto alla somma che alla differenza:

$$\mathbf{v} \times (\mathbf{u} \pm \mathbf{w}) = \mathbf{v} \times \mathbf{u} \pm \mathbf{v} \times \mathbf{w} . \quad (2.75)$$

Valgono inoltre le relazioni

$$\begin{aligned} \mathbf{v} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{w}) &= \mathbf{u} \cdot (\mathbf{w} \times \mathbf{v}) = \mathbf{w} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{u}) \\ \mathbf{v} \times (\mathbf{u} \times \mathbf{w}) &= (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})\mathbf{u} - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{u})\mathbf{w} . \end{aligned} \quad (2.76)$$

Il prodotto vettoriale in termini delle componenti dei fattori si scrive nel modo seguente:

$$\mathbf{v} \times \mathbf{u} = (v_y u_z - v_z u_y)\hat{\mathbf{i}} + (v_z u_x - v_x u_z)\hat{\mathbf{j}} + (v_x u_y - v_y u_x)\hat{\mathbf{k}} . \quad (2.77)$$

2.4.2 DESCRIZIONE DEI MOTI PIANI.

Si consideri il punto materiale P in moto su un piano; il sistema di riferimento è costituito da due assi cartesiani di coordinate x e y e origine O . La posizione di P in ogni istante è data dal vettore \mathbf{OP} . Se ad un certo istante t_1 il punto materiale si trova nel punto $P_1(x_1, y_1)$ ed in un successivo istante t_2 si trova nel punto $P_2(x_2, y_2)$, lo spostamento è definito, come nel caso rettilineo, dalla variazione della posizione e quindi dal vettore $\Delta\mathbf{OP}$, si veda la figura 2.15:

$$\Delta\mathbf{OP} = \mathbf{OP}_2 - \mathbf{OP}_1 = \mathbf{P}_1\mathbf{P}_2 . \quad (2.78)$$

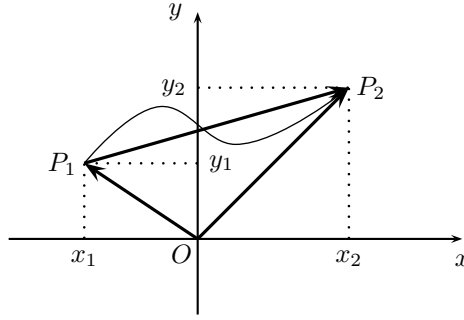


Figura 2.15: Lo spostamento in un moto piano.

Lo spostamento *non* è la traiettoria; per evidenziare la differenza in figura 2.15 è stata tracciata una traiettoria curva che unisce P_1 e P_2 . Per i moti piani quindi, diversamente dai moti rettilinei, la distanza percorsa non è il valore assoluto dello spostamento. Le componenti del vettore spostamento sono date da

$$\Delta \mathbf{OP} = (\Delta x, \Delta y) = (x_2 - x_1, y_2 - y_1) . \quad (2.79)$$

Mentre P si sposta da P_1 a P_2 , la sua proiezione sull'asse delle x si sposta da x_1 a x_2 e la sua proiezione sull'asse y da y_1 a y_2 ; quindi le componenti del vettore spostamento sono gli spostamenti delle proiezioni di P sugli assi cartesiani. La velocità media è ancora definita come il rapporto fra lo spostamento ed il tempo impiegato a percorrerlo, è quindi il vettore

$$\mathbf{v}_m = \frac{\Delta \mathbf{OP}}{\Delta t} = \left(\frac{\Delta x}{\Delta t}, \frac{\Delta y}{\Delta t} \right) ; \quad (2.80)$$

le componenti della velocità media sono quindi le velocità medie con cui si spostano le proiezioni di P sugli assi cartesiani. La velocità media è data dal prodotto del vettore spostamento $\Delta \mathbf{OP}$ per lo scalare positivo $1/\Delta t$. Quindi \mathbf{v}_m ha la stessa direzione e lo stesso verso dello spostamento. La velocità istantanea è ancora la velocità media quando l'intervallo di tempo tende a zero ed è il vettore che ha per componenti le velocità istantanee delle proiezioni di P sugli assi cartesiani, cioè

$$\mathbf{v}_m \xrightarrow{\Delta t \rightarrow 0} \mathbf{v}(t) = (v_x(t), v_y(t)) . \quad (2.81)$$

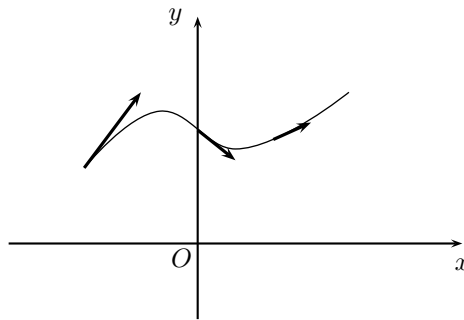


Figura 2.16: Velocità istantanea in un moto piano.

Per quanto riguarda la direzione ed il verso della velocità istantanea, si noti che quando l'intervallo di tempo tende a zero il vettore spostamento, e quindi il vettore velocità, diventa tangente alla traiettoria (un ragionamento simile è stato fatto prima dell'equazione (2.13) discutendo il significato geometrico della velocità istantanea di un moto vario sul grafico spazio-tempo). La velocità istantanea quindi è, in ogni istante, un vettore tangente alla traiettoria come mostrato in figura 2.16, ove si è utilizzata la traiettoria della figura 2.15; si noti che la velocità varia di modulo da punto a punto, ma si mantiene sempre tangente alla traiettoria.

L'accelerazione si definisce ancora come il rapporto fra la variazione della velocità e l'intervallo di tempo:

$$\mathbf{a} = \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t} = \left(\frac{\Delta v_x}{\Delta t}, \frac{\Delta v_y}{\Delta t} \right) \quad (2.82)$$

quindi, le componenti dell'accelerazione sono uguali alle accelerazioni delle proiezioni di P sugli assi cartesiani. Se l'accelerazione non è costante l'equazione precedente dà l'accelerazione media \mathbf{a}_m ; si definisce allora il vettore accelerazione istantanea:

$$\mathbf{a}_m \xrightarrow{\Delta t \rightarrow 0} \mathbf{a}(t) = (a_x(t), a_y(t)) \quad (2.83)$$

ove $a_x(t)$ e $a_y(t)$ sono, ancora, le accelerazioni istantanee delle proiezioni di P sugli assi.

2.4.3 SCOMPOSIZIONE DI UN MOTO PIANO.

Quanto visto nel paragrafo precedente mostra come durante il moto di P sul piano ove sia stato definito un sistema di riferimento di assi x e y , le proiezioni di P su questi assi compiano moti i cui spostamenti, velocità ed accelerazioni sono le componenti delle corrispondenti grandezze vettoriali per il moto di P .

Questo suggerisce di descrivere il moto piano di P per mezzo dei moti delle sue proiezioni. La legge oraria, la legge della velocità e dell'accelerazione del moto di P sono quindi date dalle

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \quad \begin{cases} v_x = v_x(t) \\ v_y = v_y(t) \end{cases} \quad \begin{cases} a_x = a_x(t) \\ a_y = a_y(t) \end{cases} . \quad (2.84)$$

Il moto di P risulta quindi *scomposto* nei moti delle sue componenti; l'operazione risulta vantaggiosa perché le proiezioni di P si muovono sugli assi e quindi il loro moto è rettilineo. La descrizione di un piano viene quindi riportata alla più semplice descrizione di due moti rettilinei simultanei e indipendenti.

2.4.4 MOTO DI UN PROIETTILE.

Come caso esemplare della scomposizione di un moto piano si consideri il moto di un punto materiale P che venga lanciato dalla posizione iniziale individuata dal vettore $\mathbf{OP}_0 = (x_0, y_0)$ con velocità iniziale $\mathbf{v}_0 = (v_{0x}, v_{0y})$; allora il moto di P viene scomposto in un moto orizzontale uniforme con velocità v_{0x} e un moto verticale uniformemente accelerato con accelerazione pari a g ; scegliendo come sistema di riferimento due assi cartesiani con l'asse delle ordinate diretto verso l'alto le equazioni che descrivono il moto di P sono pertanto

$$\begin{cases} x(t) = x_0 + v_{0x}t \\ y(t) = y_0 + v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases} \quad \begin{cases} v_x(t) = v_{0x} \\ v_y(t) = v_{0y} - gt \end{cases} \quad \begin{cases} a_x(t) = 0 \\ a_y(t) = -g \end{cases} . \quad (2.85)$$

Ricavando t dalla componente x della legge oraria

$$t = \frac{x - x_0}{v_{0x}} \quad (2.86)$$

e sostituendolo nella componente y si trova

$$\boxed{y = y_0 + \frac{v_{0y}}{v_{0x}}(x - x_0) - \frac{g}{2v_{0x}^2}(x - x_0)^2} , \quad (2.87)$$

che è l'equazione cartesiana della traiettoria. Si tratta di una parabola con la concavità volta verso il basso con vertice nel punto di coordinate (se ne lascia la verifica alla cura del lettore studioso):

$$V = \left(x_0 + \frac{v_{0x}v_{0y}}{g}, y_0 + \frac{v_{0y}^2}{2g} \right) . \quad (2.88)$$

Con l'armamentario teorico qui descritto è possibile affrontare lo studio dei diversi casi con cui può presentarsi il problema della lancio di un proiettile. Di seguito si esaminano due casi.

VELOCITÀ INIZIALE ORIZZONTALE. Si consideri il caso di un punto materiale lanciato dal punto di coordinate $(x_0, y_0) = (0, h)$ con velocità orizzontale, cioè avente componente y nulla, di modulo v_0 , come in figura 2.17.

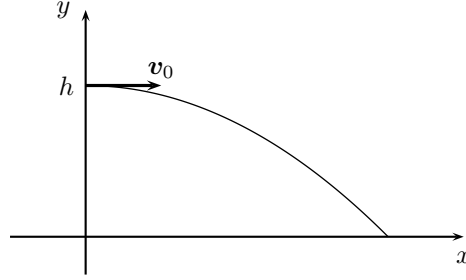


Figura 2.17: Proiettile con velocità iniziale orizzontale.

Le (2.85) per il caso presente diventano

$$\begin{cases} x(t) = v_0 t \\ y(t) = h - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases} \quad \begin{cases} v_x(t) = v_0 \\ v_y(t) = -gt \end{cases} \quad \begin{cases} a_x(t) = 0 \\ a_y(t) = -g \end{cases} \quad (2.89)$$

Da queste equazioni è possibile determinare tutte le caratteristiche del moto. Il tempo di caduta si determina osservando che l'istante t_c in cui il punto materiale raggiunge il suolo è quello per cui vale $y(t_c) = 0$, quindi dalla seconda del primo sistema si trova

$$t_c = \sqrt{\frac{2h}{g}}; \quad (2.90)$$

sostituendo questo valore nella prima equazione del primo sistema si trova il punto di impatto:

$$x(t_c) = v_0 \sqrt{\frac{2h}{g}}; \quad (2.91)$$

Il valore ottenuto per il punto di impatto si sarebbe potuto ricavare anche dall'equazione della traiettoria (2.87).

La velocità di impatto è il modulo del vettore velocità all'istante t_c e quindi è

$$v(t_c) = \sqrt{v_x^2(t_c) + v_y^2(t_c)} = \sqrt{v_0^2 + g^2 t_c^2} = \sqrt{v_0^2 + 2gh} \quad (2.92)$$

Per $v_0 = 0 \text{ ms}^{-1}$ si ritrovano le soluzioni del moto di caduta libera, equazioni (2.33) e (2.35); naturalmente in quel caso il punto di impatto è l'origine.

LANCIO DEL PROIETTILE DAL SUOLO. Si consideri ora il caso di un punto materiale lanciato dal suolo con una velocità che forma un angolo α con l'orizzontale, come in figura 2.18.

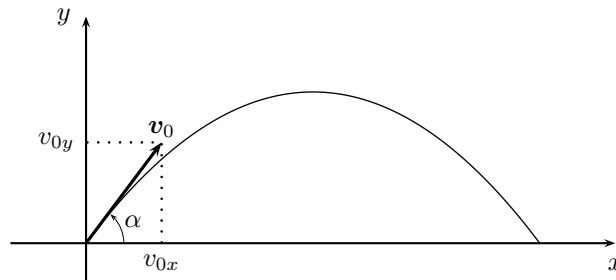


Figura 2.18: Proiettile lanciato dal suolo.

Le componenti della velocità iniziale sono pertanto

$$\begin{cases} v_{0x} = v_0 \cos \alpha \\ v_{0y} = v_0 \sin \alpha \end{cases} \quad (2.93)$$

e le (2.85) per questo caso diventano

$$\begin{cases} x(t) = v_{0x}t \\ y(t) = v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases} \quad \begin{cases} v_x(t) = v_{0x} \\ v_y(t) = v_{0y} - gt \end{cases} \quad \begin{cases} a_x(t) = 0 \\ a_y(t) = -g \end{cases} \quad (2.94)$$

Per determinare l'istante t_m in cui il punto materiale raggiunge l'altezza massima, si osservi che in tale istante la velocità, essendo tangente alla traiettoria è orizzontale e quindi non ha componente verticale; deve pertanto valere

$$v_y(t_m) = v_{0y} - gt_m = 0 \quad (2.95)$$

da cui è immediato ricavare

$$t_m = \frac{v_{0y}}{g} . \quad (2.96)$$

L'altezza massima risulta

$$y(t_m) = v_{0y}t_m - \frac{1}{2}gt_m^2 = \frac{v_{0y}^2}{2g} , \quad (2.97)$$

e si ha in corrispondenza dell'ascissa

$$x(t_m) = \frac{v_{0x}v_{0y}}{g} . \quad (2.98)$$

L'istante t_c in cui il punto materiale giunge al suolo è quello per cui vale $y(t_s) = 0$ è quindi

$$y(t_c) = v_{0y}t_c - \frac{1}{2}gt_c^2 = 0 \quad (2.99)$$

equazione che, oltre a quella nulla (infatti all'istante $t = 0$ s il punto materiale si trova al suolo), ha la soluzione

$$t_c = \frac{2v_{0y}}{g} = 2t_m . \quad (2.100)$$

I tempi di salita e di discesa di questo moto parabolico sono uguali a quelli già trovati nel caso del moto di caduta libera, equazioni (2.38) e (2.41). Il punto di impatto è:

$$x(t_c) = v_{0x}t_c = \frac{2v_{0x}v_{0y}}{g} . \quad (2.101)$$

Questo punto rappresenta la **gittata** del lancio.

I valori ottenuti per l'altezza massima e la gittata si sarebbero potuti ricavare anche dall'equazione della traiettoria (2.87). Si noti che l'ascissa $x(t_c)$ del punto d'impatto è il doppio dell'ascissa $x(t_m)$ di altezza massima, come ci si deve aspettare vista la simmetria della parabola.

È interessante determinare per quale valore dell'angolo α , per un dato modulo v_0 della velocità iniziale, si ha la gittata massima. Per vederlo conviene determinare il massimo del quadrato della gittata: questo è consentito dal fatto che la gittata ha certamente un valore positivo. Ricordando che vale $v_0^2 = v_{0x}^2 + v_{0y}^2$, il quadrato della gittata $x(t_c)$ si può scrivere:

$$x^2(t_c) = \frac{4}{g^2}v_{0x}^2v_{0y}^2 = \frac{4}{g^2}v_{0x}^2(v_0^2 - v_{0x}^2) = -\frac{4}{g^2}v_{0x}^4 + \frac{4v_0^2}{g^2}v_{0x}^2 ; \quad (2.102)$$

questa è un'equazione quadratica in v_{0x}^2 il cui grafico è una parabola volta verso il basso; il massimo quindi si ha in corrispondenza del vertice, cioè per

$$v_{0x}^2 = \frac{v_0^2}{2} \quad (2.103)$$

la gittata è quindi massima per

$$v_{0x}^2 = v_{0y}^2 = \frac{v_0^2}{2} \quad \Longleftrightarrow \quad \alpha = 45^\circ . \quad (2.104)$$

Si sottolinea che quanto visto in questa sezione è valido solo nei limiti di validità del modello del punto materiale e ove siano trascurabili tutti gli attriti.

2.5 MOTO CIRCOLARE UNIFORME.

Un punto materiale che compia un moto avente per traiettoria una circonferenza che venga percorsa con velocità di modulo costante è detto *moto circolare uniforme*. Scegliendo come origine del sistema di riferimento il centro O della circonferenza, la posizione del punto materiale è in ogni istante t individuata dal vettore $\mathbf{OP}(t)$ di modulo uguale al raggio r della circonferenza.

La velocità è in ogni punto tangente alla traiettoria e quindi in ogni punto cambia direzione, pur conservando il modulo costante. Il vettore velocità pertanto è ad ogni istante diverso poiché due vettori aventi direzioni diverse sono vettori diversi. Vi è quindi un vettore accelerazione media la cui direzione è uguale a quella del vettore $\Delta \mathbf{v}$, si veda la figura 2.19:

$$\mathbf{a}_m = \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t} . \quad (2.105)$$

Per determinare l'accelerazione istantanea si osservi che per $\Delta t \rightarrow 0$ l'angolo fra i due vettori \mathbf{v}_1 e \mathbf{v}_2 tende a zero e quindi $\Delta \mathbf{v}$ diviene perpendicolare alla velocità; in altre parole, nel moto circolare uniforme l'accelerazione è in ogni istante perpendicolare alla velocità e, visto che la velocità è tangente alla traiettoria, l'accelerazione è diretta verso il centro, per questo viene detta **accelerazione centripeta** e indicata con il simbolo \mathbf{a}_c .

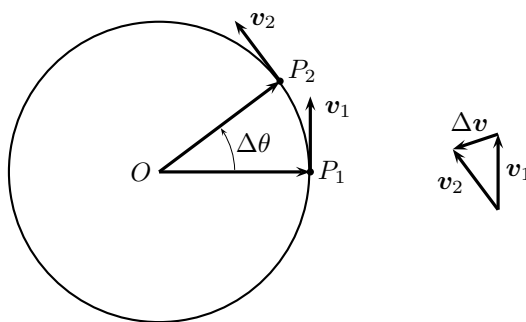


Figura 2.19: La velocità nel moto circolare uniforme.

Il moto circolare uniforme si ripete sempre uguale ad ogni giro; più precisamente si dice che si tratta di un **moto periodico**. È detto periodico un moto per il quale esiste un intervallo di tempo detto **periodo**, ed indicato con il simbolo T tale che valga

$$\mathbf{OP}(t + T) = \mathbf{OP}(t) \quad \forall t \quad (2.106)$$

Il periodo del moto circolare uniforme è l'intervallo di tempo impiegato da P a compiere un giro completo della traiettoria; pertanto T deve essere uguale alla lunghezza della circonferenza diviso la velocità; ricordando che la lunghezza di una circonferenza è uguale a π per il diametro, si trova

$$T = \frac{2\pi r}{v} . \quad (2.107)$$

Chiaramente il periodo si misura in secondi.

Una grandezza che si usa comunemente nella descrizione dei moti periodici è la **frequenza** ν , definita come il numero di volte in cui il moto periodico si ripete in un intervallo di tempo Δt diviso per lo stesso Δt . Quindi lo spostamento di un punto materiale che si muove per un tempo Δt alla velocità di modulo v è $v\Delta t$; dividendo tale spostamento totale per quello percorso in un periodo si trova il numero di volte in cui il periodo viene percorso; tale numero è quindi

$$\frac{v\Delta t}{2\pi r} \quad (2.108)$$

per ottenere la frequenza occorre dividere questo numero per Δt , quindi

$$\nu = \frac{v}{2\pi r} = \frac{1}{T} \quad (2.109)$$

la frequenza di un moto periodico è quindi il reciproco del periodo; l'unità di misura della frequenza è detta **hertz**⁷, simbolo Hz, ed ha le dimensioni del reciproco di un tempo, cioè $[\nu] = [t]^{-1}$.

2.5.1 COORDINATE ANGOLARI.

Per descrivere il moto circolare uniforme conviene introdurre delle coordinate angolari. Fissato un semiasse delle ascisse con origine nel centro O della circonferenza, la posizione del punto materiale P è definita dall'angolo θ formato dal semiasse di riferimento ed il vettore \mathbf{OP} , si veda la figura 2.20a. L'angolo θ è definito come il rapporto fra l'arco sotteso ℓ ed il raggio $r = \|\mathbf{OP}\|$ della traiettoria. Vale quindi

$$\theta = \frac{\ell}{r} \quad (2.110)$$

Con questa definizione, l'unità di misura di θ è il **radiante** e viene indicato con il simbolo rad.

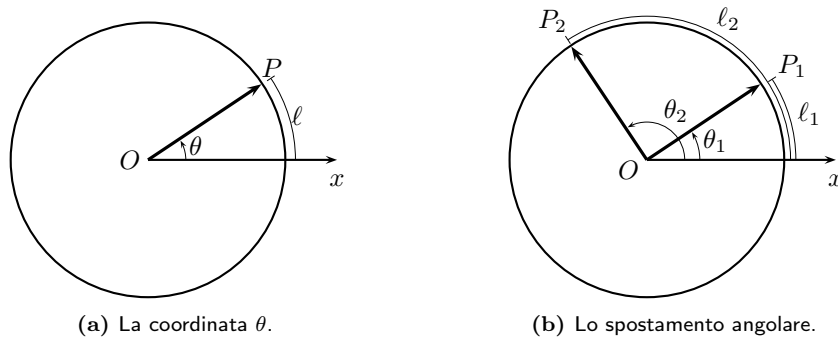


Figura 2.20: Uso della coordinata angolare.

In quanto definito come rapporto fra grandezze omogenee l'angolo è una grandezza adimensionale. Se il punto materiale si sposta dalla posizione P_1 alla posizione P_2 , in modo simile a quanto fatto per lo spostamento lineare, si definisce, figura 2.20b, **spostamento angolare** la quantità

$$\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1 = \frac{\ell_2}{r} - \frac{\ell_1}{r} = \frac{\Delta\ell}{r}, \quad (2.111)$$

ove $\Delta\ell$ è la distanza percorsa lungo l'arco di circonferenza.

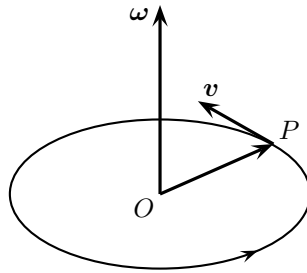


Figura 2.21: Il vettore accelerazione angolare.

Si definisce **velocità angolare** la quantità

$$\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}; \quad (2.112)$$

usando la (2.111), si trova la relazione fra la velocità angolare ω e quella lineare v :

$$\omega = \frac{\Delta\ell/r}{\Delta t} = \frac{\Delta\ell/\Delta t}{r} \quad (2.113)$$

⁷ Heinrich Rudolf Hertz (1857-1894), fisico tedesco.

quindi

$$\omega = \frac{v}{r} . \quad (2.114)$$

Un moto circolare uniforme è quindi caratterizzato dalla sua velocità angolare; questa però misura solo la rapidità ma non dice nulla del *verso* di rotazione. Per ovviare a ciò si introduce il *vettore* velocità angolare $\boldsymbol{\omega}$: esso ha modulo dato dalla (2.114), direzione perpendicolare al piano del moto e verso dal quale si vede la rotazione svolgersi in senso antiorario. Ricordando la definizione di prodotto vettoriale, si vede che risulta

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{OP} . \quad (2.115)$$

È possibile mettere in relazione la velocità angolare con il periodo; usando la (2.107) si trova infatti

$$T = \frac{2\pi}{\omega} . \quad (2.116)$$

Per determinare la legge oraria del moto circolare uniforme nella coordinata angolare θ si procede come per il moto rettilineo uniforme. Sia t_0 l'istante iniziale e t un qualsiasi istante successivo allora, posto $\theta(t_0) = \theta_0$, l'equazione (2.112) si scrive

$$\omega = \frac{\theta(t) - \theta_0}{t - t_0} \quad \Longleftrightarrow \quad \theta(t) = \theta_0 + \omega(t - t_0) ; \quad (2.117)$$

se è possibile porre $t_0 = 0$ s la precedente diventa

$$\theta(t) = \theta_0 + \omega t . \quad (2.118)$$

che è la **legge oraria del moto circolare uniforme**.

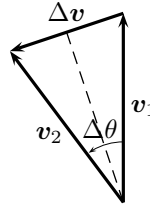


Figura 2.22: L'accelerazione centripeta.

L'introduzione della coordinata angolare consente, fra le altre cose, di ricavare in modo semplice il modulo della accelerazione centripeta; si consideri la differenza di velocità $\Delta \mathbf{v}$ di figura 2.19, riportata ingrandita in figura 2.22; le velocità \mathbf{v}_1 e \mathbf{v}_2 sono perpendicolari rispettivamente ai vettori \mathbf{OP}_1 ed \mathbf{OP}_2 , quindi quelle formano lo stesso angolo che formano questi: $\Delta \theta$. Si consideri ora il triangolo isoscele formato da \mathbf{v}_1 , \mathbf{v}_2 e $\Delta \mathbf{v}$ e si divida la base $\Delta \mathbf{v}$ in due parti uguali mediante l'altezza (tratteggiata in figura); utilizzando la definizione di seno di un angolo, equazione (B.1), è possibile determinare metà della base e quindi

$$\frac{\Delta v}{2} = v \sin \frac{\Delta \theta}{2} \quad (2.119)$$

ove v è il modulo della velocità, cioè $v = \|\mathbf{v}_1\| = \|\mathbf{v}_2\|$. Da questa relazione è possibile determinare il modulo di $\Delta \mathbf{v}$ e quindi quello dell'accelerazione media:

$$\Delta v = 2v \sin \frac{\Delta \theta}{2} \quad \Longleftrightarrow \quad a_m = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{2v}{\Delta t} \sin \frac{\Delta \theta}{2} \quad (2.120)$$

Per trovare l'accelerazione centripeta occorre porre $\Delta t \rightarrow 0$; si osservi però che se l'intervallo di tempo è piccolo è piccolo anche l'angolo $\Delta\theta$; vale quindi l'approssimazione (B.7) che, applicata al caso presente, fornisce

$$\sin \frac{\Delta\theta}{2} \simeq \frac{\Delta\theta}{2} \quad (2.121)$$

quindi, per $\Delta t \rightarrow 0$, si trova

$$a_m \xrightarrow{\Delta t \rightarrow 0} a_c = \frac{2v}{\Delta t} \frac{\Delta\theta}{2} = v \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = v\omega \quad (2.122)$$

da cui, usando la (2.112), si trova

$$a_c = \frac{v^2}{r} . \quad (2.123)$$

Questa relazione, usando la (2.114) si può anche scrivere in termini della velocità angolare:

$$a_c = \omega^2 r . \quad (2.124)$$

Se il moto circolare non è uniforme si definisce l'**accelerazione angolare** α data da

$$\alpha = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} . \quad (2.125)$$

Se α è costante, il moto circolare è uniformemente accelerato e, in perfetta analogia con il corrispondente moto rettilineo, la sua legge oraria *angolare* è data da

$$\theta(t) = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2} \alpha t^2 , \quad (2.126)$$

ove θ_0 e ω_0 denotano la posizione e la velocità angolari iniziali.

Per determinare la relazione fra α e la corrispondente accelerazione lineare a si usa l'equazione (2.114):

$$\alpha = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{1}{r} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{a}{r} . \quad (2.127)$$

2.5.2 COORDINATE CARTESIANE.

Il moto circolare uniforme, come tutti i moti piani, può anche essere riferito a due assi cartesiani; tale descrizione richiede l'uso delle funzioni goniometriche descritte nell'appendice B.

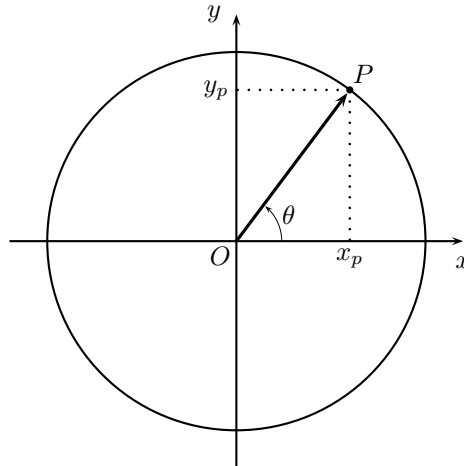


Figura 2.23: Le coordinate cartesiane.

Si consideri un sistema di assi cartesiani x e y con l'origine nel centro della circonferenza. La posizione del punto materiale P è allora individuata dalle componenti del vettore $\mathbf{OP} = (x_p, y_p)$, le quali, si noti, sono anche le coordinate del punto P . Utilizzando le equazioni (B.3) si può scrivere

$$\begin{cases} x_p(t) = r \cos \theta(t) \\ y_p(t) = r \sin \theta(t) \end{cases} . \quad (2.128)$$

Questa è l'equazione cartesiana della legge oraria del moto circolare uniforme. Le due coordinate non sono indipendenti, visto che P è vincolato a muoversi sulla circonferenza; detto in altro modo, le componenti del vettore \mathbf{OP} devono essere tali da dare un vettore di modulo in ogni istante uguale al raggio; ricordando (2.50), deve quindi valere:

$$x_p^2(t) + y_p^2(t) = r^2 , \quad (2.129)$$

che è l'equazione della traiettoria circolare. Si veda anche la prima delle (B.2).

Utilizzando la (2.118), le (2.128) diventano

$$\begin{cases} x_p(t) = r \cos[\omega t + \theta_0] \\ y_p(t) = r \sin[\omega t + \theta_0] \end{cases} . \quad (2.130)$$

Per determinare le componenti del vettore velocità è necessario proiettarlo sugli assi cartesiani. Osservando la figura 2.24a, ove è indicato con una freccetta l'angolo θ , si vede che

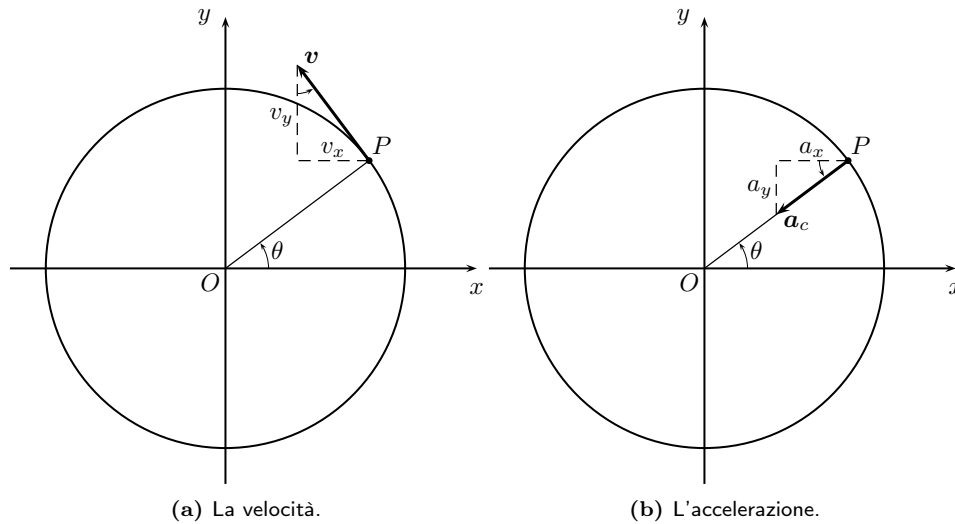


Figura 2.24: Componenti cartesiane.

$$\begin{cases} v_x(t) = -v \sin \theta(t) = -\omega r \sin \theta(t) \\ v_y(t) = v \cos \theta(t) = \omega r \cos \theta(t) \end{cases} , \quad (2.131)$$

si noti che la componente x della velocità è negativa poiché il verso è opposto a quello dell'asse delle ascisse. Similmente per l'accelerazione, con riferimento alla figura 2.24b, si trova

$$\begin{cases} a_x(t) = -a \cos \theta(t) = -\omega^2 r \cos \theta(t) = -\omega^2 x(t) \\ a_y(t) = -a \sin \theta(t) = -\omega^2 r \sin \theta(t) = -\omega^2 y(t) \end{cases} , \quad (2.132)$$

ove sono state utilizzate le (2.128). Le componenti del vettore accelerazione sono quindi proporzionali alle componenti del vettore posizione, ma hanno segno opposto; questa relazione si può scrivere in forma vettoriale:

$$\mathbf{a}(t) = -\omega^2 \mathbf{OP}(t) . \quad (2.133)$$

2.6 MOTO ARMONICO.

Si dice **armonico** un moto unidimensionale (il cui studio viene inserito a questo punto della trattazione per il suo stretto rapporto con il moto circolare uniforme) in cui il vettore posizione \mathbf{OP} ha in ogni istante modulo proporzionale al modulo del vettore accelerazione, stessa direzione ma verso opposto. Fra posizione e accelerazione vale dunque la seguente relazione di proporzionalità

$$\mathbf{a}(t) = -\omega^2 \mathbf{OP}(t) \quad (2.134)$$

ove ω è una costante positiva detta **pulsazione** del moto armonico. Per la pulsazione si è, come d'uso, utilizzato lo stesso simbolo che viene usato per la velocità angolare del moto circolare uniforme; questo è dovuto alla relazione che vi è fra i due moti che verrà discussa fra poche righe. La (2.134) è formalmente identica alla precedente equazione (2.133); si osservi però che quella descrive un moto rettilineo mentre questa descrive un moto piano. Tuttavia, se P si muove di moto circolare uniforme, le sue proiezioni sugli assi cartesiani sono moti rettilinei armonici e la velocità angolare di quello è uguale alla pulsazione di questi. In altre parole, le leggi orarie dei moti di queste proiezioni non sono altro che le componenti della legge oraria del moto circolare uniforme in forma cartesiana ricavata sopra nelle equazioni (2.128) e (2.130); analogamente, la legge della velocità è data dalle (2.131). Il moto armonico quindi è un moto oscillatorio attorno ad un punto centrale ed è periodico con periodo uguale a quello del moto circolare di cui è componente.

Quindi per un moto armonico che si muova sull'asse delle x valgono:

$$\begin{cases} x(t) = A \cos[\omega t + \theta_0] \\ v(t) = -A\omega \sin[\omega t + \theta_0] \\ a(t) = -A\omega^2 \cos[\omega t + \theta_0] \end{cases} \quad (2.135)$$

La costante A è detta **ampiezza** del moto armonico e rappresenta la massima distanza di P nella sua oscillazione attorno ad O ; la costante θ_0 , detta **fase iniziale**, stabilisce la posizione all'istante iniziale $t = 0$ s.

Il moto armonico è periodico e, come per il moto circolare uniforme, il suo periodo dipende dalla pulsazione secondo la seguente legge:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad (2.136)$$

La velocità e l'accelerazione del moto armonico variano in modo che il modulo dell'una sia nullo quando quello dell'altra è massimo e viceversa. Per vederlo in modo semplice (cioè senza affrontare le (2.135), che sono equazioni goniometriche) conviene riferirsi al moto circolare uniforme e considerarne la proiezione sull'asse x . Si veda la figura 2.25 ove, per chiarezza, sono state disegnate la velocità per la posizione P_1 e l'accelerazione per la posizione P_2 .

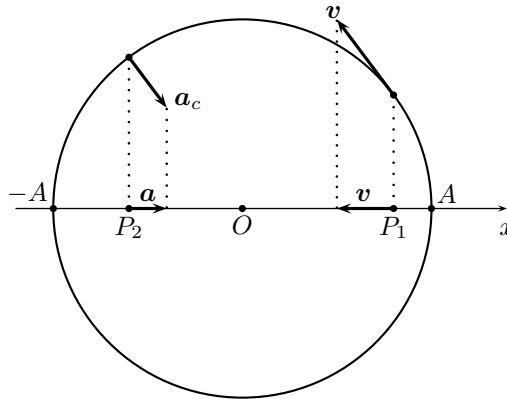


Figura 2.25: Il moto armonico.

Si consideri, per fissare le idee, un punto materiale che all'istante $t = 0$ s si trova nel punto di ascissa A (il che, si noti, corrisponde a porre $\theta_0 = 0$), sia cioè $x(0) = A$. Risulta chiaro che quando il punto materiale si trova in O , il modulo della velocità è massima e l'accelerazione è minima: questo accade quando il punto materiale ha percorso $1/4$ e $3/4$ del suo moto periodico e quindi per $t = T/4$ e per $t = 3T/4$. Viceversa, quando il punto materiale si trova in $\pm A$ il modulo della velocità è nullo, mentre quello dell'accelerazione è massimo: questo accade quando il punto materiale ha percorso metà e l'intero periodo e quindi per $t = T/2$ e $t = T$. Si osservi inoltre che i valori massimi si hanno quando viene proiettato l'intero vettore, cioè quando velocità e accelerazione sono uguali a quelle del moto uniforme: tali valori massimi sono quindi

$$v_M = v\left(\frac{T}{4}\right) = v\left(\frac{3}{4}T\right) = \omega A \quad , \quad a_M = v\left(\frac{T}{2}\right) = v(0) = \omega^2 A . \quad (2.137)$$

2.7 COORDINATE POLARI.

Per completezza, in questa sezione si introducono le *coordinate polari*. Sono una coppia di coordinate che identificano un punto sul piano alternative alle coordinate cartesiane. Si definiscono fissando un'origine O e un semiasse x ; la posizione di un punto P è allora individuata dalla lunghezza ρ , modulo del vettore \mathbf{OP} , e dall'angolo θ , orientato in senso antiorario, formato dal semiasse di riferimento e dal vettore \mathbf{OP} .

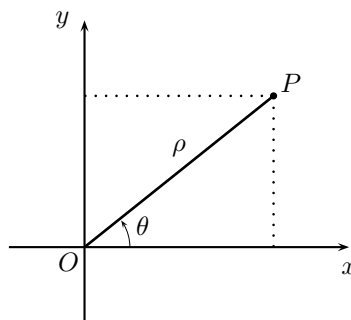


Figura 2.26: Le coordinate polari.

In figura 2.26 sono stati rappresentati entrambi gli assi cartesiani per raffigurare la relazione fra le coordinate polari e le coordinate cartesiane aventi la stessa origine e lo stesso asse delle ascisse:

$$\begin{cases} x_p = \rho \cos \theta \\ y_p = \rho \sin \theta \end{cases} \quad , \quad \begin{cases} \rho = \sqrt{x_p^2 + y_p^2} \\ \theta = \arctg \frac{y_p}{x_p} . \end{cases} \quad (2.138)$$

Il sistema di riferimento polare è stato usato sopra per descrivere il moto circolare uniforme per mezzo delle grandezze angolari, in quel caso la coordinata ρ era costante e uguale al raggio della circonferenza. In generale le coordinate polari sono usate quando la geometria del sistema fisico presenta una simmetria per rotazioni. La determinazione delle componenti dei vettori spostamento, velocità ed accelerazione in coordinate polari è un esercizio istruttivo ma lungo; poiché questo argomento può essere tralasciato dal lettore disinteressato senza pregiudicare la comprensione di quel che segue, se ne rinvia la trattazione all'appendice C.

2.8 CINEMATICA DEI MOTI RELATIVI.

La descrizione di un moto dipende dal sistema di riferimento prescelto. In questa sezione si analizzano le relazioni fra le descrizioni dei moti rispetto a diversi sistemi di riferimento.

Per rendere più spedita e leggibile la successiva esposizione, si è ritenuto di farla precedere da due paragrafi di prerequisiti matematici, di cui viene anche fornita una breve dimostrazione. Il lettore smaliziato potrà, eventualmente, saltarli e passare oltre.

RAPIDITÀ DI VARIAZIONE NEL TEMPO. In quel che segue si userà frequentemente la rapidità di variazione nel tempo di una grandezza; questo importante concetto è già stato incontrato nella definizione di velocità e di accelerazione quindi non apparirà estraneo al lettore attento.

Si consideri una grandezza, scalare o vettoriale, $A(t)$ dipendente dal tempo; sia Δt un intervallo di tempo e sia ΔA la variazione di $A(t)$ in tale intervallo di tempo, valga cioè

$$\Delta A = A(t + \Delta t) - A(t) ; \quad (2.139)$$

allora si definisce rapidità di variazione di $A(t)$ nell'intervallo Δt il rapporto

$$\frac{\Delta A}{\Delta t} \quad (2.140)$$

Il rapporto così definito dipende dalla scelta di Δt ; conviene pertanto definire, in modo simile a come si definisce la velocità istantanea, la rapidità istantanea di variazione facendo tendere l'intervallo Δt a zero. Seguendo una notazione che risale a Newton, si definisce pertanto

$$\frac{\Delta A}{\Delta t} \xrightarrow{\Delta t \rightarrow 0} \dot{A}(t) . \quad (2.141)$$

Come esempio dell'uso di questa notazione, si noti che si può scrivere

$$\mathbf{v}(t) = \dot{\mathbf{O}P}(t) \quad , \quad \mathbf{a}(t) = \dot{\mathbf{v}}(t) \quad , \quad \omega(t) = \dot{\theta}(t) \quad , \quad \alpha(t) = \dot{\omega}(t) . \quad (2.142)$$

In quel che segue, in particolare, è utile la determinazione della rapidità istantanea di variazione per una grandezza che sia composta dalla somma e dal prodotto di due grandezze.

Siano quindi $A(t), B(t), C(t)$ tre grandezze scalari o vettoriali tali che valga la relazione $A(t) = B(t) + C(t)$, allora

$$\begin{aligned} \Delta A &= [B(t + \Delta t) + C(t + \Delta t)] - [B(t) + C(t)] = \\ &= B(t + \Delta t) - B(t) + C(t + \Delta t) - C(t) = \Delta B + \Delta C , \end{aligned} \quad (2.143)$$

da cui, dividendo per Δt , si ottiene

$$\frac{\Delta A}{\Delta t} = \frac{\Delta B}{\Delta t} + \frac{\Delta C}{\Delta t} \quad (2.144)$$

e, per $\Delta t \rightarrow 0$,

$$\dot{A}(t) = \dot{B}(t) + \dot{C}(t) . \quad (2.145)$$

Sia poi $A(t) = B(t) \cdot C(t)$, allora

$$\begin{aligned} \Delta A &= B(t + \Delta t) C(t + \Delta t) - B(t) C(t) = \\ &= B(t + \Delta t) C(t + \Delta t) - B(t + \Delta t) C(t) + B(t + \Delta t) C(t) - B(t) C(t) = \\ &= B(t + \Delta t) [C(t + \Delta t) - C(t)] + [B(t + \Delta t) - B(t)] C(t) = \\ &= B(t + \Delta t) \Delta C + \Delta B C(t) . \end{aligned} \quad (2.146)$$

Quindi

$$\frac{\Delta A}{\Delta t} = B(t + \Delta t) \frac{\Delta C}{\Delta t} + \frac{\Delta B}{\Delta t} C(t) , \quad (2.147)$$

da cui, per $\Delta t \rightarrow 0$, si ottiene

$$\dot{A}(t) = B(t) \dot{C}(t) + \dot{B}(t) C(t) \quad (2.148)$$

Le relazioni ora trovate, valgono qualunque sia la natura, scalare o vettoriale, delle grandezze $B(t)$ e $C(t)$ e del tipo di prodotto (prodotto fra scalari, di un vettore per uno scalare, scalare o vettoriale fra vettori). La notazione newtoniana qui introdotta verrà diffusamente utilizzata in quel che segue.

I VERSORI ROTANTI. Particolarmente importante per la discussione seguente è la determinazione della rapidità di variazione nel tempo di un versore rotante. Per far ciò si consideri un punto materiale P in moto circolare uniforme con velocità angolare costante intorno ad un centro O . Se r è il raggio della traiettoria, il vettore posizione può essere scritto nella forma

$$OP = r\hat{\rho} \quad (2.149)$$

ove $\hat{\rho}$ è il versore che punta dal centro al punto P ; nel tempo, evidentemente, $\hat{\rho}$ ruota attorno ad O .

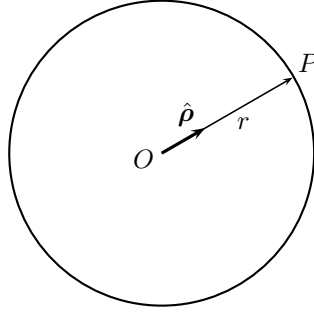


Figura 2.27: Il versore rotante $\hat{\rho}$.

Si ricorda che il vettore velocità è dato in ogni istante dalla relazione (2.115) che si può riscrivere:

$$\dot{OP} = \omega \times OP \quad (2.150)$$

e quindi

$$(r\dot{\hat{\rho}}) = \omega \times (r\hat{\rho}) \quad \Rightarrow \quad r\dot{\hat{\rho}} = r\omega \times \hat{\rho}, \quad (2.151)$$

ove si è usato il fatto che r è costante. Quindi

$$\boxed{\dot{\hat{\rho}} = \omega \times \hat{\rho}}. \quad (2.152)$$

2.8.1 MOTO RELATIVO DI DUE PUNTI MATERIALI.

Si considerino due punti materiali P_1 e P_2 in moto rispetto al punto O con velocità istantanee $\mathbf{v}_1(t)$ e $\mathbf{v}_2(t)$ e accelerazioni istantanee $\mathbf{a}_1(t)$ e $\mathbf{a}_2(t)$. Si consideri il moto di P_2 nel sistema di riferimento in cui P_1 è fermo. Il moto di P_2 in tale sistema di riferimento è detto **moto relativo** di P_2 rispetto a P_1 . La posizione di P_2 rispetto a P_1 è dato dal vettore

$$\mathbf{r} \equiv P_1P_2 = OP_2 - OP_1; \quad (2.153)$$

\mathbf{r} è detto **posizione relativa** di P_2 rispetto a P_1 .

La velocità di P_2 rispetto a P_1 è detta **velocità relativa** ed è data da $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}$, e quindi

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1. \quad (2.154)$$

Similmente l'**accelerazione relativa** di P_2 rispetto a P_1 è data da $\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}}$ e quindi

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_1. \quad (2.155)$$

2.8.2 CASO TRASLATORIO.

Più in generale, si consideri un sistema di riferimento S di origine O e assi cartesiani x, y, z e un secondo sistema di riferimento S' in moto rispetto al primo di origine O' e assi x', y', z' . Siano inoltre $\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{j}}, \hat{\mathbf{k}}$ e $\hat{\mathbf{i}}', \hat{\mathbf{j}}', \hat{\mathbf{k}}'$ i versori dei due sistemi. Si suppone inoltre che il moto di S' rispetto a S sia puramente traslatorio; con questa affermazione si intende precisamente dire che, benché il

moto di O' possa essere arbitrariamente accelerato rispetto a O , gli assi di S' mantengono angoli costanti rispetto agli assi di S . Per semplicità di rappresentazione, si suppone ulteriormente che gli assi dei due sistemi siano paralleli (si veda la figura 2.28). Evidentemente questa supposizione non altera la generalità dei risultati che si troveranno. In ogni istante t vale la relazione vettoriale

$$\mathbf{OP}(t) = \mathbf{OO}'(t) + \mathbf{O}'\mathbf{P}(t) . \quad (2.156)$$

Considerando un intervallo di tempo Δt , la precedente equazione vale anche all'istante $t + \Delta t$, cioè:

$$\mathbf{OP}(t + \Delta t) = \mathbf{OO}'(t + \Delta t) + \mathbf{O}'\mathbf{P}(t + \Delta t) \quad (2.157)$$

Sottraendo membro a membro le due precedenti si trova

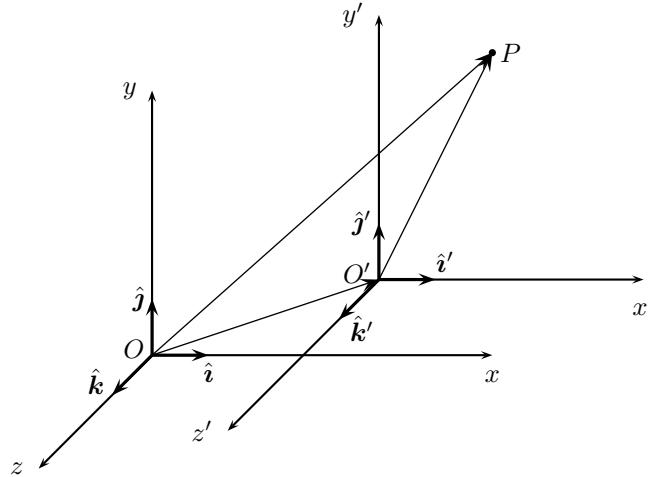


Figura 2.28: I due sistemi S ed S' ed il punto P .

$$\Delta \mathbf{OP} = \Delta \mathbf{OO}' + \Delta \mathbf{O}'\mathbf{P} , \quad (2.158)$$

ove $\Delta \mathbf{OP} = \mathbf{OP}(t + \Delta t) - \mathbf{OP}(t)$ è lo spostamento di P nel sistema S nell'intervallo di tempo Δt e, similmente, $\Delta \mathbf{OO}'$ e $\Delta \mathbf{O}'\mathbf{P}$ sono, rispettivamente lo spostamento di O' rispetto nel sistema S e lo spostamento di P nel sistema S' .

Ad illustrazione di quanto trovato, si consideri il seguente esempio (si veda la figura 2.29). Sia O un osservatore sulla sponda di un fiume e sia S il sistema di riferimento di origine in O . Sia inoltre O' un secondo osservatore in navigazione su di una chiatto lungo il fiume e sia S' il suo sistema di riferimento. I due osservatori considerano il moto della palla che un bambino in P_1 sta lanciando ad un altro bambino che si trova in Q_1 .

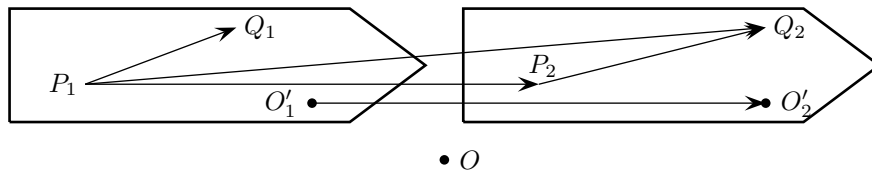


Figura 2.29: Composizione di due movimenti simultanei.

Per O' i due bambini sono fermi e si muove solo la palla, mentre per O i due bambini compiono rispettivamente gli spostamenti P_1P_2 e Q_1Q_2 . Lo spostamento P_1Q_2 della palla rispetto a S è uguale allo spostamento $P_1P_2 = Q_1Q_2 = O'_1O'_2$ della chiatto rispetto a S più lo spostamento $P_1Q_1 = P_2Q_2$ della palla in S' . Non solo, ma si osservi che lo spostamento di P rispetto ad S sarebbe il medesimo se i due spostamenti P_1P_2 e P_1Q_1 avvenissero successivamente invece che simultaneamente. Questo fatto, già notato da Galilei, è detto **principio di indipendenza degli spostamenti simultanei** e può essere enunciato nel modo seguente.

Se un punto materiale si muove simultaneamente di due moti diversi qualunque, lo spostamento effettuato dal punto in un qualunque intervallo di tempo Δt è uguale a quello che si avrebbe se il punto materiale effettuasse, in due intervalli di tempo uguali a Δt ma fra loro successivi, i due moti indipendentemente uno dall'altro.

Questo principio sta a fondamento della scomposizione di un moto in due moti indipendenti e simultanei: si pensi al moto parabolico che è stato studiato scomponendolo in un moto rettilineo uniforme orizzontale ed uno uniformemente accelerato verticale.

Usando l'equazione (2.145), dalla (2.156) si trova

$$\dot{\mathbf{O}}\mathbf{P}(t) = \dot{\mathbf{O}}\mathbf{O}'(t) + \dot{\mathbf{O}}'\mathbf{P}(t) \quad (2.159)$$

che può essere riscritta

$$\mathbf{v}_p(t) = \mathbf{v}_{o'}(t) + \mathbf{v}'_p(t) , \quad (2.160)$$

detta **legge di composizione delle velocità**. Nella precedente equazione sono stati usati i simboli:

\mathbf{v}_p la velocità di P nel sistema S ;

$\mathbf{v}_{o'}$ la velocità di O' nel sistema S ;

\mathbf{v}'_p la velocità di P nel sistema S' .

Si noti che si sta usando qui la convenzione di indicare con \mathbf{v} la velocità nel sistema S , e quindi rispetto a O , e con \mathbf{v}' la velocità nel sistema S' , e quindi rispetto ad O' .

Le velocità quindi si compongono come gli spostamenti; con riferimento all'esempio della chiatta e della palla, la velocità della palla per O è uguale alla velocità della chiatta rispetto a O più quella della palla rispetto a O' .

Sembra utile osservare che le precedenti relazioni vettoriali (2.158) e (2.160) sono valide componente per componente:

$$\begin{cases} \Delta x_p = \Delta x_{o'} + \Delta x'_p \\ \Delta y_p = \Delta y_{o'} + \Delta y'_p \\ \Delta z_p = \Delta z_{o'} + \Delta z'_p \end{cases} , \quad \begin{cases} v_{px}(t) = v_{o'x}(t) + v'_{px}(t) \\ v_{py}(t) = v_{o'y}(t) + v'_{py}(t) \\ v_{pz}(t) = v_{o'z}(t) + v'_{pz}(t) \end{cases} \quad (2.161)$$

In modo perfettamente analogo si ottiene la relazione fra le accelerazioni nei due sistemi di riferimento. Dalla (2.160) si ottiene immediatamente, ricordando la (2.145),

$$\dot{\mathbf{v}}_p(t) = \dot{\mathbf{v}}_{o'}(t) + \dot{\mathbf{v}}'_p(t) ; \quad (2.162)$$

che può essere riscritta

$$\mathbf{a}_p(t) = \mathbf{a}_{o'}(t) + \mathbf{a}'_p(t) . \quad (2.163)$$

che è la **legge di composizione delle accelerazioni** (nel caso traslatorio).

2.8.3 CASO ROTATORIO.

Nel caso rotatorio il calcolo della rapidità di variazione dei vettori è complicato dal fatto che anche i versori del sistema S' ruotano e quindi occorre tenere conto della loro variazione. Si consideri il caso in cui il sistema S' abbia la stessa origine di S , cioè valga $O = O'$, ma sia un sistema rotante con velocità angolare costante. Per semplicità di rappresentazione, in figura 2.30 è rappresentato il caso particolare in cui S' ruota attorno al comune asse z ; le equazioni che seguono non fanno affatto uso di tale ipotesi, costituiscono pertanto una trattazione completamente generale. Si considerino i termini l'equazione (2.156), scritti usando i versori, come esemplificato nella (2.60):

$$\mathbf{OP} = x_p \hat{\mathbf{i}} + y_p \hat{\mathbf{j}} + z_p \hat{\mathbf{k}} \quad , \quad \mathbf{OO}' = \mathbf{0} \quad , \quad \mathbf{O}'\mathbf{P} = x'_p \hat{\mathbf{i}}' + y'_p \hat{\mathbf{j}}' + z'_p \hat{\mathbf{k}}' . \quad (2.164)$$

e se ne considerino le rapidità di variazione, come nell'equazione (2.141). Il primo è semplice:

$$\dot{\mathbf{O}P} = \dot{x}_p \hat{\mathbf{i}} + \dot{y}_p \hat{\mathbf{j}} + \dot{z}_p \hat{\mathbf{k}} = v_{px} \hat{\mathbf{i}} + v_{py} \hat{\mathbf{j}} + v_{pz} \hat{\mathbf{k}} = \mathbf{v}_p ; \quad (2.165)$$

i versori $\hat{\mathbf{i}}$, $\hat{\mathbf{j}}$ e $\hat{\mathbf{k}}$ sono fissi, quindi vale $\dot{\hat{\mathbf{i}}} = \dot{\hat{\mathbf{j}}} = \dot{\hat{\mathbf{k}}} = \mathbf{0}$.

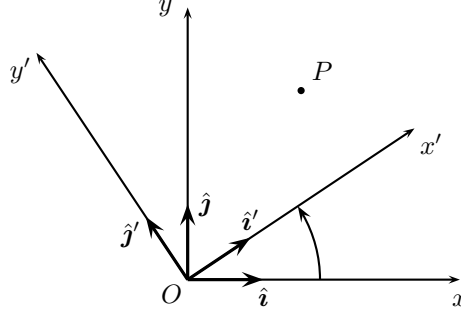


Figura 2.30: S' rotante attorno a S .

Per il calcolo della rapidità di variazione di $\mathbf{O}P$, è necessario calcolare la rapidità di variazione dei versori $\hat{\mathbf{i}}'$, $\hat{\mathbf{j}}'$ e $\hat{\mathbf{k}}'$ che sono variabili; esse sono date dalla (2.152):

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{O}P} &= \dot{x}_p \hat{\mathbf{i}}' + \dot{y}_p \hat{\mathbf{j}}' + \dot{z}_p \hat{\mathbf{k}}' + x_p \dot{\hat{\mathbf{i}}}' + y_p \dot{\hat{\mathbf{j}}}' + z_p \dot{\hat{\mathbf{k}}}' = \\ &= v'_{px} \hat{\mathbf{i}}' + v'_{py} \hat{\mathbf{j}}' + v'_{pz} \hat{\mathbf{k}}' + x_p \boldsymbol{\omega} \times \hat{\mathbf{i}}' + y_p \boldsymbol{\omega} \times \hat{\mathbf{j}}' + z_p \boldsymbol{\omega} \times \hat{\mathbf{k}}' = \\ &= \mathbf{v}'_p + \boldsymbol{\omega} \times (x_p \hat{\mathbf{i}}' + y_p \hat{\mathbf{j}}' + z_p \hat{\mathbf{k}}') = \\ &= \mathbf{v}'_p + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{O}P . \end{aligned} \quad (2.166)$$

La (2.159) pertanto diviene

$$\boxed{\mathbf{v}_p(t) = \mathbf{v}'_p(t) + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{O}P(t)} . \quad (2.167)$$

Questa è la legge generale della relazione fra le velocità di un punto materiale P in moto rispetto a un sistema di riferimento S ed un sistema S' rotante rispetto a S .

Nel caso particolare in cui P sia fermo in S' , cioè valga $\mathbf{v}'_p = \mathbf{0}$ la precedente equazione si riduce alla (2.115) come deve essere per un moto puramente rotatorio. Quindi l'equazione (2.167) contiene un termine di traslazione di P in S' più il termine di rotazione di S' rispetto a S .

Poiché nel caso in esame $O = O'$, nell'equazione (2.167) si sarebbe potuto sostituire O al posto di O' . Si è preferito mantenere O' perché quando si considererà S' in moto rototraslatorio rispetto a S , sarà necessario integrare la (2.167) con la (2.160) e quindi risulterà conveniente aver distinto O' da O .

Passando alle accelerazioni si trova, procedendo in modo analogo:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{v}}_p &= \dot{v}_{px} \hat{\mathbf{i}} + \dot{v}_{py} \hat{\mathbf{j}} + \dot{v}_{pz} \hat{\mathbf{k}} = a_{px} \hat{\mathbf{i}} + a_{py} \hat{\mathbf{j}} + a_{pz} \hat{\mathbf{k}} = \mathbf{a}_p \\ \dot{\mathbf{v}}'_p &= \dot{v}'_{px} \hat{\mathbf{i}}' + \dot{v}'_{py} \hat{\mathbf{j}}' + \dot{v}'_{pz} \hat{\mathbf{k}}' + v'_{px} \dot{\hat{\mathbf{i}}}' + v'_{py} \dot{\hat{\mathbf{j}}}' + v'_{pz} \dot{\hat{\mathbf{k}}}' = \\ &= a'_{px} \hat{\mathbf{i}}' + a'_{py} \hat{\mathbf{j}}' + a'_{pz} \hat{\mathbf{k}}' + v'_{px} \boldsymbol{\omega} \times \hat{\mathbf{i}}' + v'_{py} \boldsymbol{\omega} \times \hat{\mathbf{j}}' + v'_{pz} \boldsymbol{\omega} \times \hat{\mathbf{k}}' = \\ &= \mathbf{a}'_p + \boldsymbol{\omega} \times (v'_{px} \hat{\mathbf{i}}' + v'_{py} \hat{\mathbf{j}}' + v'_{pz} \hat{\mathbf{k}}') = \\ &= \mathbf{a}'_p + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}'_p \end{aligned} \quad (2.168)$$

$$\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{O}P} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{O}P = \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{v}'_p + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{O}P) = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}'_p + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{O}P) .$$

Quindi

$$\mathbf{a}_p = \mathbf{a}'_p + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}'_p + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{O}P) . \quad (2.169)$$

Resta infine da calcolare il vettore $\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{O}'\mathbf{P})$; ricordando la relazione (2.76), vale

$$\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{O}'\mathbf{P}) = (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{O}'\mathbf{P})\boldsymbol{\omega} - \omega^2 \mathbf{O}'\mathbf{P} , \quad (2.170)$$

ma $\boldsymbol{\omega}$ e $\mathbf{O}'\mathbf{P}$ sono vettori perpendicolari, quindi il loro prodotto scalare è nullo; rimane pertanto

$$\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{O}'\mathbf{P}) = -\omega^2 \mathbf{O}'\mathbf{P} . \quad (2.171)$$

Mettendo finalmente tutto insieme, si trova

$$\mathbf{a}_p(t) = \mathbf{a}'_p(t) + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}'_p(t) - \omega^2 \mathbf{O}'\mathbf{P}(t) . \quad (2.172)$$

2.8.4 CASO ROTOTRASLATORIO.

Nel caso in cui il sistema S' si muova di moto rototraslatorio rispetto al sistema S , occorre mettere insieme i risultati trovati nei due paragrafi precedenti. Per far ciò, basta prendere le equazioni delle velocità e degli spostamenti nel caso rotatorio, equazioni (2.167) e (2.172), e aggiungervi, la velocità $\mathbf{v}_{o'}$ e l'accelerazione $\mathbf{a}_{o'}$ come visto nel caso traslatorio.

Le formule generali sono quindi

$$\mathbf{v}_p(t) = \mathbf{v}_{o'} + \mathbf{v}'_p(t) + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{O}'\mathbf{P}(t) , \quad (2.173)$$

per le velocità e

$$\mathbf{a}_p(t) = \mathbf{a}_{o'}(t) + \mathbf{a}'_p(t) + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}'_p(t) - \omega^2 \mathbf{O}'\mathbf{P}(t) , \quad (2.174)$$

per le accelerazioni.

2.8.5 TRASFORMAZIONI DI GALILEI.

Fra tutti i sistemi di riferimento in moto relativo particolarmente importante, e semplice, è il caso in cui S' si muova rispetto ad S con velocità uniforme $\mathbf{v}_{o'} = \mathbf{V}$. In questo caso è possibile scegliere i due assi delle x paralleli a tale velocità e gli assi y e z a loro volta paralleli come in figura 2.31. In tal caso valgono

$$\mathbf{a}_{o'} = \mathbf{0} , \quad \boldsymbol{\omega} = \mathbf{0} , \quad \mathbf{OO}'(t) = \mathbf{V}t , \quad (2.175)$$

quindi utilizzando le (2.156), (2.173) e (2.174) si ottiene

$$\mathbf{O}'\mathbf{P}(t) = \mathbf{OP}(t) - \mathbf{V}t , \quad \mathbf{v}'_p(t) = \mathbf{v}_p(t) - \mathbf{V} , \quad \mathbf{a}'_p(t) = \mathbf{a}(t) . \quad (2.176)$$

Le equazioni precedenti scritte per componenti hanno la semplice forma

$$\left\{ \begin{array}{l} x' = x - Vt \\ y' = y \\ z' = z \end{array} \right. , \quad \left\{ \begin{array}{l} v'_x = v_x - V \\ v'_y = v_y \\ v'_z = v_z \end{array} \right. , \quad \left\{ \begin{array}{l} a'_x = a_x \\ a'_y = a_y \\ a'_z = a_z \end{array} \right. \quad (2.177)$$

Le equazioni precedenti sono dette **trasformazioni di Galilei**.

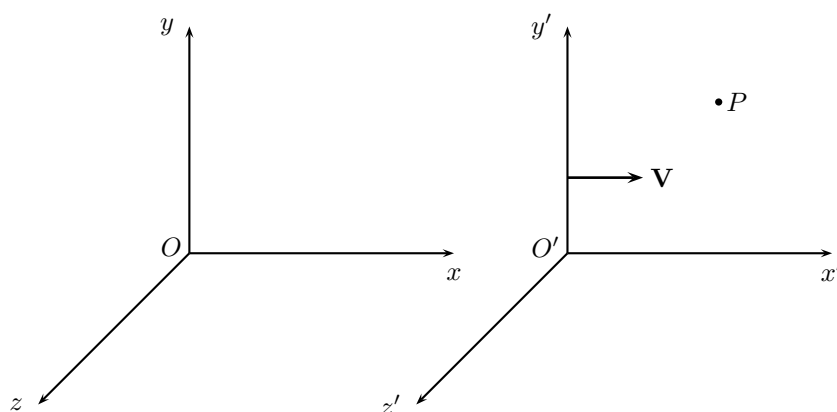


Figura 2.31: Le trasformazioni di Galilei.

INTERMEZZO. ACHILLE E LA TARTARUGA.

È noto l'argomento di Zenone⁸ contro il moto detto *di Achille*. Si trova enunciato, e confutato, nella *Fisica* di Aristotele⁹ (si veda per esempio [3], VI 9 15 o, per una presentazione più divertente, [4] pagine 47-49) e può essere riassunto come segue.

Si tratta di una gara fra Achille, il più veloce degli umani, e una Tartaruga, il più lento degli

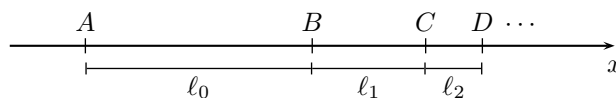


Figura 2.32: Achille e la Tartaruga.

animali: si stabilisce che la Tartaruga abbia un vantaggio; Achille dunque parte dal punto A mentre la Tartaruga dal punto B , si veda la figura 2.32. È chiaro che, prima di raggiungere la Tartaruga, Achille deve giungere nel punto B da cui la Tartaruga è partita; nel frattempo la Tartaruga si è spostata in un nuovo punto C ; ora, nuovamente, Achille prima di raggiungere la Tartaruga deve giungere in C , mentre la Tartaruga si è spostata in un nuovo punto D , e così via. È chiaro che il processo richiede un numero infinito di passi successivi e quindi un tempo infinito. Questo argomento appare logicamente corretto; eppure la comune esperienza insegna che chi si muove più velocemente raggiunge sempre, e in un tempo finito, chi si muove più lentamente. Vi è quindi un conflitto insanabile fra ciò che suggerisce l'intelletto e ciò che comunicano i nostri sensi. In altre parole, sembra che la realtà non sia conoscibile mediante il ragionamento e la logica, ma solo osservabile mediante i sensi. Zenone, nel V secolo a. C., è stato il primo a mettere questo problema in tutta la luce che merita.

Evidentemente la scoperta zenoniana impedisce ogni attività scientifica intesa come descrizione di fenomeni noti e previsione di fenomeni ancora ignoti. Per non arrestare il progresso scientifico è, quindi, necessario *inventare un metodo* per raccordare la capacità logica ed i sensi. Tale metodo è fornito dalla matematica e dai modelli che essa costruisce. Se Zenone voleva portare all'assurdo il concetto di moto, e con esso, quello di divenire, qui si propone una lettura diversa: la Natura è conoscibile dall'intelletto solo per mezzo della matematica; l'intelletto lasciato a sé stesso si inganna. Ecco perché l'umanità ha dovuto *inventare* le teorie: per fornire all'intelletto lo strumento per la conoscenza razionale del fenomeno; senza la matematica l'intelletto non ha il controllo su ciò che conosce e rimane sottoposto agli inganni zenoniani.

In effetti la teoria sviluppata nella sezione 2.3.1 fornisce l'armamentario teorico necessario a

⁸ Zenone (489?430 a.C., filosofo di Elea.)

⁹ Aristotele (384?322 a.C.), filosofo di Stagira.

determinare a quale istante e in quale punto Achille raggiunge la Tartaruga; il lettore studioso esegua tale esercizio. Qui si vuole dimostrare che è possibile costruire uno strumento matematico che consenta di sommare tutti gli infiniti intervalli di tempo in cui Achille compie la sua infinita rincorsa e ottenere il medesimo risultato.

Per farlo è necessario costruire la matematica adatta. Sia x sia un qualunque quantità positiva ma minore di 1, sia cioè $0 < x < 1$. Si vuole calcolare la somma infinita

$$S = x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots ; \quad (2.178)$$

raccogliendo fra tutti gli addendi una x si ottiene:

$$S = x(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots) = x(1 + S) \quad \Longleftrightarrow \quad S = x(1 + S) . \quad (2.179)$$

Risolvendo questa semplice equazione di primo grado si determina S :

$$S = \frac{x}{x - 1} . \quad (2.180)$$

Questo semplice calcolo funziona perché $x < 1$ e quindi ogni potenza è minore della precedente; quello che si sta facendo è sommare infiniti termini sempre più piccoli in modo tale che la loro somma sia finita. Si osservi che la (2.180) non vale se $x > 1$ poiché in tale caso ogni addendo è *più grande* e quindi la somma non può che essere infinita, e quindi priva di senso; altrettanto poco sensato risulta il caso con $x = 1$ in cui il denominatore della (2.180) si annulla.

Questo metodo per sommare serie di infiniti addendi sempre più piccoli è precisamente quello che serve per risolvere il problema di Achille. Sia infatti ℓ_0 il vantaggio iniziale della Tartaruga su Achille, sia cioè la distanza che separa i punti A e B , siano inoltre v_a e v_t le velocità di Achille e della Tartaruga rispettivamente, con $v_a > v_t$. Sia poi t_1 l'istante in cui Achille giunge in B ; è chiaro che vale

$$t_1 = \frac{\ell_0}{v_a}; \quad (2.181)$$

in questo tempo la Tartaruga è giunta in C percorrendo la distanza

$$\ell_1 = v_t t_1 = v_t \frac{\ell_0}{v_a} . \quad (2.182)$$

Il tempo impiegato da Achille per giungere in C da B è quindi

$$t_2 = \frac{\ell_1}{v_a} = \frac{\ell_0}{v_a} \frac{v_t}{v_a} ; \quad (2.183)$$

durante il tempo t_2 la Tartaruga è giunta in D percorrendo la distanza

$$\ell_2 = v_t t_2 = v_t \frac{\ell_0}{v_a} \frac{v_t}{v_a} , \quad (2.184)$$

il tempo impiegato da Achille per giungere in D da C è quindi

$$t_3 = \frac{\ell_2}{v_a} = \frac{\ell_0}{v_a} \left(\frac{v_t}{v_a} \right)^2 , \quad (2.185)$$

e così via. Il tempo totale t impiegato da Achille a raggiungere la Tartaruga è quindi dato dalla somma infinita

$$\begin{aligned} t &= t_1 + t_2 + t_3 + \cdots = \\ &= \frac{\ell_0}{v_a} + \frac{\ell_0}{v_a} \frac{v_t}{v_a} + \frac{\ell_0}{v_a} \left(\frac{v_t}{v_a} \right)^2 + \frac{\ell_0}{v_a} \left(\frac{v_t}{v_a} \right)^3 + \cdots = \\ &= \frac{\ell_0}{v_a} \left[1 + \frac{v_t}{v_a} + \left(\frac{v_t}{v_a} \right)^2 + \left(\frac{v_t}{v_a} \right)^3 + \cdots \right] . \end{aligned} \quad (2.186)$$

Questa espressione può essere riscritta nella forma

$$t = \frac{\ell_0}{v_a}(1 + S) \quad (2.187)$$

ove S è una somma di potenze del tipo di (2.178) con $x = v_t/v_a$; poiché $v_t < v_a$ vale $v_t/v_a < 1$, è quindi possibile utilizzare la (2.180) ottenendo

$$t = \frac{\ell_0}{v_a} \left(1 + \frac{v_t/v_a}{1 - v_t/v_a} \right) = \frac{\ell_0}{v_a} \left(1 + \frac{v_t}{v_a - v_t} \right) = \frac{\ell_0}{v_a} \frac{v_a}{v_a - v_t} = \frac{\ell_0}{v_a - v_t} \quad (2.188)$$

che è il risultato corretto in accordo al dato sensoriale.

Quindi l'intelletto ha inventato uno strumento, le *somme infinite*, che consente di superare il problema logico posto da Zenone. Si noti che, secondo questa interpretazione, il problema zenoniano *non* è risolto; in effetti qui non si sostiene che sia *necessario* affrontare la conoscenza del mondo fenomenico usando la matematica. Si potrebbe anzi sostenere, non senza qualche ragione, che l'idea stessa di una somma infinita sia priva di senso, figurarsi determinarne il risultato; e che la manipolazione disinvoltata della somma S vista sopra è solo un trucco formale. Però, se si accetta lo strumento, con tutti i suoi limiti sia formali che sostanziali, e se lo si usa nel rispetto di tali limiti, esso produce un risultato in accordo con il dato sperimentale.

3

DINAMICA DEL PUNTO MATERIALE.

Se la cinematica si occupa di descrivere il moto, la dinamica è lo studio del moto a partire dalle cause che lo determinano; suo scopo è quindi la determinazione della legge oraria conoscendo le cause del moto. Con il termine *causa*, in questo contesto, ci si riferisce ad una grandezza vettoriale che prende il nome di **forza** e che verrà introdotta in quel che segue.

3.1 LA MASSA INERZIALE.

È giunto il momento di dare la definizione operativa di *massa* di un punto materiale. La definizione di massa qui presentata è dovuta a Mach¹, si veda [5] pagina 236. Si considerino due punti materiali P_1 e P_2 che costituiscano un **sistema isolato**, cioè che interagiscano solo tra di loro senza interferenze esterne. La natura dell'interazione non ha alcuna importanza; potrebbe trattarsi per esempio di due calamite che si attirano o si respingono o altro. Qui, per fissare le idee, si considera il caso di due punti materiali appoggiati su un tavolo (sufficientemente liscio perché ogni attrito possa essere trascurato) che si spingono l'un l'altro per mezzo di una molla inizialmente compressa: allo scattare della molla P_1 e P_2 si mettono in movimento rispettivamente con accelerazioni \mathbf{a}_1 e \mathbf{a}_2 . Eseguendo l'esperimento ora descritto, si osservano i seguenti risultati

1. i vettori \mathbf{a}_1 e \mathbf{a}_2 hanno la stessa direzione ma versi opposti;
2. quali che siano le condizioni sperimentali (cambiando per esempio il tipo di molla o il fatto che sia più o meno compressa), il rapporto fra i moduli delle due accelerazioni è costante e dipende solamente dai punti materiali scelti per fare l'esperimento.

Chiamando m_{12} tale costante, si può quindi scrivere

$$\frac{a_1}{a_2} = m_{12} . \quad (3.1)$$

Qualche informazione in più sulla costante m_{12} si ottiene osservando che vale

$$\frac{a_1}{a_2} = \left(\frac{a_2}{a_1} \right)^{-1} , \quad (3.2)$$

da cui segue

$$m_{12} = \frac{1}{m_{21}} . \quad (3.3)$$

Ripetendo l'esperimento con il punto materiale P_1 ed un terzo punto materiale P_3 , quindi con P_2 e P_3 ; si ottengono le relazioni

$$\frac{a_1}{a_3} = m_{13} \quad , \quad \frac{a_2}{a_3} = m_{23} , \quad (3.4)$$

quindi, poiché vale

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{a_1}{a_3} \cdot \frac{a_3}{a_2} = \frac{a_1}{a_3} : \frac{a_2}{a_3} , \quad (3.5)$$

si ottiene

$$m_{12} = \frac{m_{13}}{m_{23}} . \quad (3.6)$$

¹ Ernst Waldfried Josef Wenzel Mach (1838–1916), fisico e filosofo austriaco.

Si osservi ora che le proprietà (3.3) e (3.6) sono verificate se la costante m_{12} è il rapporto di due costanti *positive* attribuibili rispettivamente a P_1 e P_2 ; si pone quindi

$$m_{12} = \frac{m_2}{m_1} , \quad (3.7)$$

e quindi l'equazione (3.1) può essere scritta:

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{m_2}{m_1} . \quad (3.8)$$

La costante positiva m associata a ciascun punto materiale, definita operativamente come sopra, è detta **massa inerziale** del punto materiale in questione.

Per determinare il valore numerico da attribuire alla massa inerziale di ciascun punto materiale lo si confronta, per mezzo della (3.8), con la massa unitaria di riferimento definita al paragrafo 1.2.3: se nell'esperimento descritto sopra P_1 è il corpo di massa unitaria, cioè se si pone $m_1 = 1$ kg, e P_2 è un qualunque altro punto materiale di cui si voglia determinare la massa m_2 , si trova:

$$m_2 = \frac{a_1}{a_2} m_1 = \frac{a_1}{a_2} . \quad (3.9)$$

In questo modo la misura della massa è ottenuta tramite la misura di due accelerazioni. Rimane così definita la massa di qualunque punto materiale.

Tenendo presente che, come visto sopra, le due accelerazioni \mathbf{a}_1 e \mathbf{a}_2 hanno versi opposti, l'equazione (3.8) può essere riscritta in nella seguente forma vettoriale

$$m_1 \mathbf{a}_1 = -m_2 \mathbf{a}_2 . \quad (3.10)$$

L'aggettivo *inerziale* serve a distinguere la massa di cui si tratta qui dalla massa *gravitazionale* che si verrà trattata in un capitolo successivo. Per semplicità, dove non vi sia confusione, d'ora in poi la massa inerziale si chiamerà semplicemente *massa*.

Il fatto di aver scelto la massa come costante positiva è completamente arbitrario. In effetti il concetto di massa è stato introdotto attraverso l'equazione (3.7) che dice che il rapporto delle masse di due punti materiali è la costante positiva m_{12} (che è positiva in quanto rapporto dei moduli di due vettori, che sono due quantità positive), quindi le due masse devono avere lo stesso segno; si sarebbe quindi potuto scegliere il segno negativo. Il segno positivo per le masse è quindi convenzionale.

Si verifica sperimentalmente che se P_1 e P_2 vengono uniti insieme a costituire un terzo punto materiale P_3 , la massa risultante è la somma delle masse dei costituenti, cioè vale

$$m_3 = m_1 + m_2 ; \quad (3.11)$$

in questo senso si dice che la massa è una **grandezza additiva**.

3.2 LA LEGGE FONDAMENTALE DELLA DINAMICA.

Se un punto materiale P di massa m in un certo istante possiede l'accelerazione \mathbf{a} , si dice che su P in questione agisce la **forza** \mathbf{F} definita dall'equazione

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} . \quad (3.12)$$

L'unità di misura della forza è detta **newton**, simbolo N; la forza di 1 N è quella che agendo su un punto materiale avente la massa di 1 kg produce l'accelerazione di 1 m s^{-2} . Le dimensioni della forza dunque sono

$$[F] = [t]^{-2} [l]^1 [m]^1 . \quad (3.13)$$

Poiché la massa è positiva, la forza agente su di un punto materiale e l'accelerazione prodotta sono vettori aventi la stessa direzione e lo stesso verso.

È un fatto sperimentale che se due forze \mathbf{F}_1 ed \mathbf{F}_2 agiscono simultaneamente su di un punto materiale P di massa m l'accelerazione di P è la somma delle accelerazioni prodotte da ciascuna delle due forze (si ricordi anche il principio di indipendenza degli spostamenti simultanei visto sopra, e l'equazione (2.163) che ne è una conseguenza)

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 = \frac{\mathbf{F}_1}{m} + \frac{\mathbf{F}_2}{m} . \quad (3.14)$$

Dalla (3.12), si ricava

$$\mathbf{a} = \frac{\mathbf{F}}{m} \quad (3.15)$$

e quindi, per confronto con la (3.14), si ottiene

$$\boxed{\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2} . \quad (3.16)$$

L'equazione precedente si generalizza facilmente al caso di più forze ed esprime il **principio di sovrapposizione** che può essere enunciato come segue.

Se su di un punto materiale agiscono simultaneamente più forze, esso si muove come se su di esso agisse un'unica forza data dalla somma vettoriale delle forze agenti.

L'equazione (3.12), che è la definizione di forza, è lo strumento fondamentale per la determinazione del moto nel caso generale. Infatti, una volta che siano note le forze agenti su di un punto materiale di massa m , la sua accelerazione può essere facilmente determinata. Dalla conoscenza dell'accelerazione è possibile risalire al tipo di moto ed alla legge oraria².

Vista la sua importanza, la (3.12) è nota con il nome di **legge fondamentale della dinamica**.

3.3 PRINCIPIO DI AZIONE E REAZIONE.

Si considerino nuovamente i punti materiali P_1 e P_2 che interagiscono solo fra loro. La definizione di forza data nella sezione precedente permette di precisare la natura della loro interazione; si indichi con \mathbf{F}_{12} la forza che agisce su P_1 (dovuta a P_2) e con \mathbf{F}_{21} la forza che agisce su P_2 (dovuta a P_1); allora, per la (3.12), devono valere

$$\mathbf{F}_{12} = m_1 \mathbf{a}_1 \quad , \quad \mathbf{F}_{21} = m_2 \mathbf{a}_2 . \quad (3.17)$$

Ricordando la (3.10), le forze con cui P_1 e P_2 interagiscono devono verificare la relazione

$$\boxed{\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}} , \quad (3.18)$$

cioè sono uguali in modulo e direzione ma hanno versi opposti.

Questa equazione esprime il contenuto del **principio di azione e reazione**³.

Se due punti materiali interagiscono fra di loro, la forza con cui il primo agisce sul secondo è uguale ed opposta a quella con cui il secondo agisce sul primo.

Nel caso in cui a interagire siano più punti materiali il principio si applica a ciascuna delle coppie interagenti. Per esempio, se vi sono tre punti materiali P_1 , P_2 e P_3 che interagiscono, valgono le relazioni

$$\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21} \quad , \quad \mathbf{F}_{13} = -\mathbf{F}_{31} \quad , \quad \mathbf{F}_{23} = -\mathbf{F}_{32} \quad (3.19)$$

ove \mathbf{F}_{12} è la forza con cui P_2 agisce su P_1 , \mathbf{F}_{21} quella con cui P_1 agisce su P_2 e via di seguito.

² Questa affermazione è vera in tutte le situazioni fisicamente rilevanti; tuttavia la determinazione della legge del moto nel caso generale richiede le tecniche dell'analisi matematica. Qui si affronteranno solo i casi più semplici.

³ La terminologia *azione e reazione* è tradizionale ma può essere fuorviante. Qui la parola 'azione' non ha il significato comune: non esiste l'opposto di un'azione come quella di leggere un libro. Per azione e reazione si intendono delle forze.

3.4 SISTEMI DI RIFERIMENTO INERZIALI.

La legge fondamentale della dinamica, equazione (3.12), ha un importante limite di validità. Per capirlo, si consideri la situazione seguente. Si supponga di stare viaggiando a bordo di un treno che si muova di moto rettilineo ed uniforme e che una piccola pallina venga collocata, con velocità nulla, sul pavimento del vagone. Si supponga ora che improvvisamente il treno rallenti; i viaggiatori vedono la pallina mettersi in movimento nel verso del moto del treno. Si noti che sulla pallina non ha agito alcuna forza, eppure essa, che era ferma, ha cominciato a muoversi con una velocità diversa da zero: la pallina ha quindi accelerato. Accelerare senza essere sottoposti all'azione di una forza è una chiara violazione della (3.12).

Si consideri ora la medesima situazione dal punto di vista di un viaggiatore che sia fermo sul marciapiede della stazione: egli vede le ganasce dei freni che stringono le ruote del vagone ed il treno rallentare; vede invece la pallina, non sottoposta a forze, continuare il suo moto rettilineo uniforme con una velocità maggiore di quella del treno, che ha rallentato. Per l'osservatore sul marciapiede, quindi, non vi è alcun problema: il vagone, sottoposto alla forza frenante, rallenta, mentre la pallina, non sottoposta ad alcuna forza, continua il suo moto uniforme. Per lui, quindi, la (3.12) è perfettamente valida.

I due osservatori, e quindi i sistemi di riferimento, non sono equivalenti dal punto di vista dinamico; diventano non equivalenti nel momento in cui quello sul treno è sottoposto ad accelerazione.

Dall'esempio visto, si può concludere che la legge fondamentale della dinamica vale solo rispetto ai sistemi di riferimento non accelerati. Questi sono detti **sistemi di riferimento inerziali**.

Per caratterizzare i sistemi di riferimento inerziali si fa uso del seguente **principio d'inerzia**.

Un punto materiale non sottoposto a forze ha velocità \mathbf{v} costante.

E quindi o è fermo (caso di velocità costante nulla) o si muove di moto rettilineo uniforme. In questo modo si definiscono *inerziali* i sistemi di riferimento per i quali vale il principio d'inerzia. I sistemi di riferimento per i quali non vale, come per esempio i sistemi accelerati visti sopra, si dicono sistemi di riferimento **non inerziali**.

In quel che segue, salvo diverso avviso, si supporrà sempre di trovarsi in un sistema di riferimento inerziale.

Il principio d'inerzia è stato formulato per primo da Galilei nella *Giornata Seconda* del suo *Dialogo*.⁴

A questo punto è necessario chiedersi se esistano dei sistemi inerziali. Per rispondere a questa domanda è necessario chiedersi se esistano corpi non accelerati; infatti i sistemi inerziali sono sistemi di riferimento non accelerati; quindi se si trovasse un corpo non accelerato si potrebbe utilizzarlo come origine di un sistema di riferimento inerziale. Quindi la domanda se esistano sistemi di riferimento inerziali è equivalente alla domanda se esistano corpi non accelerati e cioè: esistono corpi non soggetti a forze. Sfortunatamente la risposta è no. Infatti sulla Terra ogni corpo si muove del moto di rotazione della Terra attorno al proprio asse; tale moto è circolare e quindi accelerato. La Terra a sua volta è soggetta alla forza gravitazionale (che verrà studiata in un capitolo successivo) del Sole. Il Sole a sua volta sente la forza gravitazionale delle stelle più vicine e così via. Quindi non esistono sistemi di riferimento inerziali. A rigore, pertanto, la situazione in cui l'equazione (3.12) è valida non si presenta mai.

Tuttavia, esistono molti sistemi di riferimento rispetto ai quali l'equazione (3.12) è valida con un'eccellente approssimazione. Per esempio la forza cui è sottoposto il Sole è estremamente piccola e quindi, per la maggioranza delle applicazioni, esso è un ottimo sistema inerziale. La Terra stessa è un buon sistema inerziale entro limiti di approssimazione accettabili in molte situazioni. In ogni caso quando nel seguito si parlerà di sistema inerziale si intenderà sempre riferirsi ad un sistema di riferimento la cui approssimazione ad un sistema inerziale sia ben oltre le possibilità degli strumenti di misura.

⁴ Si veda, per esempio, [6], pagg. 179-182.

3.5 I PRINCIPI DI NEWTON.

La legge fondamentale della dinamica, il principio di azione e reazione e il principio d'inerzia compaiono per la prima volta nella forma qui enunciata all'inizio, dopo alcune definizioni, della fondamentale opera di Newton⁵ *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*⁶. Newton chiama i tre principi *axiomata sive leges motus*, cioè assiomi o leggi del moto. Questi gli enunciati newtoniani.⁷

1. *Ogni corpo persevera nel suo stato di quiete o di moto rettilineo ed uniforme, finché non è costretto a mutare quello stato da forze impresse.*
2. *Il mutamento del moto è proporzionale alla forza motrice impressa e avviene secondo la linea retta lungo la quale tale forza è impressa.*
3. *La reazione è sempre uguale e contraria all'azione: o le azioni reciproche di due corpi sono sempre uguali e dirette in direzioni contrarie.*

Le tre leggi sono seguite dal seguente corollario.

Un corpo su cui agiscono simultaneamente due forze percorre la diagonale di un parallelogramma nello stesso tempo in cui ne descriverebbe sotto l'azione delle due forze separatamente.

Si noti che si tratta di quello che qui è stato chiamato principio di sovrapposizione.

3.6 FORZA PESO.

Si è visto precedentemente che tutti i punti materiali cadono verso il centro della Terra con la stessa accelerazione. A questa accelerazione corrisponde una forza cui si dà il nome di **forza peso** o semplicemente *peso*. Il peso di un punto materiale è dunque la forza con cui esso è attratto dalla Terra. Indicando con \mathbf{g} l'accelerazione di gravità, il peso di un punto materiale di massa m è dato da

$$\mathbf{F}_p = m\mathbf{g} \quad (3.20)$$

ed è sempre diretto verso il centro della Terra.

3.6.1 PIANO ORIZZONTALE LISCIO.

È già stato fatto lo studio del moto di caduta libera, cioè sotto l'azione del solo peso; qui si vuole esaminare che accade quando il punto materiale viene in contatto con superfici che ne limitano la libertà di movimento. Come primo esempio si considera il punto P di massa m vincolato a muoversi su di un piano orizzontale *liscio*, cioè tale che siano trascurabili le forze di attrito. Vale quindi la relazione

$$\mathbf{F}_p + \mathbf{N} = \mathbf{0} . \quad (3.21)$$

Se P è posto sul piano orizzontale con velocità nulla, l'esperienza insegna che continuerà a starvi immobile. Per il principio d'inerzia, quindi, su P agisce una forza totale nulla; pertanto il piano orizzontale deve sviluppare una forza uguale ed opposta alla forza peso. Tale forza è detta **reazione vincolare** e, nel caso di un vincolo liscio, viene indicata con il simbolo \mathbf{N} . Il sostantivo *reazione* richiama il principio di azione e reazione: il piano agisce sul punto materiale con una

⁵ Isaac Newton (1643-1727) scienziato inglese.

⁶ Si veda [7].

⁷ Di seguito si riporta il testo latino originale delle *leges* e del successivo *corollarium*.

Lex I. Corpus omne perseverare in statu suo quiescendi vel movendi uniformiter in directum, nisi quatenus a viribus impressis cogitur statum illum mutare.

Lex II. Mutationem motus proportionalem esse vi motrici impressae et fieri secundum lineam rectam qua vis illa imprimitur.

Lex III. Actioni contrariam semper et aequalem esse reactionem: sive corporum duorum actiones in se mutuo semper esse aequales et in partes contrarias dirigi.

Corollarium I. Corpus viribus coniunctis diagonalem parallelogrammi eodem tempore describere, quo latera separatim.

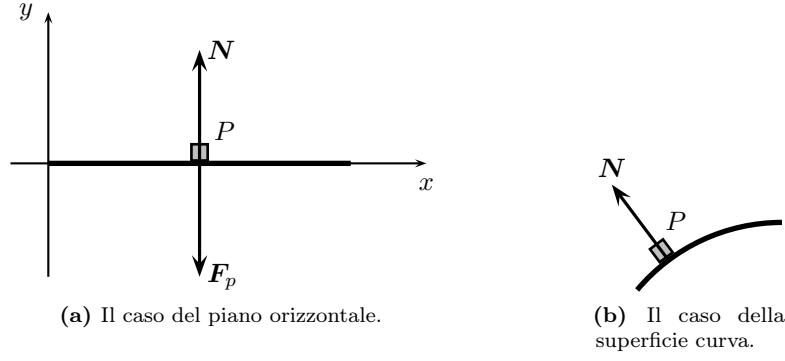


Figura 3.1: La reazione vincolare nel caso vincolo liscio.

forza uguale e contraria a quella con cui il punto materiale agisce su di esso; l'aggettivo *vincolare* sottolinea il fatto che il piano orizzontale costituisce un vincolo che il punto materiale non può oltrepassare.

Se, come in figura 3.1a, ci si riferisce a un sistema di assi cartesiani x e y , con l'asse delle ordinate volto verso l'alto, la forza peso ha componenti $\mathbf{F}_p = (0, -mg)$; la precedente equazione può quindi essere scritta nella forma seguente

$$\begin{cases} N_x = 0 \\ N_y = mg \end{cases} \quad (3.22)$$

Quindi la reazione vincolare di una superficie liscia è perpendicolare alla superficie. Questo risultato è vero anche nel caso in cui la superficie che costituisce il vincolo non sia piana come mostrato in figura 3.1b.

3.6.2 PIANO INCLINATO LISCIO.

Si consideri ora il caso del punto materiale P vincolato a muoversi su di un piano inclinato di un angolo α rispetto all'orizzontale, privo di attrito, di lunghezza ℓ , base b e altezza h , come in figura 3.2.

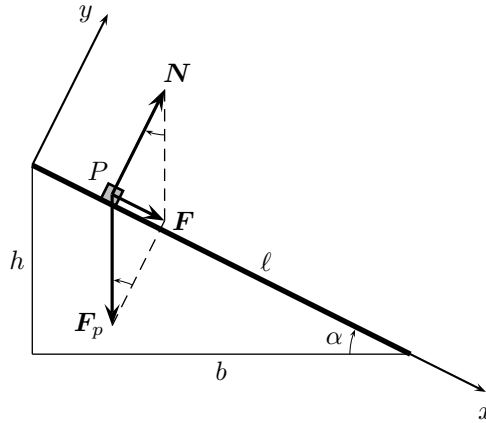


Figura 3.2: Il piano inclinato.

Su P agiscono quindi due forze, la forza peso \mathbf{F}_p , diretta verso il basso, e la reazione vincolare \mathbf{N} , perpendicolare al piano inclinato. Le due forze non hanno la stessa direzione e quindi non si fanno equilibrio; la risultante \mathbf{F} è data da

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_p + \mathbf{N} \quad (3.23)$$

Il piano inclinato, come nel caso orizzontale, esercita una forza uguale e contraria a quella con cui il punto materiale preme su esso. Tale forza è la componente del peso perpendicolare al piano.

Rispetto ad un sistema di riferimento che abbia come asse delle ascisse una retta giacente sul piano e come asse delle ordinate una perpendicolare al piano, le forze agenti hanno componenti

$$\mathbf{F}_p = (F_{px}, F_{py}) \quad , \quad \mathbf{N} = (0, N) . \quad (3.24)$$

Quindi, se la reazione vincolare è uguale e contraria alla componente della forza peso che preme sul piano, deve valere $N = -F_{py}$ e quindi l'equazione (3.23) scritta per componenti diventa

$$\begin{cases} F_x = F_{px} \\ F_y = F_{py} + N = 0 \end{cases} . \quad (3.25)$$

Per determinare le componenti della forza peso si osservi che l'angolo formato da \mathbf{F}_p e la perpendicolare al piano è uguale all'angolo α formato dal piano inclinato e l'orizzontale; vale quindi⁸

$$\begin{aligned} F_{px} &= F_p \sin \alpha = mg \sin \alpha = mg \frac{h}{\ell} \\ F_{py} &= -F_p \cos \alpha = -mg \cos \alpha = -mg \frac{b}{\ell} . \end{aligned} \quad (3.26)$$

Applicando la legge fondamentale della dinamica (3.12) e usando le precedenti equazioni si ottiene

$$\begin{cases} a_x = \frac{F_x}{m} = \frac{h}{\ell} g \\ a_y = \frac{F_y}{m} = 0 \end{cases} . \quad (3.27)$$

Il punto materiale quindi si muove lungo il piano inclinato di moto uniformemente accelerato con accelerazione a_x direttamente proporzionale alla pendenza h/ℓ del piano inclinato. La reazione vincolare del piano è data da

$$N = mg \frac{b}{\ell} . \quad (3.28)$$

Se il punto materiale parte, con velocità iniziale nulla, dalla sommità del piano inclinato, il modulo v della velocità con cui arriva al fondo, dopo aver percorso lo spostamento ℓ , può essere calcolata usando la (2.29):

$$v = \sqrt{2 \frac{h}{\ell} g \ell} = \sqrt{2gh} . \quad (3.29)$$

La velocità finale quindi non dipende dalla pendenza del piano inclinato ma solo dalla sua altezza; tale velocità è uguale alla velocità con cui giunge al suolo un corpo in caduta libera da un'altezza h , equazione (2.35). Il tempo t di discesa lungo il piano inclinato è

$$t = \frac{v}{a_x} = \frac{\sqrt{2gh}}{\frac{h}{g\ell}} = \ell \sqrt{\frac{2}{gh}} . \quad (3.30)$$

Si osservi che, fissata l'altezza h , l'accelerazione è inversamente proporzionale a ℓ , mentre il tempo di discesa ne è direttamente proporzionale. Quindi, all'aumentare di ℓ , il punto materiale subisce un'accelerazione minore per un tempo maggiore, in modo tale che la velocità finale (3.29) resti invariata.

Il piano inclinato consente di sollevare una massa di un'altezza h applicando una forza minore del peso della massa in questione; infatti per portare un punto materiale di massa m dalla base alla sommità di un piano inclinato basta applicare una forza di modulo almeno uguale alla \mathbf{F} di figura 3.2, e quindi tanto minore quanto è piccolo α . Per questo motivo il piano è spesso considerato una **macchina**, cioè un dispositivo in grado di alleviare o comunque semplificare il lavoro umano. Poiché si tratta di una macchina elementare non ulteriormente scomponibile, viene detta **macchina semplice**. Nel seguito si studieranno altre macchine semplici.

⁸ Alle relazioni (3.26) si arriva anche senza l'utilizzo delle funzioni goniometriche osservando che il triangolo rettangolo formato da \mathbf{F}_p ed \mathbf{F} e quello formato dal piano inclinato sono simili.

3.7 FORZA DI ATTRITO RADENTE.

Se la superficie non è liscia occorre tenere conto della *forza di attrito radente*⁹. In questo caso la superficie è detta **scabra**. Questa situazione è quella con cui si ha sempre a che fare nelle situazioni reali: per quanto una superficie possa essere levigata, l'attrito non è mai nullo; sapere come tenerne conto è quindi importante se si vuole che la descrizione teorica del moto sia in buon accordo con l'osservazione sperimentale.

L'attrito radente fra due superfici è dovuto alle forze intermolecolari che si esercitano nei punti in cui le due superfici sono in contatto molto stretto.

La forza di attrito si manifesta in due situazioni che vengono qui analizzate separatamente.

3.7.1 ATTRITO RADENTE STATICO.

Si consideri un punto materiale P di massa m fermo su di una superficie orizzontale scabra e si applichi su di esso un forza orizzontale \mathbf{F} . Se il modulo della forza \mathbf{F} è troppo piccolo il punto materiale P resta fermo perché la superficie esercita una forza di attrito \mathbf{F}_s , detto *statico*, che si oppone al moto di P . In questo caso, su P agiscono quattro forze: il peso \mathbf{F}_p , la reazione vincolare perpendicolare \mathbf{N} , la forza \mathbf{F} e la forza di attrito statico \mathbf{F}_s ; poiché P resta fermo deve valere

$$\mathbf{F}_p + \mathbf{N} + \mathbf{F} + \mathbf{F}_s = \mathbf{0} \quad (3.31)$$

Riscrivendo questa relazione vettoriale per componenti (in figura 3.3, per semplicità, non sono stati rappresentati gli assi cartesiani), si trova

$$\begin{cases} -mg + N = 0 \\ F - F_s = 0 \end{cases} \quad (3.32)$$

L'attrito statico è quindi in modulo uguale alla forza orizzontale applicata.

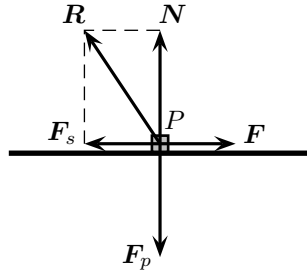


Figura 3.3: L'attrito radente statico.

La reazione vincolare esplicitata da una superficie scabra quindi ha, oltre che la componente \mathbf{N} perpendicolare alla superficie, già presente nel caso di vincolo liscio, anche una componente parallela \mathbf{F}_s ; la risultante viene indicata con il simbolo \mathbf{R} , si veda la figura 3.3, e vale:

$$\mathbf{R} = \mathbf{N} + \mathbf{F}_s \quad (3.33)$$

Aumentando il modulo di \mathbf{F} il punto materiale finisce per mettersi in movimento; quindi l'attrito radente statico ha un valore massimo F_s^M il cui valore dipende dall'aderenza delle superfici a contatto: è tanto maggiore quanto più esse aderiscono. F_s^M è quindi proporzionale alla forza con cui P preme sulla superficie scabra; questa, d'altra parte, per il principio di azione e reazione, è uguale a \mathbf{N} ; vale quindi

$$F_s^M = \mu_s N \quad (3.34)$$

⁹ L'aggettivo radente si riferisce a quel tipo particolare di attrito che si manifesta fra due superfici che scorrono una sull'altra. Nel seguito si vedranno altri tipi di attrito.

ove μ_s è una costante adimensionale, che dipende dalle caratteristiche delle due superfici a contatto, ed è detta **coefficiente di attrito statico**. Si noti che l'equazione precedente *non* è una relazione vettoriale: i vettori \mathbf{N} e \mathbf{F}_s^M , avendo direzioni diverse, non sono proporzionali; sono proporzionali solo i loro moduli. Nel caso in cui la forza di attrito statico sia massima anche la reazione vincolare è massima e viene indicata con \mathbf{R}^M , figura 3.4a. Il coefficiente di attrito

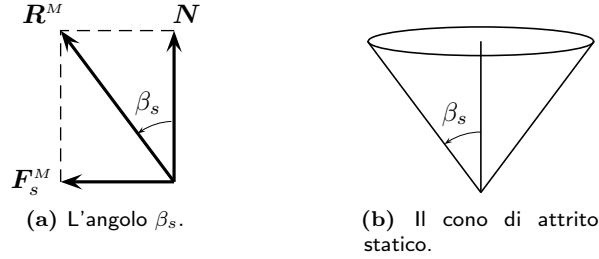


Figura 3.4: La reazione vincolare nel caso di superficie scabra.

statico ha un interessante significato geometrico; è infatti uguale alla tangente dell'angolo β_s formato da \mathbf{R}^M ed \mathbf{N} :

$$\mu_s = \frac{F_s^M}{N} = \operatorname{tg} \beta_s. \quad (3.35)$$

Questo è l'angolo massimo entro il quale vi può essere una reazione vincolare statica. La reazione vincolare \mathbf{R} si trova quindi necessariamente all'interno di un cono di apertura β_s , detto **cono di attrito statico**.

3.7.2 ATTRITO RADENTE DINAMICO.

Se la forza \mathbf{F} applicata è maggiore del valore massimo F_s^M che l'attrito statico può esplicare, il punto materiale si mette in movimento; è esperienza comune che per mantenerlo in movimento è necessario continuare ad applicare una forza altrimenti il corpo si ferma dopo pochi istanti. Vi è quindi una forza di attrito \mathbf{F}_d , detto *dinamico* o talvolta *cinetico*, anche se P è in moto. La forza di attrito dinamico è costante e dipende anch'essa dall'aderenza fra le due superfici, vale quindi una relazione simile alla (3.34):

$$F_d = \mu_d N. \quad (3.36)$$

La costante adimensionale μ_d è detta **coefficiente di attrito dinamico** e dipende dalle caratteristiche delle superfici a contatto.

Si verifica sperimentalmente che la forza che è necessario applicare per mettere P in movimento è maggiore di quella necessaria a mantenerlo in movimento con velocità costante; questo significa che $F_s^M > F_d$ e quindi, qualsiasi sia la coppia delle superfici a contatto, il coefficiente di attrito statico è sempre maggiore di quello dinamico, cioè vale

$$\mu_s > \mu_d. \quad (3.37)$$

3.8 FILI E MOLLE.

Su di un punto materiale possono venire applicate delle forze per mezzo di dispositivi diversi; i più semplici sono i fili e le molle descritti in questa sezione.

3.8.1 FILO IDEALE.

Un **filo** è un corpo materiale ideale perfettamente flessibile, inestensibile e di massa nulla avente una sezione trascurabile tale da poter essere considerato unidimensionale. Il filo, se opportunamente

fissato ad un corpo, consente di esercitare una forza di *trazione* senza entrare direttamente in contatto con il corpo. Si consideri, come in figura 3.5a, un punto materiale P cui è attaccato un filo alla cui altra estremità A è applicata una forza \mathbf{F}_1 . Con riferimento alla figura 3.5b, si

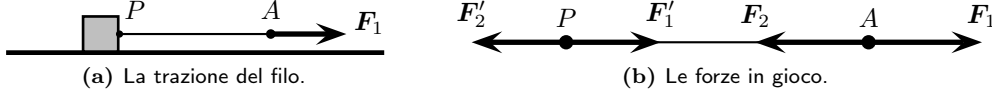


Figura 3.5: Un filo ideale.

considerino le forze in gioco: per il principio di azione e reazione, il filo reagisce alla forza di \mathbf{F}_1 con la forza uguale e contraria \mathbf{F}_2 . Il filo, inoltre, *tira* il punto P con una forza indicata con \mathbf{F}'_1 ; il punto P reagisce ancora con una forza uguale e contraria \mathbf{F}'_2 . Valgono quindi

$$\mathbf{F}_1 = -\mathbf{F}_2 \quad , \quad \mathbf{F}'_1 = -\mathbf{F}'_2 . \quad (3.38)$$

Si consideri ora la forza totale $\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}'_2$ agente sul filo; per la legge fondamentale della dinamica deve valere

$$\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}'_2 = m_f \mathbf{a} \quad (3.39)$$

ove m_f è la massa del filo e \mathbf{a} la sua accelerazione. Ma il filo ideale che qui si sta usando ha massa nulla quindi

$$\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}'_2 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbf{F}_1 = -\mathbf{F}'_2 \quad (3.40)$$

Usando le relazioni (3.38), si ottengono pertanto

$$\mathbf{F}_1 = \mathbf{F}'_1 \quad \text{e} \quad \mathbf{F}_2 = -\mathbf{F}'_1 \quad (3.41)$$

La prima di queste relazioni dice che il filo esercita un'azione di trazione con una forza uguale a quella applicata su di esso. La seconda dice che il filo esercita forze di ugual modulo a entrambi i suoi estremi. Questa forza esercitata dal filo sui corpi cui esso si trova collegato è detta **tensione** del filo e viene solitamente indicato con il simbolo τ . Si osservi che le forze qui considerate hanno tutte lo stesso modulo, vale cioè

$$F_1 = F'_1 = F_2 = F'_2 = \tau . \quad (3.42)$$

3.8.2 MOLLA IDEALE.

Una **molla ideale** è un dispositivo di massa nulla che, se compresso o allungato, esercita una forza di richiamo il cui modulo è proporzionale alla deformazione ma ha il verso opposto.

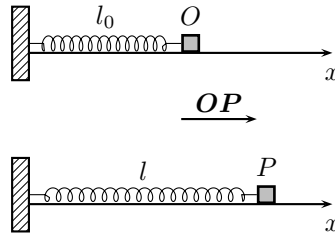


Figura 3.6: Una molla ideale.

Si consideri quindi una molla di massa trascurabile con un estremo fissato mentre l'altro, libero di muoversi, sia collegato ad un punto materiale di massa m ; sia inoltre l_0 la lunghezza della molla a riposo. Se la molla viene deformata fino ad una nuova lunghezza l , essa sviluppa una forza di richiamo che tende a riportarla nella posizione di riposo.

Si riferisca il moto ad un asse delle ascisse disposto nella direzione della molla e con origine O nella posizione di riposo; quando il punto materiale si trova nella posizione P il vettore spostamento di

OP ha modulo $\Delta x = |l - l_0|$. In figura 3.6 è rappresentato il caso in cui la molla è allungata rispetto alla sua posizione di riposo; perfettamente analoga è la discussione del caso in cui la molla venga compressa. La forza di richiamo esercitata dalla molla è detta **forza elastica**; è sempre diretta verso il punto O di riposo della molla, ed è data da

$$\boxed{\mathbf{F}_{el} = -k \mathbf{OP}} . \quad (3.43)$$

La costante di proporzionalità k è detta **costante elastica** della molla e dipende dal tipo dalle caratteristiche della molla in questione; la sua unità di misura è N m^{-1} .

Sotto l'azione della forza di richiamo della molla, il punto materiale P di massa m subisce l'accelerazione \mathbf{a} data da:

$$\mathbf{a} = \frac{\mathbf{F}_{el}}{m} = -\frac{k}{m} \mathbf{OP} \quad (3.44)$$

Confrontando questa equazione con la (2.134), si vede che il moto di P è armonico con pulsazione

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (3.45)$$

e con centro nel punto di riposo della molla; la legge del moto è quindi data dalla (2.135) e il suo periodo vale

$$\boxed{T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}} . \quad (3.46)$$

Le molle reali, oltre ad avere massa non nulla, esercitano una forza di richiamo data dalla (3.43) solo per deformazioni non troppo grandi; inoltre se allungate oltre una certa lunghezza limite si deformano permanentemente e perdono il comportamento elastico.

3.8.3 IL DINAMOMETRO.

Lo strumento utilizzato per misurare l'intensità (cioè il modulo) di una forza è detto *dinamometro*. La sua descrizione viene riportata qui, e non nel paragrafo in cui sono state introdotte le forze, perché il suo funzionamento è basato su di una molla.

Si consideri una molla di costante elastica nota k con un estremo fissato mentre sull'altro estremo sia applicata una forza di intensità ignota \mathbf{F} ; la molla si allunga fino a che la forza elastica di richiamo \mathbf{F}_{el} non eguaglia la forza applicata. Poiché, come si è visto poco sopra, la forza di richiamo ha modulo proporzionale alla deformazione; si ottiene facilmente

$$F = F_{el} = k\Delta x . \quad (3.47)$$

La misura della deformazione Δx , dunque, consente la determinazione di F .

3.9 CARRUCOLE.

Oltre al piano inclinato, un'altra macchina semplice molto importante è la **carrucola fissa** ideale. Si tratta di un dispositivo meccanico di massa nulla costituito da una rotella capace di ruotare senza attrito attorno al proprio asse e dotata di una scanalatura dentro cui passa il filo. Viene utilizzata per deviare la retta di trazione del filo come in figura 3.7a e non modifica la tensione del filo. La carrucola può essere impiegata per lo studio del moto uniformemente accelerato.

Si consideri infatti una carrucola a cui siano appesi due punti materiali P_1 e P_2 aventi masse diverse m_1 ed m_2 , come in figura 3.7b.

Rispetto ad un asse di riferimento y orientato verso il basso (non rappresentato in figura), la legge fondamentale della dinamica per i due punti materiali si scrive

$$\begin{cases} m_1 a_1 = m_1 g - \tau \\ m_2 a_2 = m_2 g - \tau \end{cases} . \quad (3.48)$$

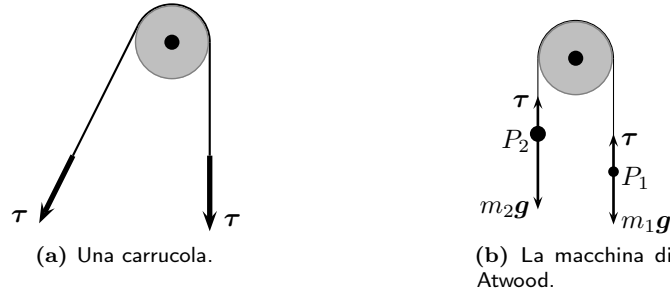


Figura 3.7: Carrucole.

La tensione τ , per quanto detto sopra, è la stessa in ogni punto del filo. Poiché il filo è inestensibile, i due punti materiali si muovono con accelerazione di ugual modulo ma verso opposto, supponendo quindi che P_1 salga e P_2 scenda si ha

$$a_2 = -a_1 = a . \quad (3.49)$$

La (3.48) diventa

$$\begin{cases} -m_1 a = m_1 g - \tau \\ m_2 a = m_2 - \tau \end{cases} . \quad (3.50)$$

che risolta fornisce il valore dell'accelerazione e della tensione:

$$\begin{cases} a = \frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1} g \\ \tau = \frac{2m_1 m_2}{m_1 + m_2} g \end{cases} . \quad (3.51)$$

Come si vede, l'accelerazione cambia segno, e quindi P_1 scende e P_2 sale, se $m_1 > m_2$. Il moto dei due punti materiali è uniformemente accelerato e il modulo a dell'accelerazione ha, come può verificare con il calcolo il lettore studioso, il seguente intervallo di validità:

$$0 < a < g , \quad (3.52)$$

scegliendo adeguatamente le due masse, quindi, è possibile verificare sperimentalmente le proprietà del moto uniformemente accelerato, per diversi valori di a . Il dispositivo qui descritto è noto con il nome di **macchina di Atwood**¹⁰.

3.9.1 CARRUCOLA MOBILE.

Combinando insieme due carrucole nel modo descritto in questo paragrafo si ottiene una macchina complessa particolarmente vantaggiosa detta **carrucola mobile**. Consiste di una carrucola fissata al soffitto mentre una seconda carrucola, di massa trascurabile, è tenuta sospesa dal filo che passa nella prima e va a fissarsi anch'esso al soffitto, come illustrato in figura 3.8. Questa seconda carrucola è *mobile* e ad essa, tramite un gancio fissato nel suo centro, si appende il carico da sollevare. Le forze agenti sul carico di massa m sono la forza peso e le due tensioni dei fili. Ricordando che il filo presenta la stessa tensione in ogni suo punto, facendo riferimento ad un asse verticale volto verso il basso l'equazione (3.12) per il carico si scrive

$$ma = mg - 2\tau \quad (3.53)$$

La forza minima necessaria a sollevare il carico è quella che lo solleva con una velocità costante cioè con accelerazione nulla: ciò accade per

$$a = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \tau = \frac{1}{2} mg . \quad (3.54)$$

¹⁰ George Atwood (1745–1807), matematico inglese.

Il filo, d'altra parte, è tenuto in tensione dalla forza \mathbf{F} applicata al capo libero; vale quindi

$$F = \tau . \quad (3.55)$$

Pertanto la forza necessaria a sollevare il carico con velocità costante è

$$F = \frac{1}{2}mg \quad (3.56)$$

uguale a metà del peso del carico.

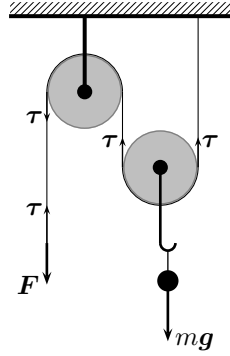


Figura 3.8: Una carrucola mobile.

La carrucola mobile è un dispositivo particolarmente conveniente per sollevare grandi pesi; infatti la forza da applicare all'estremità libera del filo è la metà della forza peso del carico. L'unico svantaggio è che per sollevare il carico di un'altezza h occorre tirare una lunghezza $2h$ di filo.

Aumentando il numero di carrucole fisse, come in figura 3.9 ove vi sono due carrucole fisse e una mobile, il vantaggio aumenta; nel caso raffigurato la forza necessaria a sollevare il carico è un terzo del suo peso (e per sollevarlo di h occorre tirare $3h$ di filo). Una macchina di questo tipo è detta **paranco**.

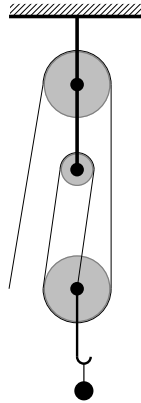


Figura 3.9: Un paranco.

In figura 3.9, per chiarezza rappresentativa, le due carrucole fisse sono di raggio diverso; nella pratica non solo esse hanno lo stesso raggio ma sono solitamente disposte sullo stesso asse di rotazione.

3.10 PENDOLO SEMPLICE.

Si consideri un punto materiale P di massa m sospeso tramite un filo ideale di lunghezza ℓ ; una simile configurazione si dice **pendolo semplice**. Su P agiscono due forze: il peso \mathbf{F}_p e la tensione τ del filo, come in figura 3.10. Poiché la tensione del filo equilibra la componente del peso parallela al filo, la risultante \mathbf{F} delle forze agenti su P è la componente del peso perpendicolare al filo. Il modulo di \mathbf{F} dipende dall'angolo α formato dal filo con la verticale.

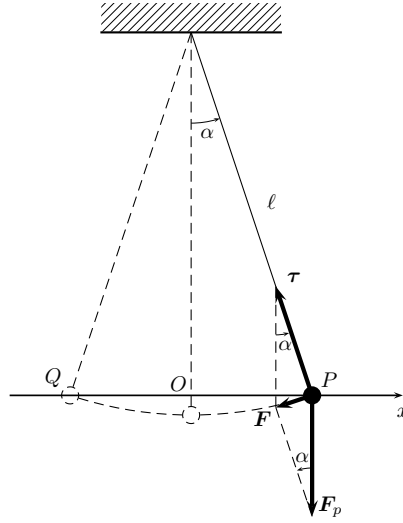


Figura 3.10: Il pendolo semplice.

Nell'ipotesi che tale angolo sia piccolo, dell'ordine di qualche grado, la traiettoria percorsa da P è con buona approssimazione rettilinea, cioè l'arco \widehat{PQ} è ben approssimato dalla corda PQ . In figura 3.10, per chiarezza di rappresentazione, è stato disegnato un angolo troppo grande perché l'approssimazione sia ragionevole. L'approssimazione per piccoli angoli è usualmente detta per **piccole oscillazioni**.

In tale approssimazione, dunque, il punto materiale P oscilla lungo il segmento PQ lungo il quale si considera un asse delle ascisse. La posizione del punto materiale è quindi individuata dalla sua ascissa x .

Per determinare il modulo della forza risultante \mathbf{F} si osservi che valgono le relazioni

$$F = F_p \sin \alpha \quad , \quad \sin \alpha = \frac{x}{\ell} . \quad (3.57)$$

Vale quindi

$$F = \frac{F_p}{\ell} x . \quad (3.58)$$

Tenendo conto del fatto che i vettori \mathbf{F} e \mathbf{OP} hanno in ogni istante la stessa direzione, ma verso opposto, la precedente relazione può essere scritta nella forma vettoriale

$$\mathbf{F} = -\frac{F_p}{\ell} \mathbf{OP} ; \quad (3.59)$$

ora, tenuto conto della legge fondamentale della dinamica $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ e che $F_p = mg$, dalla precedente equazione si ottiene

$$m\mathbf{a} = -\frac{mg}{\ell} \mathbf{OP} \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbf{a} = -\frac{g}{\ell} \mathbf{OP} . \quad (3.60)$$

Ricordando l'equazione (2.134), si riconosce che il moto di P è un moto *armonico* con pulsazione e periodo dati da

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{\ell}} \quad , \quad \boxed{T = 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g}}} . \quad (3.61)$$

Si noti che, nell'approssimazione di piccole oscillazioni, il periodo del pendolo semplice non dipende né dalla massa del punto materiale oscillante, né dall'ampiezza delle oscillazioni. Questa proprietà, notata per la prima volta da Galilei (si veda [2] pagina 93), è detta **isocronismo delle piccole oscillazioni**.

3.11 FORZA CENTRIPETA.

Se un punto materiale P di massa m si muove di moto circolare uniforme di centro O , come visto nella sezione 2.5, la sua accelerazione è centripeta di modulo

$$a_c = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r \quad (3.62)$$

ove r è il raggio della traiettoria circolare, v il modulo della velocità ed ω la velocità angolare. Secondo la legge fondamentale della dinamica, P è dunque sottoposto ad una forza diretta verso il centro di modulo $F = ma_c$ detta *forza centripeta* \mathbf{F}_c . In forma vettoriale si scrive

$$\mathbf{F}_c = -m \frac{v^2}{r^2} \mathbf{OP} = -m\omega^2 \mathbf{OP} . \quad (3.63)$$

3.12 DINAMICA DEI MOTI RELATIVI.

A questo punto della trattazione è possibile riprendere il discorso sui moti relativi cominciata nella sezione 2.8. Lì si è visto come un sistema di riferimento S' in moto rototraslatorio rispetto ad un sistema S misuri accelerazioni diverse. Il sistema S' non è un sistema inerziale, quindi per esso non vale la legge fondamentale della dinamica. Qui si vuole indagare quali modifiche occorre apportare alla (3.12) in un sistema non inerziale.

Si consideri la (2.174) e la si moltiplichi per la massa m del punto materiale P di cui si sta studiando il moto; si trova

$$m\mathbf{a}_p = m\mathbf{a}_{o'} + m\mathbf{a}'_p + 2m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}'_p - m\omega^2 \mathbf{OP} . \quad (3.64)$$

Nel sistema inerziale S vale la seconda legge di Newton: $\mathbf{F} = m\mathbf{a}_p$; nel sistema S' non inerziale invece il prodotto $m\mathbf{a}'_p$ non è uguale alla forza bensì, come si vede utilizzando l'equazione precedente,

$$m\mathbf{a}'_p = \mathbf{F} - m\mathbf{a}_{o'} - 2m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}'_p + m\omega^2 \mathbf{OP} . \quad (3.65)$$

In S' quindi, alla forza realmente agente \mathbf{F} si aggiungono alcuni termini dovuti alla accelerazione di S' rispetto a S . Questi termini sono percepiti nel sistema S' come forze che vanno ad aggiungersi alla forza reale \mathbf{F} , pur non essendo reali; per questo motivo si usa riferirsi ad essi con il nome di **forze apparenti**. Si esaminino uno alla volta.

Il termine $-m\mathbf{a}_{o'}$ compare quando S' si muove di moto traslatorio accelerato rispetto a S .

Il termine $-2m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}'_p$ compare quando S' si muove di moto rotatorio rispetto a S e P si muove in S' ; questo termine è noto con il nome di **forza di Coriolis**¹¹.

Il termine $+m\omega^2 \mathbf{OP}$ compare quando S' si muove di moto rotatorio rispetto a S indipendentemente dal moto di P ; questo è noto con il nome di **forza centrifuga**.

Si considerino i seguenti esempi.

a) L'ascensore accelerato.

Sia S' fissato solidale ad un ascensore che si muova di moto traslatorio con accelerazione $\mathbf{a}_{o'}$ rispetto ad O ; in tal caso $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}$ vale allora

$$m\mathbf{a}'_p = \mathbf{F} - m\mathbf{a}_{o'} . \quad (3.66)$$

Se P è un punto materiale di massa m che viene lasciato cadere liberamente all'interno dell'ascensore, evidentemente $\mathbf{F} = m\mathbf{g}$, quindi

$$\mathbf{a}'_p = \mathbf{g} - \mathbf{a}_{o'} . \quad (3.67)$$

¹¹ Gaspard-Gustave de Coriolis (1792–1843), matematico, fisico e ingegnere francese.

L'accelerazione di caduta misurata all'interno dell'ascensore è minore di \mathbf{g} se l'ascensore è accelerato verso il basso e maggiore di \mathbf{g} se l'ascensore è accelerato verso l'alto. Tale variazioni dell'accelerazione di caduta sono percepite da chi si trovasse nell'ascensore come variazioni di peso.

Nel caso particolare in cui l'ascensore sia in caduta libera, vale $\mathbf{a}_{o'} = \mathbf{g}$ e quindi

$$\mathbf{a}_p = \mathbf{0} . \quad (3.68)$$

Il punto P se lasciato con velocità nulla, avendo (in S') accelerazione nulla, resta fermo. Si tratta del ben noto fenomeno dell'assenza di peso nei sistemi di riferimento in caduta libera, per esempio nei satelliti orbitanti. b) **La piattaforma rotante.**

Sia S' solidale ad una piattaforma di centro O rotante con velocità angolare costante $\boldsymbol{\omega}$ e sia P un punto materiale appoggiato sulla piattaforma e non altrimenti vincolato; allora $\mathbf{a}_{o'} = \mathbf{0}$, $\mathbf{v}'_p = \mathbf{0}$ e $\mathbf{F} = \mathbf{0}$. In questo caso è presente la sola forza centrifuga

$$m\mathbf{a}'_p = m\omega^2\mathbf{OP} ; \quad (3.69)$$

Il punto P si muove quindi con velocità \mathbf{v}'_p verso il bordo della piattaforma, comincia allora ad agire la forza di Coriolis \mathbf{F}_{co} la quale essendo perpendicolare alla velocità induce traiettorie approssimativamente circolari (tale circolarità sarebbe perfetta se non fosse presente simultaneamente anche la forza centrifuga).

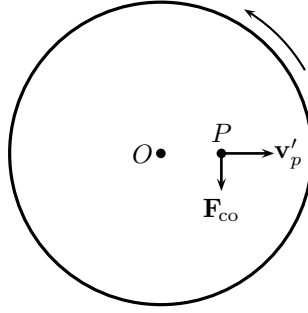


Figura 3.11: La forza di Coriolis sulla piattaforma rotante.

La forza centrifuga ha un importante ruolo nella variabilità dell'accelerazione di gravità con la latitudine, come si vedrà nel prossimo capitolo.

La forza di Coriolis è responsabile dei moti circolari dei fluidi in moto sulla superficie terrestre. Esempi importanti sono il moto dei venti alisei nella zona tropicale e la formazione di cicloni.

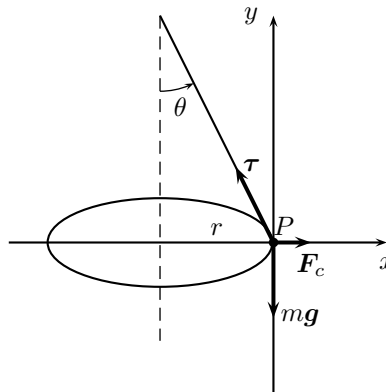


Figura 3.12: Il pendolo conico.

c) **Pendolo conico.** Si tratta di un pendolo semplice costituito da un punto materiale P di massa m sospeso tramite un filo di lunghezza ℓ e posto in rotazione su una traiettoria circolare di

raggio r in modo che il filo formi con la verticale nel punto di sospensione l'angolo costante θ . Vale quindi

$$r = \ell \sin \theta . \quad (3.70)$$

Lasciando al lettore studioso la soluzione del problema dinamico in un sistema inerziale, si affronta qui il medesimo problema nel sistema rotante avente l'origine in P , l'asse y verticale e orientato verso l'alto e l'asse x orientato come il vettore (rotante) \mathbf{OP} . In tale sistema di riferimento P è fermo quindi la risultante delle forze reali più le forze apparenti è nulla, quindi

$$m\mathbf{g} + \boldsymbol{\tau} + m\omega^2\mathbf{r} = \mathbf{0} . \quad (3.71)$$

Scrivendo questa equazione per componenti si trova

$$\begin{cases} -\tau \sin \theta + m\omega^2 r = 0 \\ \tau \cos \theta - mg = 0 \end{cases} \quad (3.72)$$

Usando la (3.70) si trova, dalla prima

$$\tau = m\omega^2 \ell \quad (3.73)$$

e dalla seconda

$$\cos \theta = \frac{g}{\omega^2 \ell} \quad (3.74)$$

che è il legame fra la velocità angolare di rotazione e l'ampiezza dell'angolo θ : all'aumentare di ω $\cos \theta$ diminuisce e quindi θ aumenta. Detto in altri termini, il periodo T di rotazione del pendolo conico dipende dall'angolo θ e vale

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\ell \cos \theta}{g}} \quad (3.75)$$

che, per $\theta = 0$, è in accordo con la (3.61).

3.13 PRINCIPIO DI RELATIVITÀ.

Se l'osservatore O' si muove rispetto all'osservatore O di moto rettilineo ed uniforme vale la (2.163) con $\mathbf{a}_{O'} = \mathbf{0}$, quindi i due osservatori misurano per il punto materiale P la stessa accelerazione; vale cioè, in ogni istante,

$$\mathbf{a}_p = \mathbf{a}'_p . \quad (3.76)$$

Quindi, se O è un osservatore inerziale per cui vale la legge fondamentale della dinamica, (3.12) lo è anche O' , cioè

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}_p \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbf{F} = m\mathbf{a}'_p . \quad (3.77)$$

Quindi anche O' è un osservatore inerziale.

Come conseguenza di quanto detto si osservi che se due sistemi sono in moto reciproco rettilineo ed uniforme significa che essi sono o entrambi inerziali oppure hanno la stessa accelerazione rispetto ad un sistema inerziale: in entrambi i casi, come visto, misurano esattamente le stesse accelerazioni. Pertanto per essi la legge fondamentale della dinamica è la stessa. In particolare, se i due sistemi di riferimento sono inerziali la legge vale nella sua forma (3.12), mentre se i due sistemi non sono inerziali occorre introdurre delle forze apparenti.

Questo fatto ha una grande generalità e non restringe la sua validità alla sola legge della dinamica ma si estende a qualunque legge della fisica. Esso è noto con il nome di **principio di relatività** e si enuncia come segue.

Le leggi che descrivono l'evoluzione di un qualunque sistema fisico sono le stesse se riferite a due sistemi di riferimento che si muovano uno rispetto all'altro di moto rettilineo ed uniforme.

Il primo luogo ove il principio di relatività appare enunciato¹² è il famoso brano del *gran navilio* (si veda [6], pagg. 227-229)

Il principio di relatività ha delle immediate ricadute sperimentali. Infatti, come sua conseguenza, si può concludere che qualunque esperimento dà lo stesso risultato se viene eseguito in due sistemi di riferimento in moto reciproco rettilineo ed uniforme. Questo implica che non vi è alcun modo di distinguere un sistema di riferimento dall'altro. Due sistemi di riferimento inerziali sono quindi, oltre che *fisicamente equivalenti*, nel senso che in essi valgono le *stesse* leggi fisiche, anche *sperimentalmente indistinguibili*.

3.14 STATICA DEL PUNTO MATERIALE.

La statica è quella parte della meccanica che studia le condizioni per le quali un sistema fisico è in **equilibrio**.

Si dice che un punto materiale P è in equilibrio, quando la sua velocità è nulla e rimane nulla nonostante su di esso siano applicate delle forze. Dal principio d'inerzia è noto che la velocità di un punto materiale rimane invariata se su di esso non agiscono forze o, meglio, se la somma delle forze agenti su di esso è il vettore nullo. In questo caso, se la velocità iniziale di P è zero essa continua a rimanere zero, cioè il punto materiale rimane fermo.

Quanto detto si può riassumere nella seguente definizione.

Un punto materiale è in una posizione di equilibrio se e solo se si trova in tale posizione con velocità nulla e la somma delle forze agenti su di esso è nulla.

Quindi vi è equilibrio se e solo se valgono le seguenti condizioni.

$$\boxed{v_0 = 0 \quad , \quad F_{tot} = 0} \quad (3.78)$$

Una posizione di equilibrio si può distinguere nelle tre situazioni seguenti.

1. *Equilibrio stabile*. Si ha quando, spostando di sufficientemente poco P dalla posizione di equilibrio, esso tende a ritornarvi.
2. *Equilibrio instabile*. Si ha quando, spostando di quanto poco si voglia P dalla posizione di equilibrio, esso se ne allontana.
3. *Equilibrio indifferente*. Si ha quando spostando di sufficientemente poco P dalla posizione di equilibrio, esso si trova in una nuova posizione di equilibrio.



Figura 3.13: I tre tipi di equilibrio.

Un esempio del primo tipo si ha quando un punto materiale è posto nel punto in cui una superficie liscia forma un avvallamento, figura 3.13a; uno del secondo tipo si ha quando il punto materiale è posto sulla sommità di un dosso, figura 3.13b; uno del terzo si ha quando il punto materiale è posto su di un piano orizzontale, figura 3.13c.

¹² Benché se ne possa trovare una traccia già nell'*Ottica* di *Euclide*, si vedano le proposizioni 50-57, [1] pagg. 2102-2113.

INTERMEZZO. IL PENDOLO DI FOUCAULT.

In un sistema di riferimento inerziale il piano di oscillazione di un pendolo semplice resta invariato; in un sistema rotante ciò non accade. Si consideri, per esempio, come sistema di riferimento rotante la Terra. Un osservatore, solidale alla Terra rotante, che osservi le oscillazioni di un pendolo posto su uno dei due poli terrestri vede il piano di oscillazione compiere un giro completo in circa 24 ore; effettuando lo stesso esperimento all'equatore non si osserva alcuna variazione del piano di oscillazione. L'effetto quindi dipende dalla latitudine λ alla quale l'esperimento viene eseguito.

Per esaminare più in dettaglio cosa accade, conviene scegliere un sistema di riferimento non inerziale avente origine nel punto P di latitudine λ come in figura 3.14; si scelga quindi l'asse z sulla verticale di P e gli assi x e y tangenti alla superficie terrestre in P (in figura l'asse y è entrante nel foglio); siano inoltre $\hat{i}', \hat{j}', \hat{k}'$ i versori dei tre assi. Sul pendolo di massa m e lunghezza ℓ , quindi, oltre alla forza peso, agisce la forza di Coriolis:

$$\mathbf{F}_c = -2m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} , \quad (3.79)$$

ove $\boldsymbol{\omega}$ è la velocità angolare della rotazione terrestre, e \mathbf{v} è la velocità del pendolo nel sistema rotante.

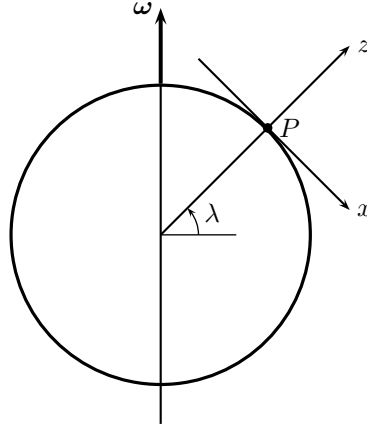


Figura 3.14: Il sistema di riferimento non inerziale.

Con riferimento alla figura 3.14, e nell'approssimazione di piccole oscillazioni, $\boldsymbol{\omega}$ si trova nel piano xz , mentre \mathbf{v} si trova nel piano xy , cioè

$$\boldsymbol{\omega} = \omega_x \hat{i}' + \omega_z \hat{k}' , \quad \mathbf{v} = v_x \hat{i}' + v_y \hat{j}' \quad (3.80)$$

e quindi, ricordando la (2.77), le tre componenti della forza di Coriolis diventano

$$\begin{aligned} F_{cx} &= -2m(\omega_y v_z - \omega_z v_y) = +2m\omega_z v_y \\ F_{cy} &= -2m(\omega_z v_x - \omega_x v_z) = -2m\omega_z v_x \\ F_{cz} &= -2m(\omega_x v_y - \omega_y v_x) = -2m\omega_x v_y . \end{aligned} \quad (3.81)$$

Nell'ipotesi di piccole oscillazioni, il moto del pendolo avviene nel piano xy ; le componenti dell'equazione fondamentale della dinamica per il pendolo (3.60), con l'aggiunta della forza di Coriolis, rilevanti per lo studio del moto sono quindi:

$$\begin{aligned} ma_x &= -m\frac{g}{\ell}x + 2m\omega_z v_y \\ ma_y &= -m\frac{g}{\ell}y - 2m\omega_z v_x . \end{aligned} \quad (3.82)$$

Ponendo

$$\Omega^2 = \frac{g}{\ell} , \quad (3.83)$$

semplificando la massa e introducendo la notazione di Newton, si ottiene

$$\begin{cases} \ddot{x} = -\Omega^2 x + 2\omega_z \dot{y} \\ \ddot{y} = -\Omega^2 y - 2\omega_z \dot{x} \end{cases} \quad (3.84)$$

Questo è un sistema di equazioni differenziali del secondo ordine, la cui soluzione richiede le tecniche dell'analisi e quindi va al di là dei limiti di questi appunti. Ci si limita quindi a darne la soluzione più generale nel caso in cui la velocità iniziale sia nulla:

$$\begin{cases} x(t) = A \left[\cos(\omega_z t - \theta) \cos \sqrt{\Omega^2 + \omega_z^2} t + \right. \\ \quad \left. + \frac{\omega_z}{\sqrt{\Omega^2 + \omega_z^2}} \sin(\omega_z t - \theta) \sin \sqrt{\Omega^2 + \omega_z^2} t \right] \\ y(t) = A \left[-\sin(\omega_z t - \theta) \cos \sqrt{\Omega^2 + \omega_z^2} t + \right. \\ \quad \left. + \frac{\omega_z}{\sqrt{\Omega^2 + \omega_z^2}} \cos(\omega_z t - \theta) \sin \sqrt{\Omega^2 + \omega_z^2} t \right] . \end{cases} \quad (3.85)$$

Il parametro θ è stato introdotto per rappresentare in modo compatto la posizione iniziale, vale infatti

$$x(0) = A \cos \theta \quad , \quad y(0) = A \sin \theta . \quad (3.86)$$

Per analizzare questa soluzione conviene fare un'approssimazione. Si osservi che vale

$$\omega_z = \omega \sin \lambda = \frac{2\pi}{T_0} \sin \lambda \quad (3.87)$$

ove $T_0 = 86\,164\text{ s}$ è il tempo impiegato dalla Terra a compiere una rotazione attorno al proprio asse: circa 24 ore. Confrontando il valore di ω_z ad una latitudine media di 45° , con la pulsazione Ω di un pendolo di lunghezza $\ell = 1\text{ m}$, si trova

$$\frac{\omega_z}{\Omega} = \frac{\frac{2\pi}{T_0} \sin \lambda}{\sqrt{\frac{g}{\ell}}} \simeq 1.6 \times 10^{-5} . \quad (3.88)$$

Quindi nella (3.85), i secondi addendi di entrambi le equazioni sono trascurabili rispetto ai primi, e vale l'approssimazione

$$\sqrt{\Omega^2 + \omega_z^2} \simeq \sqrt{\Omega^2} = \Omega . \quad (3.89)$$

Quindi la (3.85) diviene

$$\begin{cases} x(t) = A \cos(\omega_z t - \theta) \cos \Omega t \\ y(t) = -A \sin(\omega_z t - \theta) \cos \Omega t . \end{cases} \quad (3.90)$$

Quindi dopo un periodo $T = 2\pi/\Omega$ il pendolo non torna nella posizione iniziale (3.86) ma si trova in

$$\begin{cases} x(t) = A \cos \left(2\pi \frac{\omega_z}{\Omega} - \theta \right) \\ y(t) = -A \sin \left(2\pi \frac{\omega_z}{\Omega} - \theta \right) . \end{cases} \quad (3.91)$$

Quindi ad ogni oscillazione il pendolo si trova in una posizione ruotata rispetto alla precedente di un angolo

$$\Phi = 2\pi \frac{\omega_z}{\Omega} ; \quad (3.92)$$

per compiere una ritornare alla posizione iniziale quindi il pendolo deve compiere

$$\frac{2\pi}{\Phi} = \frac{\Omega}{\omega_z} \quad (3.93)$$

oscillazioni. Ogni oscillazione dura un tempo T , quindi il tempo in impiegato dal piano di oscillazione del pendolo a ritornare alla posizione iniziale è

$$T_F \frac{\Omega}{\omega_z} T = \frac{2\pi}{\omega_z} = \frac{2\pi}{\omega \sin \lambda} = \frac{T_0}{\sin \lambda} . \quad (3.94)$$

Alla latitudine di 45° , per esempio, vale

$$T_F = 121\,854.3 \text{ s} \quad (3.95)$$

cioè poco meno di 34 ore.

Il fenomeno qui descritto è stato usato da Foucault¹³ per dare una dimostrazione diretta del moto di rotazione della Terra.

¹³ Jean Bernard Léon Foucault (1819–1868), fisico francese.

4

GRAVITAZIONE.

L'osservazione del cielo notturno ha da sempre posto all'Uomo delle domande circa quale sia la natura del moto dei corpi celesti e come spiegare le diverse regolarità osservate. La storia dei modelli che, nel corso dei millenni, sono stati inventati per rendere conto delle osservazioni è estremamente interessante e fornisce un esempio, forse unico, di come una teoria fisica cambi nel tempo. Per questi motivi si è scelto di dare qui un breve resoconto di questa affascinante storia.

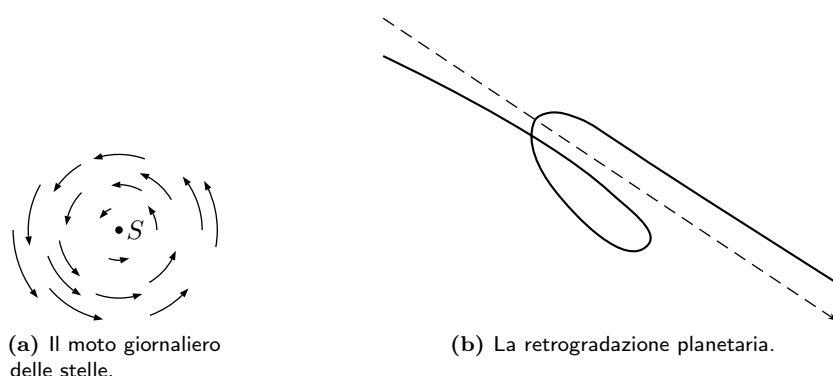


Figura 4.1: I moti dei corpi celesti.

4.1 LE OSSERVAZIONI.

I fenomeni osservati dalla Terra che richiedono una spiegazione sono i seguenti.

1. Moto quotidiano delle stelle da est verso ovest attorno al polo nord celeste, situato molto vicino ad una stella detta **polare**; il periodo di tale moto circolare è di circa 23 h 56 min 4 s.
2. Moto annuale del Sole rispetto alle stelle che avviene lungo una traiettoria, detta **eclittica**, percorsa da ovest verso est e avente il periodo di circa 365 d 6 h 9 min 9 s; nel suo moto annuale il Sole attraversa le costellazioni dello zodiaco.
3. Moto mensile della Luna che percorre un'orbita, vicina all'eclittica, da ovest a est con un periodo di circa 29 d 12 h 44 min.
4. Moto dei pianeti che percorrono un'orbita vicina all'eclittica la cui regolarità è però interrotta da periodiche **retrogradazioni** in cui invertono il verso della rotazione. In corrispondenza alle retrogradazioni i pianeti appaiono più luminosi. Mercurio e Venere, diversamente dagli altri pianeti, non si allontanano mai molto dal Sole.

In figura 4.1a è rappresentato il moto delle stelle attorno alla polare S nel corso di due ore e quaranta minuti, corrispondenti a una rotazione di 40° . In figura 4.1b è rappresentato il moto retrogrado di un pianeta attorno all'eclittica, rappresentata dalla linea tratteggiata.

4.2 I MODELLI ANTICHI.

I modelli antichi, nella descrizione dei moti celesti, si basano tutti su una composizione, più o meno complicata, di moti circolari uniformi¹ (per una richiesta che Simplicio² attribuisce a Platone³). Si elencano qui di seguito i principali.

1. Eraclide Pontico⁴ spiegò il moto giornaliero delle stelle ipotizzando per primo il moto di rotazione terrestre; ipotizzò inoltre che Mercurio e Venere ruotino intorno al Sole, diversamente dagli altri pianeti che ritenne ruotare attorno alla Terra. Questo modello, non spiega né le retrogradazioni né le variazioni di luminosità dei pianeti; ma è molto importante perché è il primo che pensa ad un moto della Terra per spiegare l'apparente moto dei corpi celesti. 2. Aristarco di

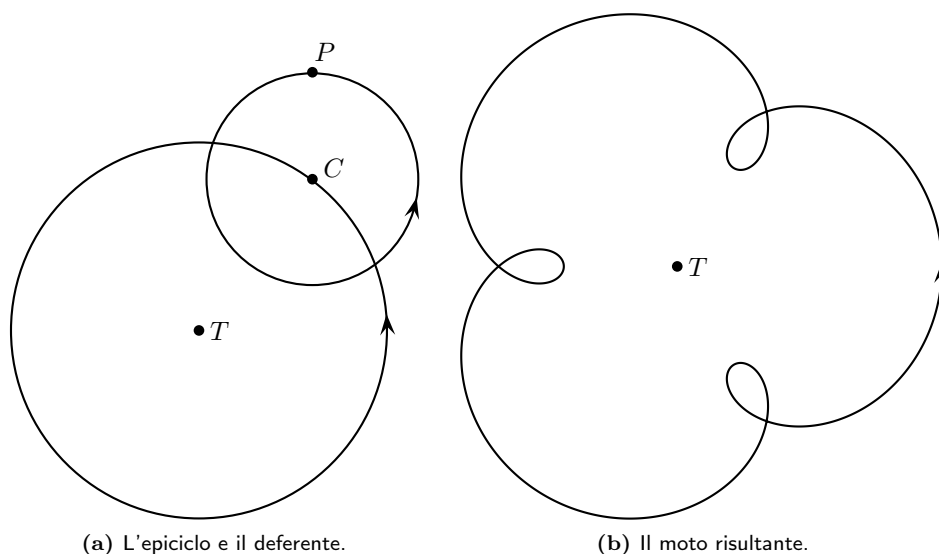


Figura 4.2: Il modello di Apollonio.

Samo⁵ costruì un modello in cui il Sole si trova al centro delle orbite di tutti i pianeti, compresa la Terra. Calcolò le grandezze del Sole e della Luna e loro distanze dalla Terra. È molto importante perché è stato il primo a costruire un modello eliocentrico.

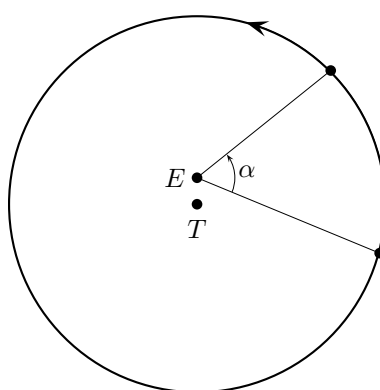


Figura 4.3: L'equante.

¹ Non si sa perché proprio moti circolari uniformi; si potrebbe però ricondurre al fatto che il compasso è uno degli strumenti fondamentali della matematica greca, si veda [8], pagina 118.

² Simplicio (~490-560), filosofo e matematico bizantino.

³ Platone (428 a.C.–348 a.C.), filosofo ateniese.

⁴ Eraclide Pontico (385-322(?) a.C.), filosofo e astronomo di Eraclea.

⁵ Aristarco di Samo (~310–230 a.C.), astronomo di Samo.

3. Apollonio di Perga⁶ ipotizzò un modello in base al quale ogni pianeta si muove di moto uniforme lungo un'orbita circolare detta **epiciclo** mentre il suo centro C si muove, a sua volta, di moto uniforme lungo un'orbita circolare detta **deferente** avente il centro sulla Terra, si veda la figura 4.2. Questo modello è fondamentale perché rende conto sia delle retrogradazioni planetarie che delle variazioni di luminosità.

4. Tolomeo⁷ è l'ultimo grande astronomo dell'antichità; introdusse una semplificazione al metodo degli epicicli per mezzo dell'**equante**; il pianeta percorre un'orbita circolare attorno alla Terra con velocità variabile; il moto è però uniforme visto da un punto E , detto appunto equante, decentrato rispetto alla posizione della Terra. Quindi, con riferimento alla figura 4.3, in tempi uguali il segmento che unisce l'equante E al pianeta percorre angoli α uguali. Il suo modello, che per descrivere completamente il moto dei corpi celesti usa 40 cerchi, è detto Sistema tolemaico ed è giunto fino a noi nell'opera *Almagesto* (termine che deriva da una parola araba che significa 'il più grande') di cui non sono disponibili traduzioni italiane, si veda [9].

4.3 I MODELLI MODERNI.

Per vedere qualcosa di paragonabile alla grande tradizione astronomica dell'antichità occorre aspettare il XVI secolo e il lavoro di Copernico⁸, che costruisce un modello eliocentrico. Usa ancora il modello a epicicli e deferenti, utilizzando in totale 34 cerchi; abbandona, in polemica con Tolomeo, l'equante. Diversamente dai modelli antichi, nei quali le orbite circolari sono semplici oggetti geometrici, i corpi celesti nel modello copernicano si muovono su sfere materiali reali. Il suo modello è presentato nel *De revolutionibus orbium caelestium*⁹ ed è diventato famoso (soprattutto grazie a Galilei che lo ha sostenuto contro il sistema tolemaico) con il nome di Sistema copernicano. Il modello tolemaico e copernicano sono *fisicamente equivalenti*. Questo significa che se si cerca di fare una previsione, per esempio sul verificarsi di un'eclissi di Sole, utilizzando uno o l'altro modello si ottengono risultati identici. Per passare da un modello all'altro, infatti, basta fare un cambio di punto di vista, cioè, nel linguaggio della fisica, un cambio di sistema di riferimento, passando da un sistema centrato sul Sole a uno centrato sulla Terra.

D'altra parte però oggi il modello copernicano è considerato migliore. Il motivo di ciò è storico e non scientifico: il modello copernicano è stato sostenuto da coloro (prima di tutti Galilei) che si misero in animo di liberare la ricerca scientifica dal pantano in cui si trovava alla fine del XVI secolo. Il grande successo scientifico di questi scienziati ha causato il successo del modello copernicano.

Oggi, quasi 400 anni dopo la morte di Galilei, è chiaro che il problema se la Terra si muova o stia ferma non è un problema ben posto. La quiete ed il moto di un corpo dipendono dal sistema di riferimento scelto.

La prima vera novità moderna viene da Kepler¹⁰ il quale, avendo a disposizione una enorme massa dati osservativi dovuti soprattutto al suo maestro Brahe¹¹ (il quale per primo si rese conto che le sfere su cui Copernico faceva muovere i suoi pianeti non potevano esistere in quanto sarebbero state attraversate dalle comete), sottopose il modello copernicano ad un rigoroso controllo osservativo. Giunse quindi ad enunciare le tre leggi che portano il suo nome e descrivono il moto dei pianeti con una semplicità e precisione mai raggiunte prima.

4.4 LE LEGGI DI KEPLER.

Tra il 1609 ed il 1618, Kepler scoprì le seguenti tre leggi¹².

1. Le orbite dei pianeti sono ellissi di cui il Sole occupa uno dei fuochi.

⁶ Apollonio di Perga (262-190 a.C.), matematico e astronomo di Perga.

⁷ Claudio Tolomeo (~100-175), astronomo e geografo di Alessandria.

⁸ Mikołaj Kopernik (1473-1543), astronomo e sacerdote polacco.

⁹ Si veda [10], ove è presente (con testo latino a fronte) il solo primo libro che contiene l'esposizione e la giustificazione delle ipotesi utilizzate da Copernico, e [11], ove si trova la traduzione italiana dell'opera completa.

¹⁰ Friedrich Johannes Kepler (1571-1630), astronomo tedesco.

¹¹ Tycho Brahe (1546-1601), astronomo danese.

¹² Le prime due compaiono nell'opera *Astronomia nova* del 1609 e la terza nell'opera *Harmonice mundi* del 1619.

2. Il vettore che unisce il Sole al pianeta spazza aree uguali in tempi uguali.
3. I quadrati dei periodi di rivoluzione dei pianeti attorno al Sole sono proporzionali ai cubi dei semiassi maggiori delle rispettive orbite.

La prima legge si commenta da sola.

La seconda dice che la velocità con cui il pianeta percorre la sua orbita ellittica non è costante ma diminuisce all'aumentare della distanza dal Sole. La situazione è illustrata in figura 4.4 ove i tre settori ellittici ombreggiati hanno la stessa area. Evidentemente, quando il pianeta è più vicino, per spazzare, nel medesimo tempo, la stessa area di quando è lontano, deve percorrere uno spazio maggiore e quindi muoversi con velocità maggiore. Il punto dell'orbita in cui il pianeta è più vicino al Sole, in cui la velocità del pianeta è massima, è detto **perielio**, mentre quello in cui è più lontano, in cui la velocità è minima, è detto **afelio**. Si usa enunciare la seconda legge di Kepler anche dicendo che la **velocità areolare** di ogni pianeta è costante; per velocità areolare s'intende il rapporto fra l'area spazzata e il tempo impiegato.

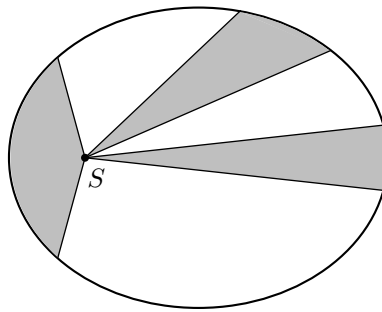


Figura 4.4: La seconda legge di Kepler.

La terza legge dice esattamente come variano i tempi di rivoluzione dei pianeti all'aumentare della loro distanza dal Sole; indicando, come d'uso, con a l'asse maggiore dell'ellisse e con T il periodo di rivoluzione, la terza legge si può esprimere con la seguente equazione

$$T^2 = \chi a^3 \quad (4.1)$$

La costante di proporzionalità χ è la stessa per tutti i pianeti; verrà determinata nel prossimo paragrafo.

4.5 LA LEGGE DI GRAVITAZIONE UNIVERSALE.

Resta da capire perché i pianeti si muovono in modo tale da rispettare le leggi di Kepler. Un modello che fornisca questo tipo di risposta deve specificare quale sia la forza di interazione fra il Sole e i suoi pianeti. Fu Newton che, partendo proprio dalle leggi di Kepler, riuscì a trovare la risposta corretta. Di seguito non si ripercorre il procedimento newtoniano ma una sua versione semplificata. Si consideri un pianeta di massa m_p muoventesi attorno al Sole lungo un'orbita circolare¹³ di raggio r . Dalla seconda legge di Kepler segue che la velocità del pianeta deve avere modulo v costante; il pianeta quindi si muove di moto circolare uniforme e la sua accelerazione è centripeta. Vi deve dunque essere una forza centripeta \mathbf{F} con cui il Sole attira il pianeta; il modulo di questa forza è

$$F = m_p \frac{v^2}{r}. \quad (4.2)$$

Il periodo con cui viene percorsa l'orbita è

$$T = \frac{2\pi r}{v}, \quad (4.3)$$

¹³ Questa non è una limitazione: la circonferenza è una particolare ellisse quindi la legge che qui si sta cercando deve valere anche in questo caso.

ma, per la terza legge di Kepler, il quadrato di T è proporzionale al cubo di r , equazione (4.1):

$$\frac{4\pi^2 r^2}{v^2} = \chi r^3 \quad \Longleftrightarrow \quad v^2 = \frac{4\pi^2}{\chi} \frac{1}{r}; \quad (4.4)$$

pertanto la forza agente su P si può scrivere

$$F = \frac{4\pi^2}{\chi} \frac{m_p}{r^2}. \quad (4.5)$$

Questa forza è quindi inversamente proporzionale al quadrato della distanza fra Sole e pianeta. La costante di proporzionalità, a sua volta, è proporzionale alla massa m_p del pianeta.

Per il principio di azione e reazione, se il Sole attira il pianeta con una forza di modulo F , anche il pianeta deve attirare il Sole con una forza avente lo stesso modulo; non solo, ma se la forza agente sul pianeta è proporzionale alla massa del pianeta, la forza agente sul Sole deve essere proporzionale alla massa M_\odot del Sole; deve quindi esistere una costante di proporzionalità, che si usa indicare con G , indipendente dalle masse in gioco, per cui valga

$$\frac{4\pi^2}{\chi} = GM_\odot \quad (4.6)$$

Il modulo della forza di interazione fra Sole e pianeta è quindi

$$F = G \frac{M_\odot m_p}{r^2}. \quad (4.7)$$

La costante χ e la (4.1) si possono quindi scrivere nella forma

$$\chi = \frac{4\pi^2}{GM_\odot}, \quad T^2 = \frac{4\pi^2}{GM_\odot} a^3. \quad (4.8)$$

Newton stesso generalizzò la forza così determinata all'interazione gravitazionale fra qualunque coppia di masse; enunciò quindi la **legge di gravitazione universale**.

Ogni coppia di punti materiali dell'universo si attira reciprocamente con una forza il cui modulo è direttamente proporzionale alle loro masse ed inversamente proporzionale al quadrato della loro distanza.

Dette m_1 ed m_2 le due masse ed r la loro distanza, vale quindi

$$F_g = G \frac{m_1 m_2}{r^2}. \quad (4.9)$$

La precedente equazione può essere scritta in forma vettoriale; siano P_1 e P_2 i due punti materiali, allora la forza con cui P_1 attira P_2 è il vettore

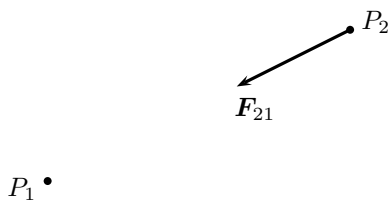
$$\mathbf{F}_{21} = G \frac{m_1 m_2}{r^2} \hat{\mathbf{r}}_{21}, \quad (4.10)$$

ove $\hat{\mathbf{r}}_{21} = \mathbf{P}_2 \mathbf{P}_1 / r$ è il versore che ha il verso da P_2 a P_1 .

La costante di proporzionalità G è detta **costante di gravitazione universale**; secondo le misure più recenti il suo valore è

$$G = 6.674\,30(15) \times 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-2}. \quad (4.11)$$

La legge di gravitazione universale non vale per due corpi estesi non assimilabili a punti materiali; in un caso simile è necessario suddividere ciascun corpo in parti sufficientemente piccole da giustificare l'uso del modello di punto materiale ed applicare la legge a ciascuna delle parti così ottenute.

Figura 4.5: La forza F_{21} .

Tuttavia, lo stesso Newton dimostrò che se un corpo omogeneo ha simmetria sferica (cioè è una sfera o uno strato sferico) la forza di attrazione su qualsiasi corpo esterno¹⁴ dipende solo dalla massa e non dal raggio della sfera; quindi, per il calcolo dell'interazione gravitazionale ogni corpo a simmetria sferica può essere considerato come un punto materiale di uguale massa collocato nel suo centro.

Quindi per determinare la forza di attrazione di un corpo sferico su di un punto materiale esterno, si usa la (4.9) misurando la distanza r dal centro della sfera.

In particolare, quanto detto è vero per i corpi celesti che, come il Sole e i pianeti, possono essere, con ottima approssimazione, considerati una successione di strati sferici omogenei.

4.6 MASSA GRAVITAZIONALE.

Occorre a questo punto fare attenzione ad un problema che ha grande importanza concettuale. A suo tempo è stata definita massa quella proprietà di un punto materiale che definisce il suo comportamento sotto l'azione di una forza per mezzo della (3.12); in particolare tanto maggiore è la massa tanto meno il punto materiale risente dell'azione della forza. Qui si continua a chiamare massa la proprietà dei corpi che hanno di attrarre altri corpi ed esserne attratti; tale forza di attrazione aumenta con l'aumentare della massa.

Sono diverse anche le definizioni operative delle due masse: la prima si definisce misurando accelerazioni, la seconda misurando forze gravitazionali e distanze. Per distinguerle, la prima, come si è visto nella sezione 3.1, viene chiamata *massa inerziale*; la seconda viene usualmente chiamata **massa gravitazionale**. Tuttavia l'esperienza mostra¹⁵, e se ne vedrà un esempio nella prossima sezione, che le masse inerziale e gravitazionale di un corpo sono numericamente uguali. Pertanto, a meno di possibili fraintendimenti, nel seguito si ometterà l'aggettivo che le distingue chiamandole semplicemente *massa*. L'identificazione fra massa inerziale e massa gravitazione consente, fra l'altro, di adottare per entrambe la stessa unità di misura.

Questa uguaglianza fra massa inerziale e massa gravitazionale di un corpo in fisica classica appare un caso fortunato, ma in relatività generale assume un significato assai fondamentale; tuttavia non è questo il luogo per entrare in ulteriori dettagli.

4.7 L'ACCELERAZIONE GRAVITAZIONALE.

La legge di gravitazione universale può, in particolare, essere usata per studiare l'attrazione fra la Terra e i corpi che si trovano attorno ad essa, misurando le distanze dal centro. Un punto materiale P di massa m che si trovi sulla superficie della Terra, quindi, risente di una forza di attrazione di modulo

$$F_g = G \frac{M_{\oplus} m}{R_{\oplus}^2}, \quad (4.12)$$

ove, M_{\oplus} è la massa della Terra e R_{\oplus} il suo raggio. L'accelerazione gravitazionale di P quindi è un vettore diretto verso il centro della terra di modulo

$$a_g = \frac{F_g}{m} = G \frac{M_{\oplus}}{R_{\oplus}^2}. \quad (4.13)$$

¹⁴ Il fatto che il corpo debba essere esterno è importante; la (4.9) non vale all'interno dei corpi. Si può dimostrare, per esempio, che all'interno della Terra la forza di attrazione verso il centro diminuisce proporzionalmente al raggio.

¹⁵ Le misure più accurate oggi disponibili mostrano che la differenza relativa fra i due tipi di massa è minore di 10^{-13} , si veda SCHLAMMINGER ET AL., *Phys. Rev. Lett.* 100, 2008.

Si osservi che questa accelerazione non dipende dalla massa di P e che, pertanto, tutti i punti materiali risentono della stessa accelerazione gravitazionale.

Le attuali misure sui dati fisici della Terra per la massa ed il raggio equatoriale medio sono:

$$M_{\oplus} = 5.972\,17(13) \times 10^{24} \text{ kg} \quad , \quad R_{\oplus} = 6.3781 \times 10^6 \text{ m} \quad (4.14)$$

utilizzando le quali si ottiene

$$a_g = 9.7983 \text{ m s}^{-2} . \quad (4.15)$$

Questo valore, come si vede, è molto vicino all'accelerazione di gravità standard g , equazione (2.30). La differenza è dovuta al fatto che la Terra non è una sfera perfetta: la distanza dal centro è maggiore all'equatore che ai poli, quindi il valore dell'accelerazione gravitazionale varia con la latitudine; varia anche con l'altezza dal livello del mare e risente della forza centrifuga dovuta alla rotazione terrestre. Il valore (2.30) è definito come valore standard.

La cosa importante da osservare qui è che la massa m di P che compare nella (4.12) è la massa gravitazionale, mentre la massa m di P che compare al denominatore della (4.13) è la massa inerziale. Se non fossero uguali, infatti si dovrebbe distinguere una massa gravitazionale m_g da una massa inerziale m_i , e l'accelerazione di gravità sarebbe scritta nella forma seguente

$$a = G \frac{M_{\oplus}}{R_{\oplus}^2} \frac{m_g}{m_i} \quad (4.16)$$

verrebbe quindi a dipendere dal rapporto fra i due tipi di massa e sarebbe diversa da corpo a corpo. Il fatto che l'accelerazione di gravità sia la stessa per tutti i corpi che risentono dell'attrazione terrestre è quindi una importante verifica dell'uguaglianza fra la massa inerziale e quella gravitazionale.

Con un procedimento simile a quello che ha portato alla (4.13) è possibile determinare l'accelerazione di gravità su qualsiasi corpo celeste di massa M e raggio R ; vale

$$a_g = G \frac{M}{R^2} . \quad (4.17)$$

Per il principio di azione e reazione se la Terra attira il punto materiale P di massa m , quest'ultimo attira la Terra con una forza di ugual modulo. L'accelerazione acquistata dalla Terra è dunque, si confronti con (4.13):

$$a_{\oplus} = \frac{F_g}{M_{\oplus}} = G \frac{m}{R_{\oplus}} = \frac{m}{M_{\oplus}} a_g \quad (4.18)$$

L'accelerazione della Terra è quindi tanto più piccola dell'accelerazione di gravità di P quanto la massa di questo è più piccola della massa di quella. Quindi, sostanzialmente, la Terra sta ferma e P si muove, in accordo con la comune esperienza. Come detto sopra, l'accelerazione di gravità risente della forza centrifuga. La rotazione terrestre infatti influisce sulla forza totale agente su di un punto materiale misurata sulla superficie terrestre. La Terra, infatti, ruotando attorno all'asse terrestre, non è un sistema di riferimento inerziale. Nella determinazione della forza totale agente su P nel sistema di riferimento non inerziale solidale alla superficie terrestre occorre quindi tenere conto delle forze apparenti e in particolare della forza centrifuga.

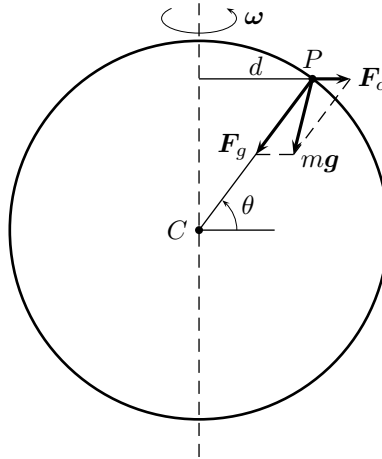


Figura 4.6: Il ruolo della forza centrifuga.

Dalla figura 4.6, ove il ruolo della forza centrifuga è, per chiarezza, fortemente accentuato, si vede che la forza effettivamente agente su P non è la sola forza \mathbf{F}_g di attrazione gravitazionale verso il centro della Terra, ma vi è una correzione dovuta alla forza centrifuga. La forza risultante è la forza peso $m\mathbf{g}$ effettivamente misurata sulla superficie terrestre. La forza centrifuga dipende dalla latitudine, il suo modulo vale infatti

$$F_c = m\omega^2 d = m\omega^2 R_\oplus \cos \theta \quad (4.19)$$

ove d è la distanza di P dall'asse di rotazione terrestre e θ è la latitudine. Per esempio l'accelerazione centrifuga agente su di un punto materiale che si trovi a 45° di latitudine ha modulo

$$a_c = 2.2097 \times 10^{-2} \text{ m s}^{-2} , \quad (4.20)$$

il contributo dell'accelerazione centripeta alla (2.30) è quindi di poco più dello 0.2%.

4.8 SATELLITI.

Molti pianeti hanno dei satelliti, cioè altri corpi celesti di dimensioni minori che percorrono un'orbita attorno al pianeta. Questi satelliti sono trattiene dal pianeta mediante la forza gravitazionale esattamente come il Sole trattiene ciascun pianeta. Il moto di un satellite attorno al proprio pianeta è regolato dalle leggi di Kepler in modo analogo a quanto accade per i pianeti orbitanti attorno al Sole; l'unica cosa a cambiare è la costante di proporzionalità nella terza legge, che ora contiene la massa del pianeta, invece della massa del Sole.

Si vuole qui mostrare che, come del resto previsto dalle leggi di Kepler, la velocità con cui un satellite percorre la sua orbita dipende dalla distanza dal pianeta. Per semplicità si supponga che il satellite percorra un'orbita circolare di raggio r con velocità di modulo costante v . La forza agente sul satellite è centripeta; deve dunque valere

$$F = G \frac{Mm}{r^2} = m \frac{v^2}{r} \quad (4.21)$$

ove M è la massa del pianeta, m quella del satellite. Quindi la velocità diminuisce all'aumentare del raggio secondo la formula

$$\boxed{v = \sqrt{\frac{GM}{r}}} . \quad (4.22)$$

Questa formula, oltre a valere per i satelliti naturali di un pianeta vale anche per i satelliti artificiali; in particolare vale per i **satelliti geostazionari**. Questi sono satelliti che si trovano sempre nella stessa posizione rispetto alla superficie della Terra rotante attorno al proprio asse; si tratta cioè di satelliti che ruotano attorno alla Terra con una velocità angolare uguale a quella terrestre o, che è lo stesso, che hanno periodo orbitale di un giorno, cioè $T = 23 \text{ h } 56 \text{ min } 4.0905 \text{ s} = 86\,164.0905 \text{ s}$. D'altra parte deve valere:

$$T = \frac{2\pi r}{v} = \sqrt{\frac{4\pi^2 r^3}{GM_\oplus}} \quad (4.23)$$

e quindi

$$r = \sqrt[3]{\frac{GM_\oplus}{4\pi^2} T^2} = 42\,167\,496.1 \text{ m} . \quad (4.24)$$

L'orbita geostazionaria ha quindi un raggio di poco più di 42 000 km.

Si osservi la (4.23) non è altro che la terza legge di Kepler (4.8) applicata alle orbite attorno alla Terra.

4.9 CAMPO GRAVITAZIONALE.

La forza gravitazionale (4.9) consente di spiegare con un'ottima approssimazione tutti i moti dei corpi del sistema solare. Ha avuto anche un ruolo predittivo: l'esistenza dei pianeti Nettuno e Plutone fu prevista analizzando, sulla base della (4.9), certe irregolarità dell'orbita di Urano. Tuttavia, nonostante i successi sperimentali, la (4.9) presenta un problema di fondo. Diversamente da tutte quelle studiate in precedenza, che sono forze di contatto, la forza gravitazionale è un'interazione a distanza; non è quindi affatto chiaro quale sia il meccanismo di tale interazione, non si capisce cioè in che modo due corpi, anche molto distanti fra loro, possano esercitare una forza reciproca. Il problema era già stato sollevato da Newton, nello *Scolium generale* alla fine dei *Principia*.

La fisica moderna, soprattutto a partire dal lavoro di Faraday¹⁶ e Maxwell¹⁷, ha cominciato a descrivere l'azione a distanza in termini di **campo**. L'idea è che la presenza di una massa modifichi lo spazio circostante. Per farsi un'idea di quel che accade, si pensi ad un corpo massiccio posato

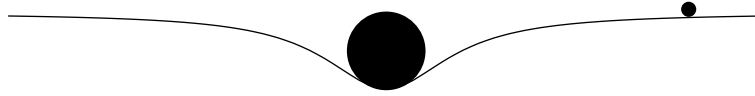


Figura 4.7: Modello ideale del campo gravitazionale.

su di una superficie elastica; la superficie si incurva e una seconda massa presente sulla superficie scivola verso l'avvallamento. Se non si percepisse la presenza della membrana si interpreterebbe quel che accade come un'azione a distanza.

Il **campo gravitazionale** nel punto dello spazio P si definisce nel modo seguente. Si consideri un punto qualsiasi materiale di massa m che si trovi in P e sia \mathbf{F}_g la forza gravitazionale agente su m , allora si dice campo gravitazionale in P il vettore definito da

$$\mathbf{g} = \frac{\mathbf{F}_g}{m}. \quad (4.25)$$

Poiché \mathbf{F}_g è proporzionale a m , il campo \mathbf{g} non dipende dalla massa del punto materiale collocato in P ma solo dalle masse che agiscono su di esso e dalle loro distanze da P . Nel caso semplice in cui ad agire sul punto materiale in P sia un unico punto materiale (o un corpo a simmetria sferica) di massa M posto a distanza r da P , il campo gravitazionale è diretto verso M ed ha modulo

$$g = G \frac{M}{r^2}. \quad (4.26)$$

Si faccia attenzione a non confondere il modulo del campo gravitazionale con l'accelerazione di gravità, indicata con il stesso simbolo.

Il campo gravitazionale ha le dimensioni di una forza diviso una massa, vale cioè $[g] = [l][s]^{-1}$, la sua unità di misura è quindi N kg^{-1} .

INTERMEZZO. LA PESATURA DELLA TERRA.

Nel 1798 Cavendish¹⁸ utilizzò la legge di gravitazione universale per misurare la densità della Terra, cioè il rapporto fra la massa ed il volume.

¹⁶ Michael Faraday (1791–1867), fisico e chimico inglese.

¹⁷ James Clerk Maxwell (1831–1879), fisico e matematico scozzese.

¹⁸ Henry Cavendish (1731–1810), chimico e fisico scozzese.

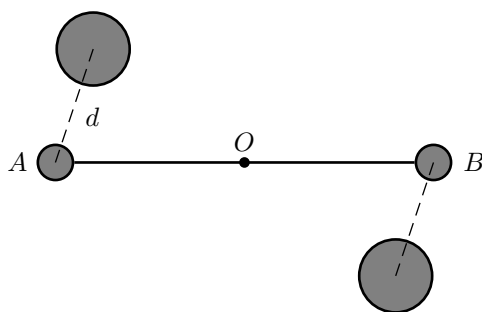


Figura 4.8: L'apparato sperimentale di Cavendish.

L'apparato sperimentale che usò è molto semplice, si veda la figura 4.8 ove è presentata una vista dall'alto. Si tratta di una *bilancia di torsione* (su cui si dovrà tornare in un capitolo successivo) costituita da un sottile filo rigido O cui è appesa una leggera asta di legno alle cui estremità si trovano due piccole sfere di piombo A e B uguali e di massa m . Se il sistema è posto in rotazione attorno all'asse del filo per mezzo di una forza esterna \mathbf{F} , questo si torce di un certo angolo α fino a che la forza di richiamo del filo, proporzionale ad α non eguaglia la forza \mathbf{F} . A questo punto, una misura di α fornisce una misura del modulo di F .

Cavendish collocò alla stessa distanza dalle due sfere della bilancia, due più grosse sfere fisse, sempre di piombo, uguali e di massa M , in modo che l'attrazione gravitazionale fra le sfere mettesse in rotazione la bilancia di torsione. Misurando l'angolo di torsione fu quindi in grado di determinare il modulo della forza agente fra le sfere, il cui modulo vale

$$F = G \frac{Mm}{d^2} . \quad (4.27)$$

Cavendish fece quindi il rapporto fra questa forza e la forza di attrazione terrestre delle sfere più piccole, cioè con la loro forza peso il cui modulo è

$$F_p = G \frac{M_\oplus m}{R_\oplus^2} . \quad (4.28)$$

Tale rapporto dà

$$\frac{F_p}{F} = \frac{M_\oplus d^2}{MR_\oplus^2} \quad (4.29)$$

La misura di F e del peso F_p , consentì così a Cavendish di determinare il rapporto fra la massa e il raggio della Terra; la misura di quest'ultimo era nota fin dai tempi di *Eratostene*¹⁹. Da questi dati Cavendish quindi poté calcolare la densità ρ_\oplus della Terra:

$$\rho_\oplus = \frac{M_\oplus}{\frac{4}{3}\pi R_\oplus^3} = \frac{3}{4\pi} \frac{MF_p}{d^2 F R_\oplus} . \quad (4.30)$$

Cavendish stesso si riferiva al proprio esperimento come alla pesatura della Terra, poiché dalla densità è immediato determinare la massa.

¹⁹ Eratostene di Cirene (276–194 a.C.), matematico, astronomo, geografo e poeta di Cirene.

5

LEGGI DI CONSERVAZIONE.

La soluzione del problema dinamico utilizzando la sola legge fondamentale (3.12), cioè il passare dalla conoscenza delle forze agenti su di un punto materiale alla legge oraria del moto e della velocità, è spesso difficile. Un grande ausilio, sia tecnico che concettuale, viene dalla conoscenza di certe grandezze fisiche che, in certe condizioni, si mantengono costanti durante il moto; si dice allora che la grandezza in questione *si conserva*. In questo capitolo si studiano queste grandezze e le condizioni della loro conservazione.

5.1 CONSERVAZIONE DELL'ENERGIA MECCANICA.

5.1.1 LAVORO.

¹Si consideri un punto materiale P di massa m in moto rettilineo sotto l'azione della forza costante \mathbf{F} e sia \mathbf{s} lo spostamento di P ; allora si definisce **lavoro** di \mathbf{F} su P la quantità

$$\mathcal{L} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{s} . \quad (5.1)$$

L'unità di misura del lavoro è detta **joule**² ed ha le dimensioni di una forza per una lunghezza, cioè

$$[\mathcal{L}] = [F] [l] = [t]^{-2} [l]^2 [m] . \quad (5.2)$$

Per le note proprietà del prodotto scalare fra vettori, il lavoro è positivo, nullo o negativo a seconda che l'angolo formato dai vettori \mathbf{F} e \mathbf{s} sia acuto, retto od ottuso. Il lavoro positivo viene detto *lavoro motore* poiché la forza favorisce il moto del punto materiale; viceversa il lavoro negativo viene detto *lavoro resistente* poiché la forza si oppone al moto di P .

La definizione data di lavoro vale solo se lo spostamento di P è rettilineo e se durante lo spostamento la forza rimane costante. Questa definizione può essere estesa al caso più generale in cui la traiettoria di P è una qualsiasi linea curva e la forza è variabile. In questo caso, la definizione esatta del lavoro richiede il calcolo integrale e quindi è fuori dai limiti di questi appunti; tuttavia si ritiene assai istruttivo, senza alcuna pretesa di rigore matematico, dare qualche cenno di come si possa calcolare il lavoro nel caso generale.

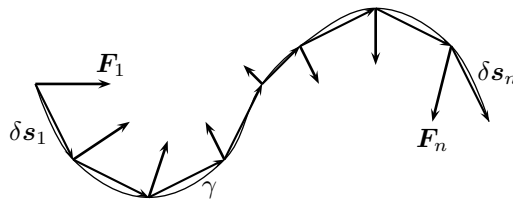


Figura 5.1: Il lavoro nel caso generale.

Si consideri il punto materiale in moto lungo una qualsiasi traiettoria curva γ ; si suddivida la curva in n parti sufficientemente piccole che la forza agente su P si possa considerare, per ciascuna di esse, con buona approssimazione costante; si veda la figura 5.1 ove $n = 8$; siano inoltre $\delta\mathbf{s}_1, \dots, \delta\mathbf{s}_n$ gli spostamenti per ciascuna di queste piccole parti. Allora, per ciascuno degli spostamenti è possibile utilizzare la definizione di lavoro (5.1). Sia quindi \mathbf{F}_1 la forza agente

¹ Nella stesura della presente sezione sono debitore di Fabio Maria Antoniali per l'impostazione generale ed alcune figure.

² James Prescott Joule (1818–1889), fisico inglese.

durante lo spostamento $\delta \mathbf{s}_1$, \mathbf{F}_2 la forza agente durante lo spostamento $\delta \mathbf{s}_2$ e così via. Allora il lavoro totale è la somma dei lavori in ciascuno dei piccoli spostamenti, cioè

$$\mathcal{L} = \mathbf{F}_1 \cdot \delta \mathbf{s}_1 + \cdots \mathbf{F}_n \cdot \delta \mathbf{s}_n . \quad (5.3)$$

Più grande è il numero n più preciso risulta il calcolo del lavoro.

Se su P agiscono più forze, il lavoro totale è la somma dei lavori compiuti da ciascuna di esse. Nel caso in cui la forza sia sempre perpendicolare alla traiettoria il suo lavoro è nullo poiché si annullano tutti i prodotti scalari nella (5.3). Questo è il caso della reazione vincolare di una superficie liscia, si veda la figura 3.1b, o della forza centripeta di un moto circolare uniforme. Si

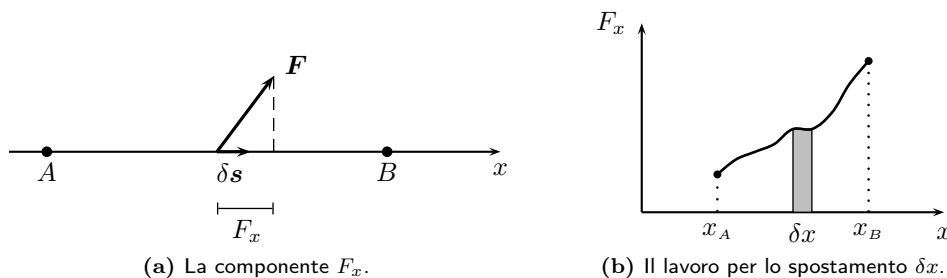


Figura 5.2: Il lavoro per uno spostamento rettilineo.

consideri ora il caso semplice in cui il moto di P sia rettilineo e si svolga dal punto A al punto B ; si scelga come asse di riferimento un'asse delle ascisse coincidente con la traiettoria. In tal caso, per ciascuno dei piccoli spostamenti $\delta \mathbf{s}$ in cui è stata divisa la traiettoria, cioè il segmento AB , il lavoro $\delta \mathcal{L}$ vale

$$\delta \mathcal{L} = \mathbf{F} \cdot \delta \mathbf{s} = F_x \delta x \quad (5.4)$$

ove F_x è la componente di \mathbf{F} nella direzione della traiettoria, figura 5.2a. Si tracci il grafico di F_x come funzione di x compreso fra le ascisse di A e B . In corrispondenza all'intervallo piccolo δx la forza è costante, quindi il lavoro corrispondente è dato dalla (5.4) che è rappresentato graficamente dall'area compresa fra la curva e l'asse delle ascisse³, figura 5.2b.

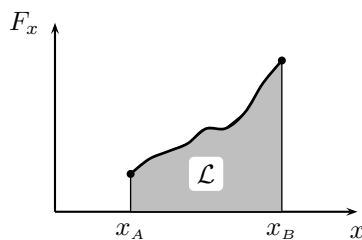
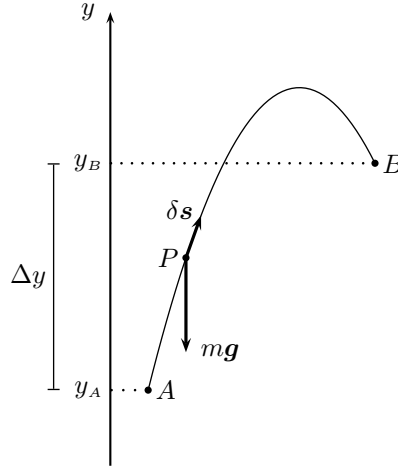


Figura 5.3: Il lavoro come area.

Questo è vero per ogni piccolo spostamento e, visto che il lavoro totale è la somma dei lavori, il lavoro totale compiuto dalla forza durante il moto di P da A a B è dato dall'area compresa fra la curva e l'asse delle ascisse nell'intervallo compreso fra x_A e x_B , come si vede nella figura 5.3. Si tenga presente che il lavoro è negativo se l'angolo formato dal vettore forza e il vettore spostamento è ottuso; mentre un'area è sempre positiva. Si dovrà quindi fare attenzione ai segni e considerando l'area come valore assoluto del lavoro fatto.

LAVORO DELLA FORZA PESO. Il calcolo del lavoro risulta particolarmente semplice se la forza è costante. A questo proposito è importante il caso della forza peso $m\mathbf{g}$. Si consideri un punto materiale in moto lungo una qualsiasi traiettoria curva sotto l'azione della forza peso, come in figura 5.4 ove è rappresentata una traiettoria parabolica.

³ Questa interpretazione geometrica è analoga a quella vista per lo spostamento nel caso di moto vario nel paragrafo 2.3.2; questa analogia è dovuta alla identità formale fra l'equazione $\delta x = v \delta t$ e la (5.4).

**Figura 5.4:** Il lavoro della forza peso.

Durante il piccolo spostamento δs la forza peso compie il lavoro

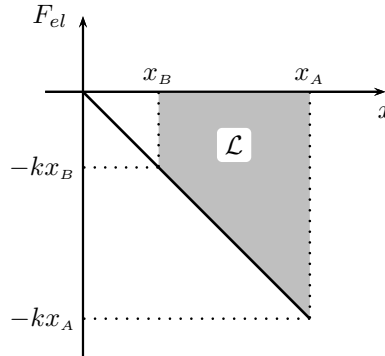
$$\delta \mathcal{L}_p = m\mathbf{g} \cdot \delta \mathbf{s} = -mg\delta y \quad (5.5)$$

ove δy è la componente di δs nella direzione della forza peso, cioè la sua componente y ; il segno meno è presente perché l'angolo fra i due vettori è ottuso se il punto si sta muovendo verso l'alto e quindi è $\delta y > 0$, viceversa è acuto se il punto si sta muovendo verso il basso e quindi $\delta y < 0$: nel primo caso il lavoro della forza peso è negativo, nel secondo caso è positivo, ma in entrambi i casi il segno meno è corretto. Sommando tutti i lavori per ciascun piccolo spostamento si trova che il lavoro complessivo dipende solo dalla variazione di altezza, vale cioè

$$\mathcal{L}_p = -mg\Delta y = mg(y_A - y_B) . \quad (5.6)$$

In particolare, il lavoro non dipende dalla traiettoria che unisce A e B , ma solo dalla loro differenza di altezza dal suolo.

LAVORO DELLA FORZA ELASTICA. Si consideri una molla con un estremo fissato e l'altro collegato ad un punto materiale P , come in figura 3.6. Il caso che si vuol considerare qui è quello in cui la molla si accorcia muovendo P dalla posizione di ascissa x_A alla posizione di ascissa x_B . Con riferimento all'interpretazione geometrica del lavoro come area, e ricordando che il modulo della forza elastica è dato da $F_{el} = -kx$, la situazione è quella rappresentata nella figura 5.5, dove il lavoro è dato dall'area del trapezio rettangolo ombreggiato.

**Figura 5.5:** Il lavoro della forza elastica.

Si tenga presente che, nella situazione descritta, forza e spostamento hanno lo stesso verso quindi il lavoro è positivo:

$$\mathcal{L}_{el} = \frac{1}{2}(kx_A + kx_B)(x_A - x_B) ; \quad (5.7)$$

riordinando i termini si ottiene

$$\mathcal{L}_{el} = \frac{1}{2}k(x_A^2 - x_B^2) . \quad (5.8)$$

L'equazione precedente ha il segno corretto in tutti i casi purché si indichi con A la posizione iniziale e con B quella finale.

Si osservi che il lavoro della forza elastica non dipende dal percorso seguito dal punto materiale sotto l'azione della molla: potrebbe, per esempio, aver fatto più oscillazioni. Il lavoro della forza elastica quindi, come quello della forza peso, dipende solo dalle posizioni iniziale e finale e non dal percorso che le unisce.

LAVORO DELLA FORZA GRAVITAZIONALE. Si consideri una massa m_2 che si muova nel campo gravitazionale di una seconda massa m_1 spostandosi da A a B . Il lavoro fatto dalla forza gravitazionale è positivo se $r_A > r_B$, mentre è negativo se $r_A < r_B$; in ogni caso il suo valore assoluto è dato dall'area sottostante la curva, ombreggiata in figura 5.6.

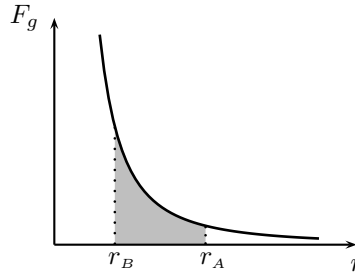


Figura 5.6: Il lavoro della forza gravitazionale.

Sfortunatamente la determinazione di questa area non è elementare, ma richiede la conoscenza del calcolo integrale; tuttavia, vista la sua grande importanza, se ne dà qui l'espressione generale:

$$\mathcal{L}_g = -Gm_1m_2 \left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right) . \quad (5.9)$$

Il segno è corretto sia che i due corpi si avvicinino (com'è il caso rappresentato in figura) sia che si allontanino, purché A sia la posizione iniziale e B la posizione finale.

Anche il lavoro della forza gravitazionale, come nei precedenti esempi, dipende solo dalle posizioni iniziale e finale e non dalla traiettoria che le congiunge.

5.1.2 POTENZA.

Si dice potenza \mathcal{P} sviluppata dalla forza *costante* \mathbf{F} che compie il lavoro \mathcal{L} nell'intervallo di tempo Δt , il lavoro svolto nell'unità di tempo, vale cioè

$$\mathcal{P} = \frac{\mathcal{L}}{\Delta t} . \quad (5.10)$$

Le dimensioni della potenza sono quelle di un'energia fratto un tempo, vale cioè $[\mathcal{P}] = [t]^{-3}[l]^2[m]$; la sua unità di misura viene detta **watt**⁴, simbolo W; sviluppa la potenza di un watt la forza che compie il lavoro di un joule in un secondo.

Se \mathbf{F} non è costante, per definire la potenza in un dato istante t occorre considerare un intervallo

⁴ James Watt (1736–1819), ingegnere scozzese.

di tempo da t a $t + \delta t$ sufficientemente piccolo da poter considerare \mathbf{F} costante. In tale piccolo intervallo di tempo lo spostamento sia $\delta \mathbf{s}$; la potenza quindi si scrive

$$\mathcal{P} = \frac{\mathbf{F} \cdot \delta \mathbf{s}}{\delta t} . \quad (5.11)$$

Al tendere a zero di δt si trova la potenza all'istante t :

$$\mathcal{P}(t) = \mathbf{F}(t) \cdot \mathbf{v}(t) , \quad (5.12)$$

ove $\mathbf{v} = \delta \mathbf{s} / \delta t$ è la velocità all'istante t .

Il concetto di potenza è particolarmente utile nel confronto di due macchine diverse che compiono lo stesso lavoro in tempi diversi; si pensi, per esempio ad una grande cassa sollevata fino al secondo piano di un edificio a spalla o usando un montacarichi.

5.1.3 TEOREMA DELL'ENERGIA CINETICA.

Se su un punto materiale P di massa m agisce la forza \mathbf{F} , per la legge fondamentale della dinamica esso è accelerato e quindi la sua velocità varia. Esiste una relazione fra il lavoro compiuto dalla forza e la variazione della velocità.

Si supponga che la forza \mathbf{F} sia costante e sia diretta nella direzione dello spostamento; in questo caso il moto di P è uniformemente accelerato. Si supponga inoltre che all'istante iniziale $t_0 = 0$ s la velocità sia v_0 ; all'istante t P avrà percorso lo spostamento Δx dato dalla (2.29). Il lavoro della forza \mathbf{F} corrispondente a tale spostamento è quindi

$$\mathcal{L} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{s} = F \Delta x = ma \cdot \frac{v^2(t) - v_0^2}{2a} = \frac{1}{2} m [v^2(t) - v_0^2] . \quad (5.13)$$

La quantità

$$\boxed{\mathcal{E}_c = \frac{1}{2} m v^2} . \quad (5.14)$$

è detta **energia cinetica** del un punto materiale P . È stato così dimostrato che, nel caso di una forza costante diretta nella direzione del moto, il lavoro compiuto è uguale alla variazione dell'energia cinetica. È possibile dimostrare, in modo non elementare poiché è necessario il calcolo differenziale, che questo risultato ha una validità generale, valendo anche per una forza variabile e per qualunque spostamento di P . Questo risultato è detto **teorema dell'energia cinetica o delle forze vive** e può essere enunciato come segue.

Il lavoro fatto dalla risultante delle forze agenti su di un punto materiale di massa m è uguale alla variazione dell'energia cinetica del punto materiale.

Vale quindi l'equazione

$$\boxed{\mathcal{L} = \mathcal{E}_{cf} - \mathcal{E}_{ci}} , \quad (5.15)$$

ove \mathcal{E}_{ci} e \mathcal{E}_{cf} sono rispettivamente l'energia cinetica iniziale e finale. L'energia cinetica è una quantità scalare; ha la stessa dimensione del lavoro e si misura, quindi, in joule.

L'energia cinetica di un punto materiale dipende dal sistema di riferimento rispetto a cui viene misurato il moto. Infatti la velocità di un punto materiale è diversa in sistemi di riferimento diversi. Ciononostante, il teorema dell'energia cinetica è valido in ogni sistema di riferimento, inerziale o meno. In caso di sistema non inerziale occorre calcolare il lavoro anche delle forze apparenti.

Non si è ritenuto di dover dare una definizione generale di energia. In effetti, spesso si definisce l'energia come la capacità di compiere un lavoro. Tale definizione è tuttavia insoddisfacente in quanto, a causa della sua vaghezza, consente di essere applicata a molte cose diverse. Qui è stata

data una definizione di due forme di energia: il lavoro di una forza e l'energia cinetica di un punto materiale. Nel seguito si vedranno altre forme di energia cui si daranno nomi diversi. Definire un unico concetto da riempire con un significato generico non è molto utile. Più utile sarà definire operativamente le diverse forme di energia e vedere qual'è, se ve n'è una, la loro relazione.

5.1.4 FORZE CONSERVATIVE. ENERGIA POTENZIALE.

Come visto sopra, il lavoro della forza peso, della forza elastica e della forza gravitazionale, dipende dalle posizioni iniziale e finale del punto materiale ma non dalla traiettoria percorsa. Questa proprietà è caratteristica di una classe molto importante di forze, dette **forze conservative**. Vale la seguente definizione.

*Una forza è detta **conservativa** se, agendo su di un punto materiale in moto, il lavoro compiuto dalla forza non dipende dalla traiettoria seguita né dalle caratteristiche del moto con cui essa viene percorsa, ma solamente dalle posizioni iniziale e finale.*

Se una forza \mathbf{F} è conservativa è possibile definire una funzione \mathcal{U} della sola posizione tale che il lavoro si possa esprimere in termini della variazione di tale funzione; più precisamente il lavoro compiuto nello spostamento dalla posizione A alla posizione B si può scrivere nella forma seguente

$$\mathcal{L}_{A \rightarrow B} = \mathcal{U}(A) - \mathcal{U}(B) . \quad (5.16)$$

Questa relazione definisce la funzione \mathcal{U} che viene chiamata **energia potenziale** della forza conservativa \mathbf{F} .

L'esistenza, nel caso di forze conservative, di una funzione \mathcal{U} tale che valga la relazione (5.16) è dimostrabile, come vedrà poco più sotto. Quale sia poi l'equazione esplicita della funzione \mathcal{U} per ogni diversa forza conservativa è un problema la cui soluzione, nel caso generale, può anche essere estremamente complicata. Nel seguito si vedranno gli esempi più semplici.

Si consideri un punto materiale che, sotto l'azione della forza *conservativa* \mathbf{F} , si muove dal punto A al punto B lungo due traiettorie diverse 1 e 2, come in figura 5.7a. Poiché la forza è conservativa, il lavoro da essa compiuto nei due casi deve essere il medesimo deve quindi valere:

$$\mathcal{L}_1 = \mathcal{L}_2 . \quad (5.17)$$

Si potrebbe ripetere il ragionamento utilizzando qualunque altra traiettoria che connetta i punti

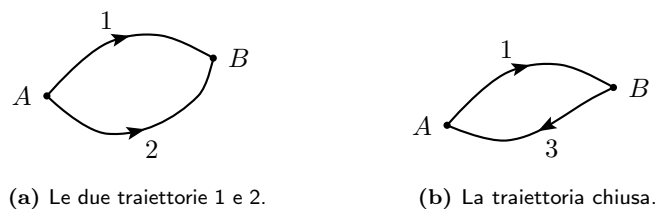


Figura 5.7: Il lavoro di una forza conservativa.

A e B il lavoro compiuto da \mathbf{F} per spostare il punto materiale in questione da A a B quindi dipende solamente dalle posizioni A e B .

Questo stato di cose si può formalmente scrivere nel modo seguente:

$$\mathcal{L}_{A \rightarrow B} = \mathcal{U}(A, B) , \quad (5.18)$$

dove $\mathcal{U}(A, B)$ è una funzione da determinare.

Allo scopo di ottenere qualche ulteriore informazione sulla funzione $\mathcal{U}(A, B)$, si supponga che il punto materiale, una volta giunto in B lungo la traiettoria 1 ritorni in A lungo la traiettoria 3, come in figura 5.7b; in tal caso si dice che il punto materiale ha percorso una traiettoria *chiusa*. Valgono le relazioni:

$$\mathcal{L}_1 = \mathcal{U}(A, B) \quad , \quad \mathcal{L}_3 = \mathcal{U}(B, A) . \quad (5.19)$$

Il lavoro di una forza conservativa lungo una traiettoria chiusa è uguale qualunque sia la traiettoria percorsa; in particolare si può scegliere la traiettoria nulla, cioè il caso in cui il punto materiale non si muove. In questo caso, non essendoci alcuno spostamento, il lavoro è nullo. Si può quindi affermare la seguente proprietà caratteristica delle forze conservative.

Se il punto materiale percorre una traiettoria chiusa una forza conservativa compie su di esso un lavoro nullo.

Quindi, relativamente al caso che si sta qui esaminando, vale

$$\mathcal{L}_{1+3} = \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_3 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \mathcal{L}_1 = -\mathcal{L}_3 \quad (5.20)$$

e quindi

$$\mathcal{U}(A, B) = -\mathcal{U}(B, A) . \quad (5.21)$$

Si supponga ora che il punto materiale, muovendosi da A a B passi per un certo punto R , fissato una volta per tutte arbitrariamente, detto *punto di riferimento*.

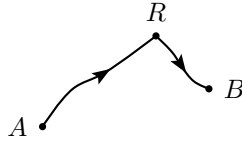


Figura 5.8: Il punto di riferimento R .

Allora, tenendo presente l'equazione (5.18), si può scrivere:

$$\mathcal{U}(A, B) = \mathcal{L}_{A \rightarrow B} = \mathcal{L}_{A \rightarrow R} + \mathcal{L}_{R \rightarrow B} \quad (5.22)$$

e quindi

$$\mathcal{U}(A, B) = \mathcal{U}(A, R) + \mathcal{U}(R, B) . \quad (5.23)$$

Utilizzando la (5.21) applicata alla traiettoria $A \rightarrow R$ si trova

$$\mathcal{U}(R, B) = -\mathcal{U}(B, R) . \quad (5.24)$$

Questa, sostituita nella (5.23), dà infine la relazione

$$\mathcal{U}(A, B) = \mathcal{U}(A, R) - \mathcal{U}(B, R) . \quad (5.25)$$

Poiché lo stato di riferimento R è fissato una volta per tutte, si può omettere di indicarlo ogni volta nella funzione \mathcal{U} e scrivere semplicemente

$$\mathcal{U}(A, R) \equiv \mathcal{U}(A) . \quad (5.26)$$

Quindi l'equazione (5.25) può essere riscritta nella forma

$$\mathcal{U}(A, B) = \mathcal{U}(A) - \mathcal{U}(B) . \quad (5.27)$$

Confrontando le equazioni (5.18) e (5.27) si ottiene

$$\mathcal{L}_{A \rightarrow B} = \mathcal{U}(A) - \mathcal{U}(B) , \quad (5.28)$$

che è quanto si doveva dimostrare.

La funzione energia potenziale \mathcal{U} , di cui è stata dimostrata l'esistenza quando siano presenti solo forze conservative, per quanto molto importante, è semplicemente una funzione matematica in cui significato fisico non è immediatamente esperibile. Ciò che ha significato fisico (cioè: ciò che è misurabile) è solamente il lavoro compiuto dalla forza \mathbf{F} . Tale lavoro è opposto alla variazione di \mathcal{U} . Quindi ciò che ha significato fisico non è la funzione \mathcal{U} ma la sua variazione.

Dall'equazione (5.27) è facile ricavare la relazione

$$\mathcal{U}(A, R) = \mathcal{U}(A) - \mathcal{U}(R) . \quad (5.29)$$

Confrontando le (5.26) e (5.29), si ricava immediatamente

$$\mathcal{U}(R) = 0 . \quad (5.30)$$

Quindi nello scegliere il punto di riferimento R di fatto viene scelto a quale posizione assegnare energia potenziale nulla. E siccome tutto quanto dimostrato sopra è indipendente dalla scelta di R , si può affermare che la scelta del punto in cui l'energia potenziale vale zero viene lasciata completamente arbitraria. Questo fatto è conseguenza di quanto appena detto, cioè che l'unica quantità avente significato fisico è la variazione dell'energia potenziale: tale variazione non dipende dalla scelta dello zero.

Un altro modo di vedere la medesima proprietà è affermare che l'energia potenziale è definita a meno di una costante additiva arbitraria. Aggiungendo infatti ad \mathcal{U} una qualsiasi costante (positiva o negativa), la sua variazione, che come detto è l'unica grandezza ad avere significato fisico, resta invariata. In altre parole se al posto di \mathcal{U} si considera la funzione $\mathcal{U}' = \mathcal{U} + \alpha$, essendo α una qualunque costante, il lavoro compiuto per andare dal punto A al punto B è dato da

$$\mathcal{L}_{A \rightarrow B} = \mathcal{U}'(A) - \mathcal{U}'(B) = [\mathcal{U}(A) + \alpha] - [\mathcal{U}(B) + \alpha] = \mathcal{U}(A) - \mathcal{U}(B) . \quad (5.31)$$

L'utilizzo di \mathcal{U}' o di \mathcal{U} quindi porta allo stesso valore del lavoro compiuto; le due energie potenziali sono quindi equivalenti. La scelta della costante corrisponde alla scelta dello zero dell'energia potenziale ed è dettata da criteri di convenienza.

5.1.5 CASI PARTICOLARI.

Come già osservato, il lavoro della forza peso, della forza elastica e della forza gravitazionale dipendono solo dalle posizioni iniziale e finale e non dalla traiettoria; queste tre sono quindi forze conservative. Le loro energie potenziali si possono facilmente dedurre dalle equazioni (5.6), (5.8) e (5.9). Per la forza peso si ha:

$$\mathcal{L}_p = mg(y_A - y_B) = \mathcal{U}_p(A) - \mathcal{U}_p(B) \quad (5.32)$$

quindi l'energia potenziale della forza peso è:

$$\boxed{\mathcal{U}_p(y) = mgy} . \quad (5.33)$$

Per la forza elastica si ha

$$\mathcal{L}_{el} = \frac{1}{2}k(x_A^2 - x_B^2) = \mathcal{U}_{el}(A) - \mathcal{U}_{el}(B) \quad (5.34)$$

quindi l'energia potenziale della forza elastica è

$$\boxed{\mathcal{U}_{el}(x) = \frac{1}{2}kx^2} . \quad (5.35)$$

Per la forza gravitazionale si ha

$$\mathcal{L}_g = -Gm_1m_2 \left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right) = \mathcal{U}_g(A) - \mathcal{U}_g(B) \quad (5.36)$$

quindi l'energia potenziale della forza gravitazionale è

$$\boxed{\mathcal{U}_g(r) = -G \frac{m_1m_2}{r}} . \quad (5.37)$$

È molto istruttivo mostrare che la (5.33) si può ottenere come approssimazione della (5.37). Si consideri infatti un punto materiale di massa m ad un'altezza y al di sopra della superficie terrestre; in tale caso la sua energia potenziale gravitazionale si può scrivere nella forma

$$\mathcal{U}_g(y) = -G \frac{M_\oplus m}{R_\oplus + y} = -G \frac{M_\oplus m}{R_\oplus} \frac{1}{1 + \frac{y}{R_\oplus}} . \quad (5.38)$$

Se $y \ll R_\oplus$ si può utilizzare l'approssimazione⁵ $(1+x)^\alpha \simeq 1 + \alpha x$ valida per $x \ll 1$; si ottiene quindi

$$\frac{1}{1 + \frac{y}{R_\oplus}} = \left(1 + \frac{y}{R_\oplus}\right)^{-1} \simeq 1 - \frac{y}{R_\oplus} , \quad (5.39)$$

e quindi

$$\mathcal{U}_g(y) \simeq -G \frac{M_\oplus m}{R_\oplus} \left(1 - \frac{y}{R_\oplus}\right) \simeq G \frac{M_\oplus}{R_\oplus^2} m y - G \frac{M_\oplus m}{R_\oplus} . \quad (5.40)$$

Ricordando che GM_\oplus/R_\oplus^2 è l'accelerazione di gravità, equazione (4.13), e osservando che l'ultimo termine dell'equazione precedente è costante, si può scrivere:

$$\mathcal{U}_g(y) \simeq gmy + \text{cost.} \quad (5.41)$$

che, a meno di una irrilevante costante additiva, è uguale alla (5.33).

5.1.6 LA RELAZIONE TRA FORZA ED ENERGIA POTENZIALE.

Si consideri un punto materiale che, sotto l'azione della forza conservativa *costante* \mathbf{F} , si sposti, lungo una retta, dalla posizione A designata dall'ascissa x alla posizione B designata dall'ascissa $x + \Delta x$. Il lavoro fatto dalla forza in questo semplice caso è dato da

$$\mathcal{L} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{AB} = F_x \Delta x , \quad (5.42)$$

D'altra parte, poiché la forza è conservativa, è possibile scrivere il lavoro in termini della variazione dell'energia potenziale:

$$\mathcal{L} = \mathcal{U}(A) - \mathcal{U}(B) = \mathcal{U}(x) - \mathcal{U}(x + \Delta x) = -[\mathcal{U}(x + \Delta x) - \mathcal{U}(x)] = -\Delta \mathcal{U} . \quad (5.43)$$

Ne segue che $F_x \Delta x = -\Delta \mathcal{U}$ e quindi

$$\boxed{F_x = -\frac{\Delta \mathcal{U}}{\Delta x}} . \quad (5.44)$$

L'equazione (5.44) dice che la componente x della forza è opposta alla rapidità con cui cambia l'energia potenziale all'aumentare di x , e consente di calcolare la forza una volta che sia nota l'energia potenziale come funzione della posizione.

Se la forza \mathbf{F} non è costante, l'equazione (5.44) fornisce la (componente x della) forza *media* che agisce sul punto materiale durante lo spostamento da A a B . Si confronti l'equazione (5.44) con l'equazione (2.12) che definisce la velocità media; in modo analogo a quanto fatto per definire la velocità istantanea a partire dalla velocità media, è possibile determinare la (componente x della) forza nella posizione x facendo tendere Δx a zero. Vale dunque

$$\boxed{-\frac{\Delta \mathcal{U}}{\Delta x} \xrightarrow{\Delta x \rightarrow 0} F_x} . \quad (5.45)$$

Gli esempi che seguono serviranno a chiarire la questione.

⁵ La dimostrazione per α intero è semplice, basta infatti sviluppare la potenza n -esima del binomio e osservare che i termini contenenti x^2, x^3, \dots sono trascurabili; si ottiene così:

$$(1+x)^n \simeq 1 + nx .$$

La dimostrazione per α non intero richiede le tecniche dell'analisi matematica.

CASO DELLA FORZA PESO. La forza peso è costante, si può quindi utilizzare l'equazione (5.44).

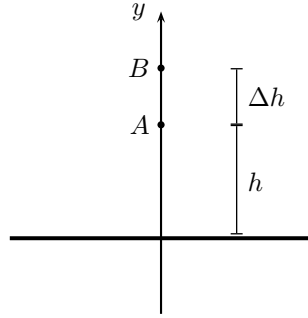


Figura 5.9: Il caso della forza peso.

Si supponga che, sotto l'azione del proprio peso, un punto materiale di massa m si sposti verso l'alto dalla posizione A di altezza y alla posizione B di altezza $y + \Delta y$; la variazione dell'energia potenziale, equazione (5.33), è quindi data da

$$\Delta \mathcal{U}_p = \mathcal{U}_p(y + \Delta y) - \mathcal{U}_p(y) = mg(y + \Delta y) - mgy = mg\Delta y, \quad (5.46)$$

quindi la componente nella direzione y della forza peso è

$$F_y = -\frac{\Delta \mathcal{U}_p}{\Delta y} = -mg, \quad (5.47)$$

il segno meno sta a indicare che la forza è diretta nel verso delle y decrescenti, cioè verso il basso.

CASO DELLA FORZA ELASTICA. La forza elastica non è costante, è quindi necessario utilizzare l'equazione (5.45). Si consideri un corpo che, sotto l'azione di una molla di costante elastica k , si sposti dalla posizione A di ascissa x alla posizione B di ascissa $x + \Delta x$; la variazione dell'energia potenziale, equazione (5.35), è quindi data da

$$\Delta \mathcal{U}_{el} = \mathcal{U}_{el}(x + \Delta x) - \mathcal{U}_{el}(x) = \frac{1}{2}k(x + \Delta x)^2 - \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}k(\Delta x)^2 + kx\Delta x; \quad (5.48)$$

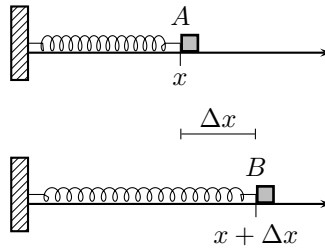


Figura 5.10: Il caso della forza elastica.

quindi

$$-\frac{\Delta \mathcal{U}_{el}}{\Delta x} = -\frac{1}{2}k\Delta x - kx \xrightarrow{\Delta x \rightarrow 0} -kx. \quad (5.49)$$

Quindi la componente nella direzione x (cioè delle x crescenti) della forza elastica è

$$F_{el} = -kx. \quad (5.50)$$

CASO DELLA FORZA GRAVITAZIONALE. La forza gravitazionale non è costante, quindi è ancora necessario usare l'equazione (5.45). Si consideri un corpo di massa m che, sotto l'azione di una forza gravitazionale dovuta alla presenza di un secondo corpo di massa M , si muova dalla posizione A , che dista r da M , alla posizione B che dista $r + \Delta r$ da M .

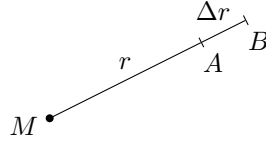


Figura 5.11: Il caso della forza gravitazionale.

La variazione dell'energia potenziale, equazione (5.37), è quindi

$$\begin{aligned}\Delta\mathcal{U}_g &= \mathcal{U}_g(r + \Delta r) - \mathcal{U}_g(r) = -G \frac{Mm}{r + \Delta r} + G \frac{Mm}{r} = \\ &= G \frac{Mm\Delta r}{r(r + \Delta r)} ;\end{aligned}\quad (5.51)$$

quindi

$$-\frac{\Delta\mathcal{U}_g}{\Delta r} = -G \frac{Mm}{r(r + \Delta r)} \xrightarrow{\Delta r \rightarrow 0} -G \frac{Mm}{r^2} . \quad (5.52)$$

Quindi la componente nella direzione delle r crescenti della forza gravitazionale è

$$F_g = -G \frac{Mm}{r^2} , \quad (5.53)$$

ove il segno meno sta a indicare che la forza è diretta nel verso delle r decrescenti, cioè è attrattiva.

5.1.7 CONSERVAZIONE DELL'ENERGIA MECCANICA.

Il teorema dell'energia cinetica, equazione (5.15), vale in ogni situazione, mentre l'energia potenziale, definita dall'equazione (5.16), è definibile solamente nel caso in cui agiscano solamente forze conservative. Quindi, in quest'ultimo caso, le due relazioni

$$\mathcal{L}_{A \rightarrow B} = \mathcal{E}_c(B) - \mathcal{E}_c(A) \quad \mathcal{L}_{A \rightarrow B} = \mathcal{U}(A) - \mathcal{U}(B) \quad (5.54)$$

valgono entrambe. Pertanto, uguagliando i secondi membri, si ottiene

$$\mathcal{E}_c(B) - \mathcal{E}_c(A) = \mathcal{U}(A) - \mathcal{U}(B) \quad \Longleftrightarrow \quad \mathcal{E}_c(A) + \mathcal{U}(A) = \mathcal{E}_c(B) + \mathcal{U}(B) . \quad (5.55)$$

Questa ultima equazione afferma che la grandezza ottenuta sommando energia cinetica ed energia potenziale è uguale nella posizione iniziale A e nella posizione finale B . Poiché le posizioni A e B sono completamente generiche, è chiaro che si sarebbe ottenuto lo stesso risultato scegliendo qualunque altra posizione. Pertanto la somma di energia cinetica e potenziale ha lo stesso valore in ogni posizione e quindi in ogni istante. Questa nuova grandezza è detta **energia meccanica** \mathcal{E} :

$$\boxed{\mathcal{E} = \mathcal{E}_c + \mathcal{U} .} \quad (5.56)$$

Vale quindi la seguente **legge di conservazione dell'energia meccanica**.

Nel caso in cui su di un punto materiale agiscano solamente forze conservative, l'energia meccanica si conserva, cioè resta costante durante il moto.

Il principio di conservazione ora enunciato giustifica il nome di forza conservativa. Non si ripeterà mai abbastanza, infatti, che l'energia meccanica si conserva *solamente* se *tutte* le forze in gioco sono conservative.

Un modo diverso di vedere il principio della conservazione dell'energia meccanica è osservare che se la somma di energia cinetica ed energia potenziale è la stessa in ogni istante del moto, è chiaro che ove una delle due diminuisca di una certa quantità l'altra deve necessariamente aumentare della stessa quantità. Questa proprietà è spesso chiamata *trasformazione dell'energia* da una

forma ad un'altra. Esistono altre forme in cui l'energia può essere trasformata; per esempio l'energia termica, studiata nell'ambito della termodinamica; l'energia chimica, che ha un ruolo importante nella formazione dei legami chimici; l'energia nucleare, che interessa la formazione e la disgregazione dei nuclei atomici. Nel caso generale, qualunque sia il processo di trasformazione a cui un sistema fisico è sottoposto, l'energia totale, cioè la somma di tutte le energie in gioco (meccanica, termica, chimica, eccetera) rimane costante. Il principio di conservazione dell'energia è dunque un principio fondamentale della fisica di cui non si conoscono eccezioni. In questi appunti si considerano solo processi meccanici, quindi l'unica energia in gioco è l'energia meccanica.

Se sono presenti forze non conservative l'energia meccanica non si conserva. La forza di attrito radente dinamico, per esempio, non è conservativa; si consideri un punto materiale che scende lungo un piano inclinato scabro; durante la discesa l'energia potenziale diminuisce mentre l'energia cinetica aumenta. Poiché l'energia meccanica non si conserva, non tutta l'energia potenziale si trasforma in energia cinetica, perché una parte viene *dissipata* dall'attrito; tale dissipazione si manifesta nel riscaldamento delle superfici a contatto.

5.1.8 ENERGIA TOTALE NEL CASO DELLA FORZA GRAVITAZIONALE.

Come esempio dell'uso del principio di conservazione dell'energia meccanica si consideri l'energia meccanica di un punto materiale P di massa m su cui agisce la forza gravitazionale di un corpo celeste sferico, come una stella o un pianeta, di massa M . Nel sistema di riferimento in cui il corpo celeste è fermo, l'energia meccanica del sistema è, in ogni istante, data dalla somma dell'energia cinetica di P e dell'energia potenziale:

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2}mv^2 - G\frac{Mm}{r}. \quad (5.57)$$

Come si vede, l'energia meccanica è negativa o positiva a seconda che prevalga l'energia potenziale o l'energia cinetica. Si esaminino i due casi uno alla volta.

$\mathcal{E} < 0$. In questo caso prevale l'energia potenziale. Se P si allontana dal corpo celeste r aumenta, quindi l'energia potenziale (negativa) aumenta, conseguentemente l'energia cinetica, e quindi la velocità, diminuiscono in modo tale che \mathcal{E} resti costante. Esiste un valore di r per il quale la velocità è nulla e l'energia totale è interamente costituita da energia potenziale; tale valore di r è la distanza massima di P dal corpo celeste. Raggiunta questa distanza massima, P si ferma e, risentendo della forza di attrazione gravitazionale del corpo celeste, ritorna verso di esso. P quindi è vincolato a muoversi attorno al corpo celeste: ne è un satellite; valgono le leggi di Kepler, P si muove lungo un'orbita ellittica.

$\mathcal{E} > 0$. In questo caso prevale l'energia cinetica. Se P si allontana dal corpo celeste v non si annulla mai perché altrimenti \mathcal{E} diverrebbe negativa; quindi quando la distanza di P dal corpo celeste è diventata infinitamente grande, e quindi l'energia potenziale è divenuta nulla, P possiede ancora una velocità diversa da zero; quindi P è sfuggito all'attrazione del corpo celeste, non ne è un satellite e per esso non valgono le leggi di Kepler; si può dimostrare che in questo caso P si muove lungo un'orbita iperbolica avente un fuoco sul corpo celeste.

Si può anzi dimostrare, in tutta generalità, anche se la dimostrazione fa uso del calcolo differenziale e quindi è fuori dalla portata di questi appunti, che la traiettoria di un punto materiale soggetto alla forza gravitazionale (4.9) è una conica la cui eccentricità e è legata all'energia meccanica da un'equazione del tipo

$$e^2 = 1 + \kappa \mathcal{E} \quad (5.58)$$

ove κ è un'opportuna costante; si hanno quindi le seguenti possibilità.

L'energia meccanica è negativa; allora l'eccentricità è minore di uno e la traiettoria è un'ellisse cioè una curva chiusa; il punto materiale quindi è un satellite che orbita attorno al corpo celeste.

L'energia meccanica è positiva; allora l'eccentricità è maggiore di uno e la traiettoria è un'iperbole cioè una curva aperta; il punto materiale quindi sfugge all'attrazione del corpo celeste.

L'energia meccanica è nulla; allora l'eccentricità è uguale a uno e la traiettoria è una parabola cioè ancora una curva aperta; il punto materiale ha l'energia minima che gli consente di sfuggire

all'attrazione del corpo celeste.

È possibile calcolare la velocità minima v_F che il punto materiale deve avere per sfuggire all'attrazione di un corpo celeste. Tale velocità è detta **velocità di fuga**. Si consideri quindi il punto materiale P di massa m sulla superficie di un corpo celeste sferico di massa M e raggio R ; si supponga che P si muova in verso opposto al centro del corpo celeste con una velocità iniziale v_F ; l'energia meccanica di P è:

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2}mv_F^2 - G\frac{Mm}{R} . \quad (5.59)$$

Si è visto che la condizione minima perché P riesca a sfuggire all'attrazione del corpo celeste è che l'energia meccanica sia nulla, deve quindi valere

$$\frac{1}{2}mv_F^2 = G\frac{Mm}{R} \quad (5.60)$$

da cui si ottiene:

$$v_F = \sqrt{\frac{2GM}{R}} . \quad (5.61)$$

La velocità di fuga dalla Terra è

$$v_F = \sqrt{\frac{2GM_\oplus}{R_\oplus}} = 11\,186\,\text{m s}^{-1} . \quad (5.62)$$

Si dice **buco nero** un corpo celeste il cui rapporto massa/raggio è così elevato da far sì che la velocità di fuga risulti maggiore della velocità della luce.

Nel caso particolare in cui un satellite si muova di moto circolare uniforme attorno ad un corpo celeste vale la (4.22); quindi l'energia meccanica diventa

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2}m\frac{GM}{r} - G\frac{Mm}{r} = -G\frac{Mm}{2r} = \frac{1}{2}\mathcal{U} = -\mathcal{E}_c . \quad (5.63)$$

Quindi energia cinetica ed energia potenziale sono legate dalla relazione

$$2\mathcal{E}_c = -\mathcal{U} . \quad (5.64)$$

Quest'ultima equazione è un caso particolare di una proprietà dei sistemi meccanici detta **teorema del viriale**.

5.2 CONSERVAZIONE DELLA QUANTITÀ DI MOTO.

5.2.1 IMPULSO.

Si consideri una forza \mathbf{F} costante agente sul punto materiale P di massa m per un intervallo di tempo Δt ; si definisce allora **impulso** \mathbf{I} di \mathbf{F} la grandezza vettoriale ottenuta dal prodotto della forza per l'intervallo di tempo:

$$\mathbf{I} = \mathbf{F}\Delta t . \quad (5.65)$$

Ha le dimensioni di una forza per un tempo, vale cioè $[I] = [t]^{-1}[l][m]$; la sua unità di misura è quindi Ns.

L'impulso è una grandezza utile nella descrizione di processi in cui intervengono forze molto intense per tempi molto brevi; l'esempio tipico è quello di un urto. Si pensi all'azione di un martello su un chiodo o ad una palla che rimbalza contro una parete. Una forza di questo tipo è detta *impulsiva*; se ne vedranno degli esempi nel seguito. Se la forza non è costante nel tempo, è

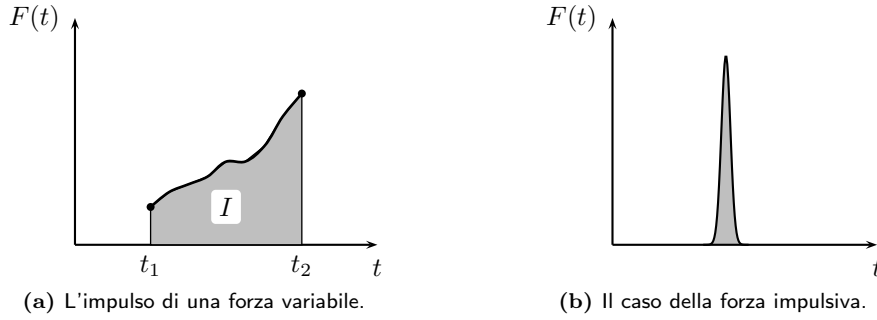


Figura 5.12: Rappresentazione grafica dell'impulso.

necessario riscrivere la (5.65) utilizzando la forza media \mathbf{F}_m agente su P nell'intervallo di tempo Δt :

$$\mathbf{I} = \mathbf{F}_m \Delta t . \quad (5.66)$$

In generale il calcolo della forza media richiede il calcolo integrale; in molti dei casi importanti, tuttavia, può essere calcolata usando l'equazione precedente, ove l'impulso viene determinato utilizzando il teorema enunciato nella prossima sezione.

Per la determinazione dell'impulso si può anche seguire il metodo grafico, come già visto nel caso del lavoro di una forza variabile *nello spazio*.

In questo caso l'impulso, il cui grafico è rappresentato in figura 5.12a, relativo all'intervallo di tempo fra gli istanti t_1 e t_2 è l'area sottostante il grafico compresa fra le ascisse degli istanti dati. Per una forza impulsiva il grafico è costituito da una curva come in figura 5.12b ove si ha una grande variazione della forza in un intervallo di tempo molto piccolo.

5.2.2 QUANTITÀ DI MOTO.

Si consideri un punto materiale P di massa m sottoposto all'azione della forza costante \mathbf{F} per un intervallo di tempo $\Delta t = t_2 - t_1$; il moto di P risulta uniformemente accelerato. In tal caso, utilizzando la legge fondamentale della dinamica (3.12) e la definizione del vettore accelerazione (2.82), l'impulso di \mathbf{F} si può scrivere nella forma seguente

$$\mathbf{I} = \mathbf{F} \Delta t = m \mathbf{a} \Delta t = m \Delta \mathbf{v} = m[\mathbf{v}(t_2) - \mathbf{v}(t_1)] . \quad (5.67)$$

La grandezza

$$\boxed{\mathbf{p}(t) = m \mathbf{v}(t) ,} \quad (5.68)$$

è detta **quantità di moto** di P all'istante t . La quantità di moto è una grandezza vettoriale il cui modulo ha le dimensioni di una massa per una velocità, vale cioè $[p] = [t]^{-1}[l][m]$; quindi la sua unità di misura è kg m s^{-1} .

Confrontando le ultime due equazioni, si può scrivere

$$\boxed{\mathbf{I} = \mathbf{p}(t_2) - \mathbf{p}(t_1) \equiv \Delta \mathbf{p} .} \quad (5.69)$$

Questa equazione esprime il **teorema dell'impulso**, che può essere enunciato come segue.

L'impulso di una forza agente su di un punto materiale in un dato intervallo di tempo è uguale alla variazione della quantità di moto del punto materiale nello stesso intervallo di tempo.

Il teorema dell'impulso, qui dimostrato nel caso in cui la forza sia costante, ha validità generale qualunque sia la forza agente.

5.2.3 CONSERVAZIONE DELLA QUANTITÀ DI MOTO.

Si considerino due punti materiali di masse m_1 ed m_2 interagenti fra loro mediante una forza costante; indicando con \mathbf{F}_1 la forza con cui il secondo agisce sul primo e con \mathbf{F}_2 quella con cui il primo agisce sul secondo, per il principio di azione e reazione, deve valere

$$\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = \mathbf{0} \quad (5.70)$$

moltiplicando la precedente equazione per l'intervallo di tempo Δt durante il quale avviene l'interazione si ottiene la seguente relazione fra gli impulsi delle due forze:

$$\mathbf{F}_1 \Delta t + \mathbf{F}_2 \Delta t = \mathbf{0} \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbf{I}_1 + \mathbf{I}_2 = \mathbf{0} . \quad (5.71)$$

Se i due punti materiali costituiscono un sistema isolato, cioè se non vi sono altri corpi interagenti con essi, per il teorema dell'impulso vale

$$\Delta \mathbf{p}_1 + \Delta \mathbf{p}_2 = \mathbf{0} . \quad (5.72)$$

Definendo *quantità di moto totale* del sistema fisico costituito dai due punti materiali la grandezza $\mathbf{P} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2$, risulta $\Delta \mathbf{P} = \Delta(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2) = \Delta \mathbf{p}_1 + \Delta \mathbf{p}_2 = \mathbf{0}$ e quindi

$$\boxed{\Delta \mathbf{P} = \mathbf{0} .} \quad (5.73)$$

La precedente equazione esprime la seguente **legge di conservazione della quantità di moto**.

In un sistema isolato di punti materiali la quantità di moto totale si conserva.

A rigore, il principio è stato dimostrato solo se vi sono due soli punti materiali che interagiscono con una forza costante; tuttavia, se la forza non è costante, basta dividere l'intervallo di tempo in tanti intervallini sufficientemente piccoli da far sì che la forza sia costante in ciascuno di essi; allora la quantità di moto si conserva in ciascuno degli intervallini e quindi nell'intervallo totale. Inoltre, se vi sono più di due punti materiali interagenti, occorre tenere conto di tutte le forze agenti su ciascuno di essi; per esempio si vi sono tre punti materiali, si ha

$$\mathbf{I}_1 = (\mathbf{F}_{21} + \mathbf{F}_{31})\Delta t \quad , \quad \mathbf{I}_2 = (\mathbf{F}_{12} + \mathbf{F}_{32})\Delta t \quad , \quad \mathbf{I}_3 = (\mathbf{F}_{13} + \mathbf{F}_{23})\Delta t . \quad (5.74)$$

ove \mathbf{F}_{21} è la forza con cui il secondo punto materiale agisce sul primo, \mathbf{F}_{31} è la forza con cui il terzo punto materiale agisce sul primo e così via. Per il principio di azione e reazione, le sei forze agenti sono a due a due opposte, quindi vale

$$\mathbf{I}_1 + \mathbf{I}_2 + \mathbf{I}_3 = \mathbf{0} \quad \Longleftrightarrow \quad \Delta \mathbf{p}_1 + \Delta \mathbf{p}_2 + \Delta \mathbf{p}_3 = \mathbf{0} \quad \Longleftrightarrow \quad \Delta \mathbf{P} = \mathbf{0} . \quad (5.75)$$

Il principio di conservazione della quantità di moto ha quindi validità generale.

5.3 CONSERVAZIONE DEL MOMENTO ANGOLARE.

5.3.1 MOMENTO DI UN VETTORE.

In questa sezione si considerano *vettori applicati*; cioè sarà rilevante il punto in cui un certo vettore è applicato: due vettori aventi la stessa direzione, lo stesso verso, lo stesso modulo, ma *diverso punto di applicazione* saranno considerati vettori *diversi*.

Dato il generico vettore \mathbf{w} , applicati in P ed il punto O , si dice **momento** di \mathbf{w} rispetto al **polo** O la grandezza $\mathbf{OP} \times \mathbf{w}$. In realtà non è necessario che P sia il punto di applicazione di \mathbf{w} ; può essere, infatti, qualsiasi altro punto P' appartenente alla retta cui appartiene \mathbf{w} . Vale infatti

$$\mathbf{OP}' \times \mathbf{w} = (\mathbf{OP} + \mathbf{PP}') \times \mathbf{w} = \mathbf{OP} \times \mathbf{w} \quad (5.76)$$

ove l'ultima uguaglianza segue dal fatto che \mathbf{PP}' e \mathbf{w} sono allineati e quindi il loro prodotto vettoriale è nullo. La scelta del punto P è determinata solo da considerazioni di convenienza. Il vettore momento è solitamente applicato al polo O , ha direzione perpendicolare al piano su cui si trovano \mathbf{w} ed O , ha per verso quello che vede la rotazione di \mathbf{OP} su \mathbf{w} svolgersi in senso antiorario e modulo uguale al modulo di \mathbf{w} per la distanza di O dalla retta cui appartiene \mathbf{w} . Il momento è nullo se O è allineato al vettore \mathbf{w} .

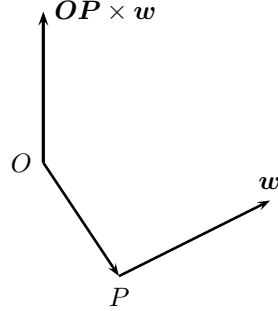


Figura 5.13: Il momento del vettore \mathbf{w} .

Frequente è il caso in cui si debba calcolare il momento di due forze \mathbf{F}_1 ed \mathbf{F}_2 applicate in due punti distinti P_1 e P_2 e aventi lo stesso modulo, la stessa direzione ma verso opposto; sia b la distanza fra le rette di applicazione come in figura 5.15.

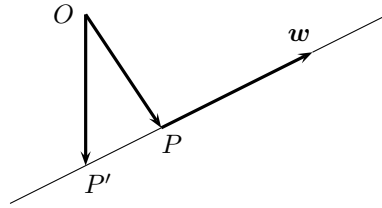


Figura 5.14: Indipendenza dalla scelta del punto P .

Le due forze in questione sono dette costituire una **coppia di forze** e b è detto **braccio** della coppia. La proprietà di una coppia di forze è che il momento M_o totale delle due forze non dipende dalla scelta del polo O .

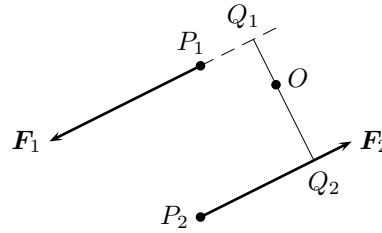


Figura 5.15: Il momento di una coppia.

Per vederlo, con riferimento alla figura 5.15, si considerino le proiezioni Q_1 e Q_2 di O rispettivamente sulle rette d'azione di \mathbf{F}_1 e \mathbf{F}_2 ; allora

$$\begin{aligned} M_o &= \mathbf{OP}_1 \times \mathbf{F}_1 + \mathbf{OP}_2 \times \mathbf{F}_2 = (\mathbf{OQ}_1 + \mathbf{Q}_1\mathbf{P}_1) \times \mathbf{F}_1 + (\mathbf{OQ}_2 + \mathbf{Q}_2\mathbf{P}_2) \times \mathbf{F}_2 = \\ &= \mathbf{OQ}_1 \times \mathbf{F}_1 + \mathbf{OQ}_2 \times \mathbf{F}_2 ; \end{aligned} \quad (5.77)$$

ricordando che $\mathbf{F}_2 = -\mathbf{F}_1$ si ottiene

$$M_o = \mathbf{OQ}_1 \times \mathbf{F}_1 - \mathbf{OQ}_2 \times \mathbf{F}_1 = (\mathbf{OQ}_1 - \mathbf{OQ}_2) \times \mathbf{F}_1 = \mathbf{Q}_2\mathbf{Q}_1 \times \mathbf{F}_1 . \quad (5.78)$$

Si vede dunque che il momento della coppia non dipende da O . Il suo modulo è

$$M_o = F_1 b \quad (5.79)$$

è cioè il prodotto fra il braccio della coppia e il modulo delle forze agenti.

5.3.2 MOMENTO ANGOLARE.

Particolarmente importante per lo studio che qui si intende fare è il momento del vettore quantità $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ del punto materiale P rispetto al polo O :

$$\boxed{\mathbf{L}_o = \mathbf{OP} \times \mathbf{p} = \mathbf{OP} \times m\mathbf{v} .} \quad (5.80)$$

Questa grandezza è detta **momento angolare**; ha le dimensioni di una lunghezza per una massa per una velocità, vale cioè $[L] = [t]^{-1}[l]^2[m]$; quindi la sua unità di misura è $\text{kg m}^2 \text{s}^{-1}$.

La direzione di \mathbf{L}_o è perpendicolare al piano che contiene \mathbf{OP} e \mathbf{v} , il verso è dato dalla regola della mano destra e il modulo è

$$L_o = mrv \sin \alpha , \quad (5.81)$$

dove r è il modulo del vettore \mathbf{OP} e α è l'angolo formato dai due vettori \mathbf{OP} e \mathbf{v} . Si consideri ora il caso particolare, ma molto importante, del moto circolare uniforme; si prenda come polo il centro O della traiettoria, allora il vettore \mathbf{OP} coincide con il vettore \mathbf{r} .

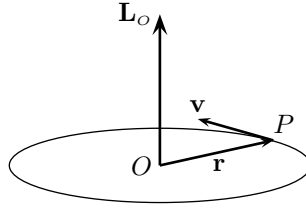


Figura 5.16: Il vettore momento angolare.

Il momento angolare è perpendicolare al piano in cui si svolge il moto e il suo verso punta nella direzione dalla quale il moto è visto svolgersi in senso antiorario (si veda la figura 5.16), inoltre poiché \mathbf{v} e \mathbf{OP} sono perpendicolari il modulo del momento angolare può essere scritto nella forma

$$L_o = mrv = mr^2\omega , \quad (5.82)$$

ove, nello scrivere l'ultima equazione, si è tenuta presente la (2.114). Ricordando la relazione (2.115) l'equazione (5.80) diviene

$$\mathbf{L}_o = \mathbf{OP} \times m(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{OP}) = mr^2\boldsymbol{\omega} . \quad (5.83)$$

ove si è usata la seconda delle (2.76).

5.3.3 CONSERVAZIONE DEL MOMENTO ANGOLARE.

È interessante determinare la rapidità istantanea di variazione nel tempo $\dot{\mathbf{L}}_o$ del momento angolare; per farlo si usa l'equazione (2.148):

$$\dot{\mathbf{L}}_o = \dot{\mathbf{OP}} \times \mathbf{p} + \mathbf{OP} \times \dot{\mathbf{p}} \quad (5.84)$$

Il primo addendo, ricordando la prima delle (2.142) e la definizione di \mathbf{p} , si può riscrivere

$$\mathbf{v} \times m\mathbf{v} = \mathbf{0} , \quad (5.85)$$

dal momento che i due vettori sono paralleli. Il secondo addendo, ricordando la seconda della (2.142), si può riscrivere

$$\mathbf{OP} \times m\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{OP} \times m\mathbf{a} = \mathbf{OP} \times \mathbf{F} \quad (5.86)$$

ove \mathbf{F} è la forza totale agente su P . La quantità trovata è il **momento della forza** totale rispetto al polo O e si indica:

$$\boxed{\mathbf{M}_o = \mathbf{OP} \times \mathbf{F} .} \quad (5.87)$$

Il momento di una forza ha le dimensioni di una forza per una lunghezza, vale cioè $[M] = [t]^{-2}[l]^2[m]$; quindi la sua unità di misura è N m.

È stato così dimostrato il **teorema del momento angolare**, espresso dalla seguente equazione:

$$\boxed{M_o = \dot{L}_o} \quad (5.88)$$

Si noti che i due momenti che compaiono in questa equazione sono calcolati rispetti allo *stesso* polo. La precedente equazione è valida solo se il polo O è fermo; se la sua velocità fosse diversa da zero occorrerebbe modificarla; in questi appunti si considera solo il caso in cui $\mathbf{v}_o = \mathbf{0}$.

Nel caso particolare in cui il momento della forza totale sia nullo, perché è nulla la forza stessa o perché è parallela al vettore \mathbf{OP} , la rapidità istantanea di variazione del momento angolare è nulla, cioè il momento angolare rimane costante. È questa la **legge di conservazione del momento angolare**.

Se il momento totale delle forze agenti su di un punto materiale è nullo, il momento angolare del punto materiale si conserva.

5.4 FORZE CENTRALI.

Le forze centrali, che svolgono un ruolo fondamentale nello studio della dinamica del punto materiale, sono un esempio particolarmente felice per mostrare l'utilità dei concetti visti in questo capitolo. Si dice **centrale** una forza che verifichi le seguenti condizioni.

1. Qualunque sia il punto P dello spazio in cui trova il punto materiale, la forza \mathbf{F} agente su di esso è diretta secondo la retta passante per P e per un punto fisso O detto **centro di forza**.
2. Il modulo della forza \mathbf{F} dipende solamente dalla distanza di P dal centro, cioè dal modulo r del vettore \mathbf{OP} .

Una forza centrale può essere *attrattiva* o *repulsiva* a seconda che sia diretta verso il centro o dal centro verso l'esterno, cioè a seconda che abbia lo stesso verso di \mathbf{PO} o di \mathbf{OP} rispettivamente. Le proprietà delle forze centrali sono le seguenti.

A. *Le forze centrali sono conservative ed è sempre possibile definire una funzione energia potenziale $U(r)$ che dipenda solo dalla distanza dal centro.*

La dimostrazione di questo fatto nel caso più generale richiede l'uso del calcolo integrale ed è quindi al di là dei limiti di questi appunti; tuttavia ne sono esempi la forza elastica e la forza gravitazionale viste sopra.

B. *Il momento di una forza centrale, calcolato rispetto al centro, è nullo.*

Questa proprietà è una semplice conseguenza della definizione di momento di una forza (5.87) e del fatto che nel caso che la forza sia centrale \mathbf{F} e \mathbf{OP} hanno la stessa direzione e quindi il loro prodotto vettoriale è nullo.

C. *Il momento angolare di un punto materiale sottoposto ad una forza centrale è costante.*

Questa proprietà segue direttamente dalla precedente per la legge di conservazione del momento angolare.

D. *Un punto materiale sotto l'azione di una forza centrale si muove di moto piano.*

Infatti dall'equazione (5.80) segue che il vettore \mathbf{OP} è perpendicolare al vettore \mathbf{L}_o che, per la proprietà C, è costante; in particolare è costante la sua direzione, quindi \mathbf{OP} è perpendicolare ad una direzione costante, quindi P si muove necessariamente sul piano passante per O e perpendicolare alla direzione di \mathbf{L}_o .

E. *La velocità areolare di un punto materiale in moto sotto l'azione di una forza centrale è costante.* Si tratta pertanto di calcolare l'area spazzata dal raggio vettore nell'intervallo di tempo Δt in cui percorre un angolo $\Delta\theta$.

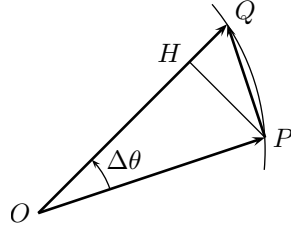


Figura 5.17: Calcolo della velocità areolare.

Se l'intervallo di tempo, come qui si suppone, è abbastanza piccolo, tale area può essere approssimata a quella del triangolo OPQ (si veda la figura 5.17) che è

$$\Delta A = \frac{1}{2} OQ \cdot PH, \quad (5.89)$$

osservando che vale $PH = OP \sin \Delta\theta$, si può riscrivere

$$\Delta A = \frac{1}{2} OQ \cdot OP \sin \Delta\theta = \frac{1}{2} \|\mathbf{OP} \times \mathbf{OQ}\| = \frac{1}{2} \|\mathbf{OP} \times (\mathbf{OP} + \mathbf{PQ})\| \quad (5.90)$$

ove si è usato il fatto che $\mathbf{OQ} = \mathbf{OP} + \mathbf{PQ}$. Osservando che $\mathbf{OP} \times \mathbf{OP} = \mathbf{0}$, si ottiene

$$\Delta A = \frac{1}{2} \|\mathbf{OP} \times \mathbf{PQ}\|, \quad (5.91)$$

ma \mathbf{PQ} è il vettore spostamento, vale quindi, $\mathbf{PQ} = \mathbf{v}\Delta t$; così:

$$\Delta A = \frac{1}{2} \|\mathbf{OP} \times \mathbf{v}\Delta t\| = \frac{1}{2} \|\mathbf{OP} \times \mathbf{v}\| \Delta t \quad (5.92)$$

e quindi, dividendo per Δt , si ottiene la velocità areolare:

$$\frac{\Delta A}{\Delta t} = \frac{1}{2} \|\mathbf{OP} \times \mathbf{v}\| = \frac{1}{2m} \|\mathbf{OP} \times m\mathbf{v}\| = \frac{\|\mathbf{L}_o\|}{2m}. \quad (5.93)$$

Pertanto dalla costanza del momento angolare discende la costanza della velocità areolare. Ricordando che la forza gravitazionale è centrale, si vede che la seconda legge di Kepler non è altro che una conseguenza della conservazione del momento angolare del pianeta.

Parte II

MECCANICA DEI SISTEMI MATERIALI.

6

DINAMICA DEI SISTEMI MATERIALI.

In questo capitolo si affronta lo studio del moto di un sistema fisico che possa essere rappresentato teoricamente mediante un insieme di N punti materiali. Tale insieme è detto semplicemente **sistema materiale**. In realtà ci si è già avvicinati al problema quando è stata presentata la conservazione della quantità di moto di un sistema isolato di punti materiali. Qui si studia in dettaglio quali sono le leggi che ne descrivono il moto.

Si indichi quindi con P_i l' i -esimo punto materiale ($i = 1, \dots, N$), con m_i la sua massa, con \mathbf{v}_i la sua velocità, con \mathbf{a}_i la sua accelerazione e con \mathbf{F}_i la risultante delle forze agenti su di esso in un dato istante.

6.1 FORZE INTERNE ED ESTERNE.

Le forze agenti su P_i possono essere di due tipi: quelle esercitate da altri punti materiali del sistema, dette **forze interne**, e quelle dovute a punti materiali esterni al sistema, dette **forze esterne**.

La risultante di tutte le forze interne agenti sul sistema materiale è nulla. Infatti se il punto i -esimo esercita una forza \mathbf{F}_{ji} sul punto j -esimo è chiaro che, per il principio di azione e reazione, il punto j -esimo esercita sul punto i -esimo una forza \mathbf{F}_{ij} uguale e contraria, vale cioè

$$\mathbf{F}_{ij} = -\mathbf{F}_{ji} , \quad (6.1)$$

pertanto la loro somma è zero.

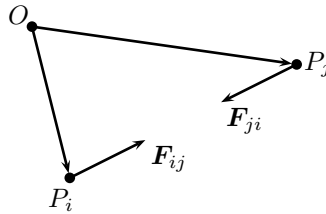


Figura 6.1: Il momento delle forze interne.

Le forze interne \mathbf{F}_{ij} e \mathbf{F}_{ji} hanno anche momento totale nullo rispetto ad un qualunque polo O ; con riferimento alla figura 6.1, tale momento è

$$\mathbf{M}_O^{ij} = \mathbf{OP}_i \times \mathbf{F}_{ij} + \mathbf{OP}_j \times \mathbf{F}_{ji} ; \quad (6.2)$$

da cui, usando la (6.1),

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_O^{ij} &= \mathbf{OP}_i \times \mathbf{F}_{ij} - \mathbf{OP}_j \times \mathbf{F}_{ij} = \\ &= (\mathbf{OP}_i - \mathbf{OP}_j) \times \mathbf{F}_{ij} = \\ &= \mathbf{P}_j \mathbf{P}_i \times \mathbf{F}_{ij} = 0 ; \end{aligned} \quad (6.3)$$

l'ultima uguaglianza è dovuta al fatto che i vettori $\mathbf{P}_j \mathbf{P}_i$ e \mathbf{F}_{ij} sono paralleli.

Quanto detto è vero per qualunque coppia di punti materiali del sistema e per qualsiasi scelta del polo. Le forze interne sono quindi raggruppabili in coppie aventi sia risultante che momento risultante nullo. Per qualunque sistema materiale vale pertanto la seguente proprietà.

La risultante ed il momento risultante rispetto ad un qualsiasi polo O di tutte le forze interne di un sistema di punti materiali sono nulli.

6.2 EQUAZIONI CARDINALI.

L'equazione del moto dell' i -esimo punto materiale P_i è

$$\mathbf{F}_i = \mathbf{F}_i^I + \mathbf{F}_i^E = m_i \mathbf{a}_i, \quad (6.4)$$

dove \mathbf{F}_i^I è la risultante delle forze interne e \mathbf{F}_i^E la risultante delle forze esterne agenti su P_i . Sommando i contributi di tutti gli N punti materiali del sistema e usando il fatto che la risultante delle forze interne è zero, si trova¹

$$\mathbf{F}^E = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i^E = \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{a}_i. \quad (6.5)$$

D'altra parte, per ogni punto materiale vale

$$\mathbf{F}_i = m_i \mathbf{a}_i = m_i \dot{\mathbf{v}}_i = \dot{\mathbf{p}}_i. \quad (6.6)$$

Si può allora scrivere

$$\mathbf{F}^E = \sum_{i=1}^N \dot{\mathbf{p}}_i. \quad (6.7)$$

Definendo la quantità di moto totale del sistema

$$\mathbf{P} = \sum_{i=1}^N \mathbf{p}_i \quad (6.8)$$

e usando la (2.145), si trova

$$\dot{\mathbf{P}} = \sum_{i=1}^N \dot{\mathbf{p}}_i; \quad (6.9)$$

quindi, in definitiva, vale

$$\boxed{\mathbf{F}^E = \dot{\mathbf{P}}}. \quad (6.10)$$

Questa equazione, che mette in relazione la risultante delle forze esterne agenti su un sistema materiale con la rapidità di variazione nel tempo della quantità di moto totale del sistema, è detta **prima equazione cardinale** ed è l'estensione della legge fondamentale (3.12) alla dinamica dei sistemi.

Dalla (6.10) segue in particolare che se il sistema materiale è isolato, cioè se la risultante delle forze esterne è nulla, la quantità di moto totale del sistema materiale è costante nel tempo. Questo è vero per ogni componente; cioè se, per esempio, è nulla la componente x della risultante delle forze esterne, vale

$$F_x = \dot{P}_x = 0 \quad \implies \quad P_x = \text{cost.} \quad (6.11)$$

Quindi se è nulla la risultante delle forze esterne lungo una sola direzione, si conserva solo la componente della quantità di moto secondo quella direzione.

Applicando l'equazione (5.88) a ciascuno dei punti materiali che costituiscono il sistema materiale in questione si trova, rispetto al generico polo O

$$O\mathbf{P}_i \times \mathbf{F}_i = O\mathbf{P}_i \times (\mathbf{F}_i^I + \mathbf{F}_i^E) = \dot{\mathbf{L}}_{oi}. \quad (6.12)$$

¹ Si usa qui la comoda notazione di *sommatoria*, che rappresenta la somma di tutti gli oggetti denotati da un certo indice che varia in un dato intervallo; dati per esempio gli oggetti a_i , con $i = 1, \dots, N$, vale:

$$\sum_{i=1}^N a_i = a_1 + \dots + a_N.$$

La notazione si applica anche agli indici ripetuti quindi: $\sum_{i=1}^N a_i b_i = a_1 b_1 + \dots + a_N b_N$.

Ricordando che il momento totale delle forze interne è nullo e sommando su tutti punti materiali si ottiene

$$\mathbf{M}_o^E = \sum_{i=1}^N \mathbf{OP}_i \times \mathbf{F}_i^E = \sum_{i=1}^N \dot{\mathbf{L}}_{oi} ; \quad (6.13)$$

definendo ora **momento angolare totale** del sistema materiale la quantità

$$\mathbf{L}_o = \sum_{i=1}^N \mathbf{L}_{oi} , \quad (6.14)$$

si ottiene

$$\boxed{\mathbf{M}_o^E = \dot{\mathbf{L}}_o} . \quad (6.15)$$

Questa equazione, che mette in relazione il momento delle forze esterne agenti su un sistema materiale con la variazione nel tempo del momento angolare totale del sistema, è detta **seconda equazione cardinale** ed è la generalizzazione ai sistemi del teorema del momento angolare visto per il punto materiale.

Similmente a quanto visto per la prima equazione cardinale, se il momento totale delle forze esterne agenti sul sistema è nullo il momento angolare totale si conserva e se è nullo il momento totale delle forze esterne lungo una direzione, si conserva la componente del momento angolare secondo quella direzione .

Conseguenza di quanto visto è la seguente affermazione.

La quantità di moto totale ed il momento angolare totale di un sistema materiale isolato sono grandezze conservate.

6.3 CENTRO DI MASSA.

Utilizzando la prima delle (2.142), la quantità di moto totale di un sistema materiale si può scrivere nella forma:

$$\mathbf{P} = \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{v}_i = \sum_{i=1}^N m_i \dot{\mathbf{OP}}_i . \quad (6.16)$$

Si definisce **centro di massa** del sistema al punto G la cui posizione è individuata dal vettore:

$$\boxed{\mathbf{OG} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{OP}_i} , \quad (6.17)$$

ove

$$m = \sum_{i=1}^N m_i \quad (6.18)$$

è la massa totale del sistema materiale. Confrontando (6.16) e (6.17) si ottiene

$$\mathbf{P} = \sum_{i=1}^N m_i \dot{\mathbf{OP}}_i = m \dot{\mathbf{OG}} = m \mathbf{v}_G . \quad (6.19)$$

La quantità di moto totale del sistema materiale è quindi uguale alla quantità di moto di un singolo punto materiale avente la massa dell'intero sistema e la velocità del centro di massa.

La precedente equazione consente di ricavare, in ogni istante, la velocità del centro di massa in termini delle velocità dei punti materiali che compongono il sistema; vale infatti

$$\mathbf{v}_G = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^N m_i \dot{\mathbf{OP}}_i \quad (6.20)$$

quindi

$$\mathbf{v}_G = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{v}_i . \quad (6.21)$$

Dalla prima equazione cardinale (6.10) si trova inoltre

$$\mathbf{F}^E = \dot{\mathbf{P}} = m\dot{\mathbf{v}}_G = m\mathbf{a}_G , \quad (6.22)$$

esprimente il seguente **teorema del centro di massa**.

Il centro di massa di un sistema materiale si muove come un punto materiale di massa uguale alla massa dell'intero sistema e sottoposto ad una forza uguale alla risultante delle forze esterne agenti sul sistema.

Il teorema ora trovato non è altro che la prima equazione cardinale scritta in termini del moto del centro di massa; si tratta però di un risultato di estrema importanza. In effetti, pur perdendo ogni informazione sul moto delle sue singole parti, esso permette di ricondurre la dinamica dell'intero sistema a quella del solo centro di massa; in altre parole, nota che sia la risultante \mathbf{F}^E delle forze esterne, comunque si muovano i punti materiali che costituiscono il sistema, il centro di massa si muove come se la forza risultante agisse solo su di esso. Si tenga presente che il centro di massa *non* è un punto materiale; anzi può capitare che in G non vi sia alcun punto del sistema.

Il teorema del centro di massa ha due importanti conseguenze.

1. *Se il sistema materiale è isolato il suo centro di massa si muove di moto rettilineo uniforme.*
In particolare se il centro di massa di un sistema isolato è fermo in un dato istante esso rimane fermo durante tutta l'evoluzione dinamica del sistema. Come esempio, si consideri un ordigno esplosivo fermo, al momento dell'esplosione (dovuta a meccanismi interni e non a forze esterne) i vari pezzi in cui si disgrega l'ordigno si disperdono in tutte le direzioni, ma il loro centro di massa rimane fermo; si veda su questo punto anche la sezione 7.6.
2. *La risultante di tutte le forze peso agenti sui punti del sistema materiale è un vettore applicato nel centro di massa G che, pertanto viene detto **centro di gravità o baricentro**.*
Infatti rispetto al generico polo O si trova

$$\mathbf{M}_O = \sum_{i=1}^N \mathbf{OP}_i \times m_i \mathbf{g} = \left(\sum_{i=1}^N m_i \mathbf{OP}_i \right) \times \mathbf{g} = m\mathbf{OG} \times \mathbf{g} = \mathbf{OG} \times m\mathbf{g} . \quad (6.23)$$

Quindi l'insieme di tutte le forze peso può essere sostituito dalla sua risultante applicata in G ; in particolare il momento delle forze peso calcolato rispetto a G è nullo, si ha infatti

$$\mathbf{M}_G = \mathbf{GG} \times m\mathbf{g} = \mathbf{0} . \quad (6.24)$$

6.4 ENERGIA CINETICA DI UN SISTEMA MATERIALE.

L'energia cinetica totale di un sistema materiale è la somma delle energie cinetiche di ciascun punto materiale componente il sistema

$$\mathcal{E}_c = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i v_i^2 , \quad (6.25)$$

dove qui la velocità dei punti materiali è misurata rispetto ad un generico punto O . Introducendo un secondo sistema di riferimento centrato nel centro di massa G del sistema e ricordando la legge di composizione delle velocità (2.160), per le velocità dei punti vale la relazione

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_G + \mathbf{u}_i , \quad (6.26)$$

dove \mathbf{v}_G è la velocità di G rispetto a O e \mathbf{u}_i è la velocità dell' i -esimo punto materiale rispetto a G . Si osservi ora che

$$v_i^2 = \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_i = (\mathbf{v}_G + \mathbf{u}_i) \cdot (\mathbf{v}_G + \mathbf{u}_i) = v_G^2 + u_i^2 + 2\mathbf{v}_G \cdot \mathbf{u}_i ; \quad (6.27)$$

sostituendo questo risultato nell'equazione (6.25) si ottiene

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_c &= \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i v_G^2 + \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i u_i^2 + \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{v}_G \cdot \mathbf{u}_i = \\ &= \frac{1}{2} m v_G^2 + \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i u_i^2 + \mathbf{v}_G \cdot \left(\sum_{i=1}^N m_i \mathbf{u}_i \right) . \end{aligned} \quad (6.28)$$

Si consideri ora la quantità fra parentesi nell'ultimo addendo: essa è la quantità di moto totale del sistema materiale calcolata nel sistema di riferimento del centro di massa; ma ricordando l'equazione (6.19), la quantità di moto totale del sistema è pari alla massa totale per la velocità del centro di massa; poiché la velocità del centro di massa nel sistema del centro di massa è nulla è chiaro che la quantità fra parentesi è nulla. Ciò può anche essere dimostrato analiticamente:

$$\sum_{i=1}^N m_i \mathbf{u}_i = \sum_{i=1}^N m_i (\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_G) = \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{v}_i - m \mathbf{v}_G = m \mathbf{v}_G - m \mathbf{v}_G = \mathbf{0} , \quad (6.29)$$

ove è stata usata la (6.21). In conclusione, resta dimostrata la seguente importante equazione

$$\boxed{\mathcal{E}_c = \frac{1}{2} m v_G^2 + \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i u_i^2 ,} \quad (6.30)$$

esprimente il seguente **teorema di König**.²

L'energia cinetica totale di un sistema materiale calcolata rispetto ad un certo sistema di riferimento è in ogni istante uguale alla somma dell'energia cinetica di un punto materiale avente massa uguale alla massa totale del sistema e velocità uguale alla velocità del centro di massa e dell'energia cinetica del sistema materiale calcolata nel sistema del centro di massa.

Il teorema dell'energia cinetica si estende, al caso dei sistemi materiali, in modo ovvio: la variazione di energia cinetica totale di un sistema materiale è uguale al lavoro compiuto dalle forze *interne ed esterne* sul sistema. Il lavoro delle forze esterne è uguale alla variazione del primo addendo dell'equazione (6.30), mentre il lavoro delle forze interne è uguale alla variazione del secondo addendo.

Discorso simile vale per la conservazione dell'energia meccanica: se tutte le forze agenti sul sistema materiale, *interne ed esterne*, sono conservative, l'energia totale del sistema, cioè la somma dell'energia cinetica, data dalla (6.30), e di tutte le energie potenziali di tutte le forze agenti, interne ed esterne, è una costante.

INTERMEZZO. PROBLEMA DEI DUE CORPI. MASSA RIDOTTA.

Come prima importante applicazione del concetto di centro di massa, in questo paragrafo si studia il *problema dei due corpi*. Con tale nome si indica il problema dinamico di due punti materiali P_1 e P_2 che interagiscono solamente fra di loro e quindi costituiscono un sistema isolato.

² Johann Samuel König (1712–1757), matematico tedesco.

Ciò significa che le due forze agenti sui due punti sono uguali in modulo e in direzione e contrarie in verso, vale cioè

$$\mathbf{F}_1 = -\mathbf{F}_2 . \quad (6.31)$$

Non è necessario fare alcuna ipotesi sulla natura della forza di interazione dei due punti materiali, rimanendo quindi inteso che tutto ciò che segue è vero qualunque sia tale forza. La posizione e la velocità del centro di massa G del sistema sono date dalle equazioni (6.17) e (6.21):

$$m\mathbf{OG} = m_1\mathbf{OP}_1 + m_2\mathbf{OP}_2 \quad , \quad m\mathbf{v}_G = m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2 . \quad (6.32)$$

La soluzione del problema dinamico dei due corpi è particolarmente semplice se si sceglie il sistema di riferimento del centro di massa G , cioè scegliendo il punto O coincidente con G ; in tal caso la prima delle (6.32) diventa

$$m_1\mathbf{GP}_1 + m_2\mathbf{GP}_2 = \mathbf{0} . \quad (6.33)$$

Indicando con \mathbf{r} , il vettore distanza fra i due punti materiali, vale

$$\mathbf{r} = \mathbf{P}_2\mathbf{P}_1 = \mathbf{GP}_1 - \mathbf{GP}_2 ; \quad (6.34)$$

Dalla (6.33) si ricava

$$\mathbf{GP}_2 = -\frac{m_1}{m_2}\mathbf{GP}_1 \quad (6.35)$$

che, sostituita nella (6.34), dà

$$\mathbf{r} = \mathbf{GP}_1 + \frac{m_1}{m_2}\mathbf{GP}_1 = \frac{m_1 + m_2}{m_2}\mathbf{GP}_1 \quad (6.36)$$

da cui

$$\begin{cases} \mathbf{GP}_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \mathbf{r} \\ \mathbf{GP}_2 = -\frac{m_1}{m_1 + m_2} \mathbf{r} . \end{cases} \quad (6.37)$$

Si osservi inoltre che, definendo la quantità $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}$, si ottiene

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{GP}}_1 - \dot{\mathbf{GP}}_2 = \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2 , \quad (6.38)$$

ove \mathbf{u}_1 e \mathbf{u}_2 sono le velocità di P_1 e P_2 rispetto a G ed, evidentemente, \mathbf{v} è la loro velocità relativa, si veda l'equazione (2.154).

Per trovare la relazione fra le velocità rispetto al centro di massa \mathbf{u}_1 ed \mathbf{u}_2 e le velocità \mathbf{v}_1 e \mathbf{v}_2 si usa la (6.26) insieme alla seconda delle (6.32); con pochi calcoli, che vengono lasciati alla cura del lettore studioso, si ottiene

$$\mathbf{u}_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2}(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) \quad , \quad \mathbf{u}_2 = -\frac{m_1}{m_1 + m_2}(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) . \quad (6.39)$$

Con queste definizioni, le leggi del moto dei due punti materiali

$$\mathbf{a}_1 = \frac{\mathbf{F}_1}{m_1} \quad , \quad \mathbf{a}_2 = \frac{\mathbf{F}_2}{m_2} \quad (6.40)$$

sottratte membro a membro diventano

$$\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2 = \frac{\mathbf{F}_1}{m_1} - \frac{\mathbf{F}_2}{m_2} = \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) \mathbf{F}_1 , \quad (6.41)$$

ove si è usata la (6.31).

Posto $\mathbf{a} = \mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2$, che è l'accelerazione relativa dei due punti materiali, e definendo m_R tale che sia

$$\frac{1}{m_R} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \quad \Longleftrightarrow \quad m_R = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} , \quad (6.42)$$

l'equazione (6.41) diventa

$$\mathbf{F}_1 = m_R \mathbf{a} , \quad (6.43)$$

quindi il problema di due corpi, studiato rispetto al centro di massa, è equivalente al problema di un unico punto materiale di massa m_R sotto l'azione della forza \mathbf{F}_1 . La massa m_R è detta **massa ridotta**. Una volta risolta l'equazione (6.43), e determinata la legge oraria del moto $\mathbf{r}(t)$, è possibile determinare il moto dei due punti materiali P_1 e P_2 rispetto a G , e pertanto $\mathbf{GP}_1(t)$ e $\mathbf{GP}_2(t)$ usando le (6.37). Ricavato il moto nel sistema del centro di massa è possibile ricavarlo rispetto ad un qualunque punto O osservando che vale $\mathbf{OP} = \mathbf{OG} + \mathbf{GP}$, quindi tramite le (6.37) si ottiene

$$\begin{cases} \mathbf{OP}_1 = \mathbf{OG} + \frac{m_2}{m_1 + m_2} \mathbf{r} \\ \mathbf{OP}_2 = \mathbf{OG} - \frac{m_1}{m_1 + m_2} \mathbf{r} \end{cases} . \quad (6.44)$$

L'energia cinetica del sistema calcolata nel sistema di riferimento del centro di massa, usando il teorema di König e osservando che $\mathbf{v}_G = \mathbf{0}$, diventa

$$\mathcal{E}_c = \frac{1}{2} m_1 u_1^2 + \frac{1}{2} m_2 u_2^2 . \quad (6.45)$$

Usando la (6.39) e osservando che $\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 = \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2 = \mathbf{v}$, si trova

$$\mathcal{E}_c = \frac{1}{2} m_1 \frac{m_2^2}{(m_1 + m_2)^2} v^2 + \frac{1}{2} m_2 \frac{m_1^2}{(m_1 + m_2)^2} v^2 = \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} v^2 ; \quad (6.46)$$

quindi

$$\mathcal{E}_c = \frac{1}{2} m_R v^2 . \quad (6.47)$$

Analogamente il momento angolare nel sistema di riferimento del centro di massa, cioè scegliendo come polo G , diventa

$$\mathbf{L}_G = \mathbf{GP}_1 \times m_1 \mathbf{v}_1 + \mathbf{GP}_2 \times m_2 \mathbf{v}_2 . \quad (6.48)$$

Utilizzando la (6.35), la precedente si scrive:

$$\mathbf{L}_G = \mathbf{GP}_1 \times m_1 \mathbf{v}_1 - \mathbf{GP}_1 \times m_1 \mathbf{v}_2 = \mathbf{GP}_1 \times m_1 (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) = \mathbf{GP}_1 \times m_1 \mathbf{v} ; \quad (6.49)$$

da cui, finalmente, usando la prima delle (6.37):

$$\mathbf{L}_G = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \mathbf{r} \times \mathbf{v} = \mathbf{r} \times m_R \mathbf{v} . \quad (6.50)$$

Come si vede, dunque, tutte le grandezze dinamiche del sistema di due corpi possono essere scritte nel sistema di riferimento del centro di massa come riferite ad un solo corpo avente per massa la massa ridotta avente la posizione e la velocità relative fra i due corpi.

Nel caso in cui i due punti materiali abbiano la stessa massa, cioè sia $m_1 = m_2$, la massa ridotta è la metà di ciascuna massa.

Nel caso uno dei due punti materiali sia molto più massivo dell'altro, il centro di massa del sistema coincide praticamente con la massa maggiore che quindi può essere considerata ferma; in questo caso la massa ridotta coincide praticamente con la massa minore; infatti se $m_1 \ll m_2$ e quindi $m_1/m_2 \ll 1$, vale

$$m_R = m_1 \frac{1}{1 + \frac{m_1}{m_2}} \simeq m_1 \left(1 - \frac{m_1}{m_2} \right) \simeq m_1 . \quad (6.51)$$

ove è stata usata l'approssimazione di cui alla nota 5 del capitolo 5.

Quest'ultimo caso è particolarmente rilevante nel caso in cui si studi il sistema corpo celeste-satellite, usando il modello di punti materiali interagenti solo fra loro; in questo caso infatti è un'ottima approssimazione considerare il corpo celeste fermo nel centro di massa del sistema ed il satellite in moto sotto l'azione di una forza diretta verso il centro. In effetti in tutti i calcoli

precedentemente effettuati utilizzando l'interazione fra un corpo celeste ed un suo satellite si è sempre tacitamente fatta l'approssimazione di considerare il corpo celeste fermo. Un calcolo esatto richiede l'utilizzo, al posto della massa del satellite quello della massa ridotta del sistema. È interessante vedere come si risolve il problema del moto di un pianeta intorno al Sole usando il metodo della massa ridotta. Conviene inoltre utilizzare le coordinate polari, per le quali si rimanda all'appendice C.

La massa ridotta fra il Sole e il pianeta è quindi

$$m_R = \frac{M_\odot m}{M_\odot + m} \quad (6.52)$$

L'energia meccanica del sistema diviene

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} m_R v^2 - \frac{GM_\odot m}{r} \quad (6.53)$$

che in coordinate polari diventa

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} m_R (\dot{r}^2 + \omega^2 r^2) - \frac{GM_\odot m}{r} \quad (6.54)$$

In coordinate polari il momento angolare (6.50) diventa

$$\mathbf{L}_G = \mathbf{r} \times m_R (\dot{r} \hat{\mathbf{p}} + r \omega \hat{\boldsymbol{\zeta}}) = \mathbf{r} \times m_R r \omega \hat{\boldsymbol{\zeta}} = m_R r^2 \omega \quad (6.55)$$

ove, nell'ultimo passaggio si è usato il fatto che ω è un vettore perpendicolare al piano individuato da $\hat{\mathbf{p}}$ e $\hat{\boldsymbol{\zeta}}$. Quindi, in particolare,

$$L_G^2 = m_R^2 r^4 \omega^2 \quad \Longleftrightarrow \quad m_R \omega^2 r^2 = \frac{L_G^2}{m_R r^2} . \quad (6.56)$$

Con questa sostituzione l'energia meccanica quindi diventa

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} m_R \dot{r}^2 + \frac{L_G^2}{m_R r^2} - \frac{GM_\odot m}{r} \quad (6.57)$$

Ricordando che per la forza gravitazionale, che è una forza centrale, si ha conservazione sia dell'energia meccanica che del momento angolare, nell'equazione precedente l'unica grandezza non costante è r e la sua rapidità di variazione \dot{r} . Una tale equazione, detta equazione differenziale, può essere risolta con tecniche che richiedono il calcolo integrale e quindi sono al di fuori della portata di questi appunti. Pare comunque interessante dare il risultato finale che rappresenta l'equazione, in coordinate polari, della traiettoria nel sistema del centro di massa:

$$r = \frac{\ell}{1 - e \cos \theta} . \quad (6.58)$$

Questa è l'equazione in coordinate polari di una conica di eccentricità e ; la relazione di e con i parametri fisici del problema è:

$$e^2 = 1 + \frac{2L_G^2}{G^2 M_\odot^2 m^2 m_R^2} \mathcal{E} \quad (6.59)$$

e ℓ è un parametro dato da

$$\ell = \frac{L_G^2}{GM_\odot m m_R} . \quad (6.60)$$

Si osservi che l'equazione dell'eccentricità ha esattamente la forma (5.58), quindi le considerazioni svolte nel paragrafo 5.1.8 ricevono qui una conferma.

7

URTI.

Due punti materiali che si urtano possono essere considerati, con ottima approssimazione, un sistema isolato.

La giustificazione di questa affermazione sta nel fatto che durante l'urto le forze in gioco sono impulsive e quindi sono molto più grandi delle altre forze eventualmente presenti, come per esempio la forza peso.

Per rendersi conto di ciò si veda il seguente semplice esempio. Si consideri una pallina di gomma di massa m che cada al suolo da un'altezza h ; si vuole fare una stima della forza media che agisce sulla pallina durante l'urto con il suolo.

La pallina tocca il suolo con velocità $v = \sqrt{2gh}$; a questo punto comincia a deformarsi, a schiacciarsi, fino a fermarsi. Si supponga inoltre che durante la deformazione sulla pallina agisca una forza costante e quindi che essa si muova di moto uniformemente decelerato scendendo di un'ulteriore distanza d fino a fermarsi in un tempo τ . La velocità media v_m di un moto uniformemente accelerato, si veda l'equazione (2.26), è la media delle velocità iniziale e finale, quindi nel caso presente si ha:

$$v_m = \frac{v + 0}{2} = \sqrt{\frac{gh}{2}} ; \quad (7.1)$$

il tempo impiegato dalla pallina a fermarsi, dopo aver percorso lo spazio d , è quindi

$$\tau = \frac{d}{v_m} = d\sqrt{\frac{2}{gh}} . \quad (7.2)$$

Se \mathbf{F} è la forza costante agente sulla pallina, per il teorema dell'impulso vale

$$\mathbf{F}\tau = -m\mathbf{v} ; \quad (7.3)$$

il modulo di questa forza è quindi

$$F = \frac{mv}{\tau} = \frac{h}{d}mg \quad (7.4)$$

La forza impulsiva che agisce sulla pallina durante l'urto sta al peso della stessa come l'altezza da cui cade sta alla deformazione subita durante l'urto.

Per fare una stima di quanto sia il rapporto in questione, pare ragionevole supporre che per una caduta di qualche metro, la deformazione sia di pochi millimetri; posto quindi $h = 1.5$ m e $d = 0.5$ cm, si ottiene

$$F = 300 mg . \quad (7.5)$$

Quindi l'approssimazione che trascura la forza peso in confronto alla forza impulsiva dell'urto è buona.

7.1 I DIVERSI TIPI DI URTO.

Si considerino due corpi ai quali sia applicabile il modello di punto materiale, siano m_1 ed m_2 le loro masse. Si supponga che i due punti materiali vengano in contatto ad un certo istante e siano rispettivamente \mathbf{v}_1 e \mathbf{v}_2 le loro velocità prima dell'urto e \mathbf{V}_1 e \mathbf{V}_2 le loro velocità dopo l'urto.

Poiché si sta supponendo che il sistema costituito dai due punti materiali sia isolato, non vi sono forze esterne; la variazione di energia cinetica a causa dell'urto è quindi dovuta solo al lavoro delle forze interne impulsive che i due punti materiali si scambiano durante l'urto. Indicando con \mathcal{L}^I tale lavoro (negativo) vale

$$\mathcal{E}_{cf} - \mathcal{E}_{ci} = \mathcal{L}^I . \quad (7.6)$$

Nel caso particolare (e ideale) in cui il lavoro delle forze interne sia nullo, l'energia cinetica totale si mantiene costante; un tale urto è detto **elastico**. Viceversa se il lavoro delle forze interne è diverso da zero, l'energia cinetica totale dopo l'urto è minore di quella prima dell'urto; un tale urto è detto **anelastico**.

Si considerino due corpi ai quali non sia possibile applicare il modello di punto materiale. Si pensi per esempio a due sfere di masse m_1 ed m_2 e raggi r_1 ed r_2 ; è sempre possibile scegliere un sistema di riferimento in cui le velocità \mathbf{v}_1 e \mathbf{v}_2 delle due sfere prima dell'urto siano parallele, cosa che qui si suppone. La distanza b fra le rette di applicazione delle velocità, si veda la figura 7.1, è detta **parametro d'urto**.

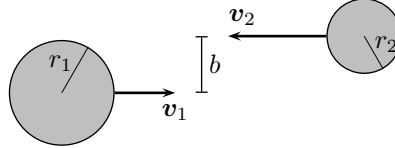


Figura 7.1: Il parametro d'urto.

Se $b = 0$ l'urto è detto **centrale**: le due sfere si muovono mantenendo i loro centri sulla stessa retta e dopo l'urto si muovono ancora sulla stessa retta. Se $0 < b < r_1 + r_2$ l'urto è detto **obliquo**: dopo l'urto le due sfere si muovono su traiettorie rettilinee diverse. Se, infine, $b \geq r_1 + r_2$ le sfere non si urtano.

7.2 URTO ELASTICO.

Si considerino due punti materiali P_1 e P_2 aventi masse m_1 ed m_2 e velocità iniziali \mathbf{v}_1 e \mathbf{v}_2 , che urtino in modo elastico. Il sistema è isolato quindi si conserva la quantità di moto totale ed il momento angolare totale.

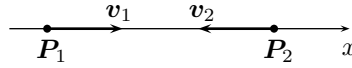


Figura 7.2: L'asse di riferimento.

Inoltre l'ipotesi di elasticità garantisce anche la conservazione dell'energia cinetica. Scelto come asse x di riferimento la retta su cui si svolge il moto dei due punti, come nell'esempio illustrato in figura 7.2, fra le componenti dei vettori velocità devono pertanto valere le relazioni:

$$\begin{cases} m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 V_1 + m_2 V_2 \\ \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 V_1^2 + \frac{1}{2} m_2 V_2^2 \end{cases} \quad (7.7)$$

Poiché il moto è unidimensionale nell'equazione precedente, senza limitazioni di generalità, sono state usate le componenti dei vettori velocità nella direzione del moto; quindi, nel caso rappresentato in figura 7.2, si ha $v_1 > 0$ e $v_2 < 0$. Riordinando i termini, il precedente sistema può essere riscritto nella forma

$$\begin{cases} m_1(v_1 - V_1) = m_2(V_2 - v_2) \\ m_1(v_1^2 - V_1^2) = m_2(V_2^2 - v_2^2) \end{cases} \quad (7.8)$$

Dividendo membro a membro la seconda equazione per la prima si trova

$$v_1 + V_1 = V_2 + v_2 \quad \Longleftrightarrow \quad v_1 - v_2 = V_2 - V_1 \quad (7.9)$$

L'ultima equazione esprime la seguente importante proprietà degli urti elastici.

Se due punti materiali urtano in modo elastico, le velocità relative prima e dopo l'urto sono uguali ed opposte.

Il sistema di secondo grado (7.8) può quindi essere sostituito dal più semplice sistema di primo grado:

$$\begin{cases} m_1(v_1 - V_1) = m_2(V_2 - v_2) \\ v_1 + V_1 = V_2 + v_2 \end{cases} \quad (7.10)$$

La soluzione di questo semplice sistema di due equazioni in due incognite è lasciato alla cura del lettore studioso. Qui se ne dà solo la soluzione:

$$\begin{cases} V_1 = \frac{(m_1 - m_2)v_1 + 2m_2v_2}{m_1 + m_2} \\ V_2 = \frac{(m_2 - m_1)v_2 + 2m_1v_1}{m_1 + m_2} \end{cases} \quad (7.11)$$

Passando dal sistema di secondo grado a quello di primo grado è stata persa una soluzione; si tratta tuttavia della soluzione banale $V_1 = v_1$, $V_2 = v_2$, cioè della soluzione in cui ciascuno dei due punti materiali conserva la propria velocità: è il caso in cui non è avvenuto alcun urto e in cui, ovviamente, si conservano sia la quantità di moto che l'energia cinetica.

Si noti che nelle (7.11) le componenti delle velocità possono avere segni positivo o negativo a seconda della direzione del moto.

La discussione fatta in questa sezione sull'urto elastico di due punti materiali è valida anche nel caso che due sfere si scontrino con un urto centrale elastico. Il caso di urto elastico non centrale verrà analizzato più sotto.

7.2.1 CASI PARTICOLARI.

1. **Le due masse sono uguali:** $m_1 = m_2$. In questo caso le (7.11) diventano

$$\begin{cases} V_1 = v_2 \\ V_2 = v_1 \end{cases} ; \quad (7.12)$$

i due punti materiali quindi si scambiano le velocità.

2. **Uno dei due punti materiali è inizialmente fermo:** $v_2 = 0$. In questo caso le (7.11) diventano

$$\begin{cases} V_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 \\ V_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 \end{cases} \quad (7.13)$$

Si hanno i seguenti sottocasi.

- a) $m_1 = m_2$: le velocità si scambiano, quindi il primo punto materiale si ferma e il secondo comincia a muoversi con velocità $V_2 = v_1$.
- b) $m_1 > m_2$: le velocità finali hanno lo stesso segno, quindi dopo l'urto i due punti si muovono nello stesso verso con cui si muoveva inizialmente il primo punto, che viene rallentato.
- c) $m_1 < m_2$: V_1 diviene negativa, quindi il primo punto materiale, urtando il secondo rimbalza indietro.
- d) $m_2 \gg m_1$: se la massa del punto in moto è trascurabile rispetto a quello fermo, si trova $V_1 = -v_1$ e $V_2 = 0$, quindi il punto inizialmente fermo continua a rimanere fermo, mentre il punto in moto rimbalza indietro con una velocità in modulo uguale a quella che aveva prima dell'urto.

7.3 URTO ANELASTICO.

Se l'urto non è elastico l'energia cinetica non si conserva perché le forze impulsive durante l'urto ne hanno dissipato una parte.

La quantità di moto continua ad essere conservata; questa però dà una sola condizione e non è sufficiente per determinare le velocità dei due punti materiali dopo l'urto. Per andare oltre è necessario avere qualche informazione sull'energia dissipata \mathcal{L}^d ; se essa è nota è possibile usare la (7.6) e risolvere il sistema

$$\begin{cases} m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 V_1 + m_2 V_2 \\ \frac{1}{2} m_1 V_1^2 + \frac{1}{2} m_2 V_2^2 - \frac{1}{2} m_1 v_1^2 - \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \mathcal{L}^d \end{cases} \quad (7.14)$$

Il problema dell'urto elastico è risolvibile nel caso in cui l'energia perduta sia la massima possibile. In questo caso si dice che l'urto è **completamente anelastico**. Per capire cosa accade conviene scegliere come sistema di riferimento quello del centro di massa. L'energia perduta è massima quando l'energia cinetica dopo l'urto è la minima possibile; questa è data dal teorema di König (6.30). Il primo addendo della (6.30) dipende dalla velocità del centro di massa; questa è determinata dalle velocità dei punti materiali prima dell'urto e, per la conservazione della quantità di moto, non viene modificata dalle forze impulsive. L'energia cinetica è quindi minima quando è minimo il secondo addendo, che nel caso presente di due punti materiali, diventa:

$$\frac{1}{2} m_1 u_1^2 + \frac{1}{2} m_2 u_2^2 \quad (7.15)$$

che, si ricorda, è la somma delle energie cinetiche dei due punti materiali nel sistema del centro di massa. Poiché si tratta della somma di due quantità positive, il valore minimo si ha quando esse sono entrambe nulle. Ciò accade quando vale

$$u_1 = u_2 = 0 \quad (7.16)$$

cioè quando i due punti materiali dopo l'urto sono entrambi fermi nel sistema del centro di massa, cioè quando restano uniti. È stata così dimostrata la seguente proprietà.

Un urto fra due punti materiali è completamente anelastico, cioè è massima l'energia perduta nell'urto, quando dopo l'urto i due punti materiali restano uniti.

Nel caso di un urto completamente anelastico, pertanto, le equazioni che consentono di risolvere il problema sono

$$\begin{cases} m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 V_1 + m_2 V_2 \\ V_1 = V_2 \end{cases} \quad (7.17)$$

la cui soluzione è

$$V_1 = V_2 = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} \quad (7.18)$$

Si osservi che, come dev'essere, la quantità al secondo membro è la velocità del centro di massa del sistema materiale.

7.4 NEL SISTEMA DEL CENTRO DI MASSA.

L'analisi ora fatta per la determinazione delle velocità dopo l'urto è particolarmente semplice se eseguita nel sistema di riferimento del centro di massa. La semplificazione è dovuta al fatto che in tale sistema di riferimento il centro di massa è fermo e quindi la quantità di moto totale è nulla. Indicando con u_i ed U_i le velocità rispetto a G dei punti materiali prima e dopo l'urto, vale quindi:

$$m_1 u_1 + m_2 u_2 = m_1 U_1 + m_2 U_2 = 0 \quad (7.19)$$

7.4.1 URTO ELASTICO.

In questo caso si mantiene costante anche l'energia cinetica; quindi vale

$$\frac{1}{2}m_1u_1^2 + \frac{1}{2}m_2u_2^2 = \frac{1}{2}m_1U_1^2 + \frac{1}{2}m_2U_2^2 . \quad (7.20)$$

Questa ultima relazione può essere utilmente riscritta nella forma

$$\frac{(m_1u_1)^2}{m_1} + \frac{(m_2u_2)^2}{m_2} = \frac{(m_1U_1)^2}{m_1} + \frac{(m_2U_2)^2}{m_2} ; \quad (7.21)$$

ma, per la (7.19), valgono $m_1u_1 = -m_2u_2$ e $m_1U_1 = -m_2U_2$; sostituendo nella precedente m_2u_2 e m_2U_2 e con un opportuna sistemazione dei termini, si ottiene

$$\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)(m_1u_1)^2 = \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)(m_1U_1)^2 \quad (7.22)$$

da cui:

$$u_1^2 = U_1^2 \quad (7.23)$$

che, confrontata con la (7.19), dà anche

$$u_2^2 = U_2^2 . \quad (7.24)$$

Scartando la soluzione con $U_1 = u_1$ e $U_2 = u_2$, che, come già visto sopra, corrisponde al caso in cui non vi è urto, si ottiene finalmente

$$\begin{cases} U_1 = -u_1 \\ U_2 = -u_2 \end{cases} \quad (7.25)$$

Quindi nel sistema del centro di massa quando due punti materiali hanno un urto elastico rimbalzano indietro mantenendo la stessa velocità.

Per ottenere le velocità nel sistema di riferimento fermo (anche detto *sistema del laboratorio*) basta ricordare che esse sono legate a quelle nel sistema di riferimento del centro di massa dalla relazione (6.26) che, nel caso presente, diventa

$$V_1 = v_G + U_1 = v_G - u_1 , \quad V_2 = v_G + U_2 = v_G - u_2 \quad (7.26)$$

ma, sempre per la (6.26), vale $u_i = v_i - v_G$, quindi:

$$V_1 = 2v_G - v_1 , \quad V_2 = 2v_G - v_2 \quad (7.27)$$

che, come il lettore studioso può facilmente verificare usando la relazione $mv_G = m_1v_1 + m_2v_2$, è equivalente alla (7.11).

Infine si osservi che dall'equazione precedente si vede che la velocità del centro di massa è la media delle velocità prima e dopo l'urto di ciascun punto materiale. Vale cioè

$$v_G = \frac{v_1 + V_1}{2} = \frac{v_2 + V_2}{2} . \quad (7.28)$$

Questo risultato vale anche nel sistema del centro di massa, ove $v_G = 0$ e $u_i + U_i = 0$.

7.4.2 URTO COMPLETAMENTE ANELASTICO.

In questo caso i due punti materiali rimangono uniti dopo l'urto; e poiché il centro di massa ha velocità nulla rimangono fermi. Vale cioè

$$U_1 = U_2 = 0 . \quad (7.29)$$

Passando al sistema del laboratorio, si ottiene

$$V_i = v_G + U_i = v_G = \frac{m_1v_1 + m_2v_2}{m_1 + m_2} , \quad (7.30)$$

in accordo con la (7.18).

Da questi esempi, risulta chiaro che la trattazione del problema dell'urto è molto semplificata se affrontata nel sistema di riferimento del centro di massa.

7.5 URTI OBLIQUI.

Si considerino due sfere di massa m_1 ed m_2 che si urtino in modo obliquo; si supponga inoltre di scegliere come sistema di riferimento del laboratorio quello in cui una delle due sfere è ferma, come in figura 7.3, ove sono rappresentate due configurazioni una prima e una dopo l'urto obliquo. Si considera qui il solo caso di urto elastico.

SISTEMA DI RIFERIMENTO DEL LABORATORIO. Poiché l'urto è supposto elastico, si conservano sia la quantità di moto che l'energia cinetica totali del sistema:

$$\begin{cases} m_1 \mathbf{v}_1 = m_1 \mathbf{V}_1 + m_2 \mathbf{V}_2 \\ \frac{1}{2} m_1 v_1^2 = \frac{1}{2} m_1 V_1^2 + \frac{1}{2} m_2 V_2^2 . \end{cases} \quad (7.31)$$

Queste sono tre equazioni scalari, visto che la prima contiene una equazione per ogni componente, nelle quattro incognite $V_{1x}, V_{1y}, V_{2x}, V_{2y}$; il problema quindi non è risolubile.

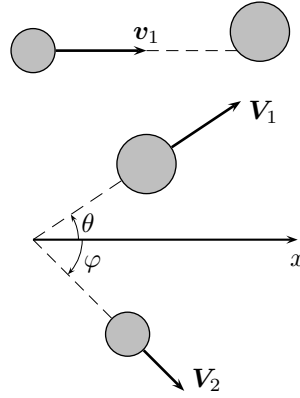


Figura 7.3: Un urto obliquo.

È necessaria la conoscenza almeno di qualche altro dato. Poiché sperimentalmente è facile misurare gli angoli, conviene riscrivere le precedenti introducendo gli angoli di deviazione delle due sfere dopo l'urto; vale infatti

$$\begin{cases} V_{1x} = V_1 \cos \theta \\ V_{1y} = V_1 \sin \theta \end{cases} , \quad \begin{cases} V_{2x} = V_2 \cos \varphi \\ V_{2y} = V_2 \sin \varphi \end{cases} \quad (7.32)$$

e quindi

$$\begin{cases} m_1 v_1 = m_1 V_1 \cos \theta + m_2 V_2 \cos \varphi \\ 0 = m_1 V_1 \sin \theta - m_2 V_2 \sin \varphi \\ \frac{1}{2} m_1 v_1^2 = \frac{1}{2} m_1 V_1^2 + \frac{1}{2} m_2 V_2^2 . \end{cases} \quad (7.33)$$

Se le due masse sono uguali la (7.31) diviene

$$\begin{cases} \mathbf{v}_1 = \mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2 \\ v_1^2 = V_1^2 + V_2^2 ; \end{cases} \quad (7.34)$$

elevando al quadrato i due membri della prima si trova

$$v_1^2 = (\mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2)^2 = V_1^2 + 2\mathbf{V}_1 \cdot \mathbf{V}_2 + V_2^2 \quad (7.35)$$

che, confrontata con la seconda, dà:

$$\mathbf{V}_1 \cdot \mathbf{V}_2 = 0 \quad (7.36)$$

quindi, se le masse delle due sfere sono uguali, le velocità dopo l'urto elastico sono perpendicolari.

SISTEMA DI RIFERIMENTO DEL CENTRO DI MASSA. La quantità di moto totale del sistema è nulla; quindi

$$\begin{cases} m_1 \mathbf{u}_1 + m_2 \mathbf{u}_2 = m_1 \mathbf{U}_1 + m_2 \mathbf{U}_2 = \mathbf{0} \\ \frac{1}{2} m_1 u_1^2 + \frac{1}{2} m_2 u_2^2 = \frac{1}{2} m_1 U_1^2 + \frac{1}{2} m_2 U_2^2 \end{cases} \quad (7.37)$$

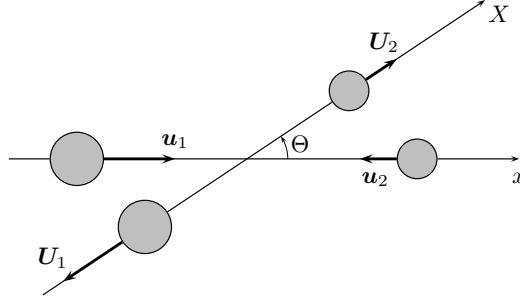


Figura 7.4: Nel sistema del centro di massa.

Ripetendo ancora il procedimento già visto nel caso dell'urto elastico centrale, si ottiene analogamente:

$$U_1^2 = u_1^2, \quad U_2^2 = u_2^2 \quad (7.38)$$

dopo l'urto quindi la velocità di ciascuna sfera ha lo stesso modulo della velocità che aveva prima dell'urto.

Il moto delle due sfere dopo l'urto si svolge ancora su una retta, qui denotata come asse X , che forma un angolo Θ con la retta x su cui si svolgeva il moto prima dell'urto. Le componenti dei vettori velocità dopo l'urto vengono quindi considerati rispetto al nuovo asse delle ascisse. Scartando il caso $U_i = u_i$, che, come già detto, corrisponde alla situazione in cui non vi è alcun urto, rimane la soluzione

$$U_1 = -u_1, \quad U_2 = -u_2. \quad (7.39)$$

Ciascuna sfera quindi rimbalza con la stessa velocità che aveva prima dell'urto. Rimane completamente indeterminato l'angolo Θ .

7.6 ESPLOSIONI.

Per esplosioni in questo contesto non si intende nulla di cruento, ma ci si riferisce a quelle situazioni in cui un corpo esteso si spezza in più parti a causa di forze interne. Poiché non vi è lavoro di forze esterne, la quantità di moto totale rimane costante, cioè la quantità di moto totale dei frammenti rimane uguale alla quantità di moto che aveva il corpo prima di esplodere.

In particolare il centro di massa continua a muoversi dello stesso tipo di moto con cui si muoveva prima dell'esplosione. Si consideri ad esempio un corpo lanciato da terra verso l'alto; esso percorre una traiettoria parabolica fino a che nel punto P si spezza in due parti.

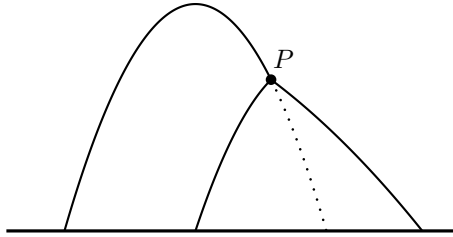


Figura 7.5: Un'esplosione.

Come rappresentato in figura 7.5, le due parti si muovono ciascuna per suo conto ma in modo tale che il loro centro di massa continui a percorrere la traiettoria parabolica, rappresentata in

figura dalla linea tratteggiata.

Questo accade perché per il teorema del centro di massa, sotto l'azione delle forze esterne al sistema, nel caso presente la forza peso, G si muove come se tutta la massa del sistema fosse concentrata su di lui; cioè si muove come si muoveva il corpo prima dell'esplosione.

Se l'esplosione viene esaminata nel sistema del centro di massa la quantità di moto è nulla; quindi prima dell'esplosione il corpo è fermo, poi i due pezzi si allontanano su traiettorie allineate ma di verso opposto e con velocità \mathbf{U}_i aventi i moduli inversamente proporzionali alle masse. Vale cioè

$$m_1 \mathbf{U}_1 + m_2 \mathbf{U}_2 = \mathbf{0} . \quad (7.40)$$

8

DINAMICA DEL CORPO RIGIDO.

Si definisce **corpo rigido** un sistema materiale in cui le distanze reciproche fra i punti materiali sono costanti; data cioè una qualunque coppia di punti materiali P_i e P_j , la distanza $\|P_i P_j\|$ rimane la stessa a dispetto del fatto che i due punti si muovano nel tempo.

8.1 MOTO TRASLATORIO E MOTO ROTATORIO.

Si consideri il moto di un corpo rigido rispetto al sistema di riferimento del suo centro di massa G : durante tale moto tutti i punti materiali del sistema si mantengono, in ogni istante, a distanza costante da G , si muovono cioè descrivendo archi di circonferenza con centro su di un asse di rotazione passante per G ; in altre parole il moto di un corpo rigido nel sistema di riferimento del suo centro di massa è in ogni istante un moto rotatorio attorno ad un asse passante per G . Un generico spostamento del corpo rigido può essere pertanto scomposto in una traslazione del suo centro di massa più una rotazione attorno al centro di massa. Quest'ultima affermazione è un caso particolare del più generale **teorema di Chasles**¹ che qui si enuncia senza dimostrazione.

È sempre possibile scegliere un sistema di riferimento rispetto al quale un generico spostamento di un corpo rigido si può scomporre in una rotazione attorno ad un asse e una traslazione lungo quell'asse.

Il moto di traslazione del centro di massa è regolato dalla prima equazione cardinale

$$\mathbf{F}^E = m\mathbf{a}_G, \quad (8.1)$$

dove \mathbf{F}^E è la risultante delle forze esterne, m è la massa totale del corpo rigido e \mathbf{a}_G è l'accelerazione del centro di massa. Il moto di rotazione attorno al centro di massa è invece regolato dalla seconda equazione cardinale

$$\mathbf{M}_G^E = \dot{\mathbf{L}}_G. \quad (8.2)$$

Lo studio dell'equazione (8.1) non è altro che lo studio del moto del punto materiale G di massa m sottoposto all'azione della forza \mathbf{F}^E ; un tale problema è già stato affrontato nello studio della dinamica del punto materiale e non ci si torna sopra in questa sede. Qui si rivolge l'attenzione essenzialmente al problema del moto rotatorio del corpo rigido nel sistema del suo centro di massa, cioè allo studio dell'equazione (8.2).

8.2 MOMENTO D'INERZIA.

Si consideri un corpo rigido costituito da N punti materiali in rotazione attorno ad un asse fisso; in tal caso ogni punto materiale del corpo rigido si muove lungo una circonferenza con il centro in un punto dell'asse di rotazione. In ogni istante ogni punto materiale del corpo rigido si muove con la stessa velocità angolare ω e, se l' i -esimo punto si trova ad una distanza r_i dall'asse di rotazione, il modulo della sua velocità è data dall'equazione

$$v_i = \omega r_i. \quad (8.3)$$

La situazione è ben illustrata dalla figura 8.1 in cui è rappresentato un disco rotante visto dall'alto (dalla direzione verso cui punta il vettore velocità angolare $\boldsymbol{\omega}$): i punti P_i e P_j , che hanno diverse distanze dal centro di rotazione, nello stesso intervallo di tempo si muovono con la stessa velocità angolare percorrendo archi di circonferenza di lunghezza diversa e quindi a velocità diversa.

¹ Michel Floréal Chasles (1793–1880), matematico francese.

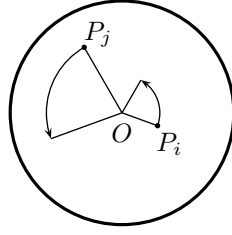


Figura 8.1: Il disco rotante.

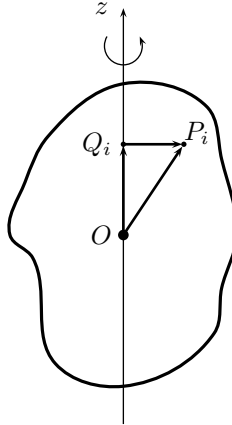
L'energia cinetica del corpo rigido si può pertanto scrivere nella forma

$$\mathcal{E}_c = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \omega^2 r_i^2 = \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^N m_i r_i^2 \right) \omega^2. \quad (8.4)$$

La quantità fra parentesi

$$I = \sum_{i=1}^N m_i r_i^2, \quad (8.5)$$

è detta **momento d'inerzia** del corpo rigido rispetto all'asse di rotazione considerato; ha le dimensioni di una massa per una distanza al quadrato, vale cioè $[I] = [l]^2[m]$; quindi la sua unità di misura è kg m^2 .

Figura 8.2: Il vettore ω per un corpo rigido.

Per un corpo rigido le distanze dei punti materiali dall'asse di rotazione sono costanti, come ovviamente sono costanti le loro masse, quindi il momento d'inerzia I è costante. Questa costante è naturalmente diversa da corpo a corpo ma, in linea di principio², è calcolabile. Una volta che I sia noto, l'energia cinetica del corpo rigido assume, in ogni istante, la semplice forma

$$\mathcal{E}_c = \frac{1}{2} I \omega^2. \quad (8.6)$$

Anche il momento angolare del corpo rigido calcolato rispetto ad un polo O appartenente all'asse di rotazione ammette una semplice espressione in termini del momento d'inerzia. Per essere più precisi, tale relazione è semplice se si considera la sola componente del momento angolare nella direzione dell'asse di rotazione; scegliendo l'asse cartesiano z sovrapposto all'asse di rotazione, si tratta dunque di calcolare L_{Oz} .

² Di fatto il calcolo, anche per i corpi più semplici, è eseguibile solamente utilizzando le tecniche dell'analisi matematica e segnatamente il calcolo integrale.

Sia Q_i la proiezione di P_i sull'asse di rotazione, in modo tale cioè che valga $\|Q_i P_i\| = r_i$ (si veda la figura 8.2); allora, poiché $OP_i = OQ_i + Q_i P_i$, si può scrivere

$$L_o = \sum_{i=1}^N OP_i \times m_i v_i = \sum_{i=1}^N (OQ_i + Q_i P_i) \times m_i v_i. \quad (8.7)$$

Tutti i vettori OQ_i sono paralleli alla direzione dell'asse di rotazione, quindi i vettori $OQ_i \times m_i v_i$ sono perpendicolari all'asse di rotazione e quindi hanno componente z nulla; invece i vettori $Q_i P_i$ e $m_i v_i$ sono tutti perpendicolari all'asse di rotazione e quindi il vettore $Q_i P_i \times m_i v_i = r_i m_i v_i \hat{k}$ è parallelo all'asse di rotazione (si ricordi che \hat{k} è il versore dell'asse z). Pertanto la componente z di L_o è

$$L_{oz} = \sum_{i=1}^N r_i m_i v_i = \sum_{i=1}^N r_i m_i \omega r_i = \omega \sum_{i=1}^N m_i r_i^2; \quad (8.8)$$

ove si è usata la (8.3). Quindi

$$L_{oz} = I\omega. \quad (8.9)$$

In generale il momento angolare di un corpo rigido *non* è parallelo all'asse di rotazione poiché vi è il contributo dei termini $OQ_i \times m_i v_i$. Tuttavia è possibile dimostrare che *per ogni corpo rigido* esistono tre direzioni fra loro perpendicolari tali che se esse sono assi di rotazione allora il momento angolare L_o è parallelo all'asse.

Queste direzioni si dicono **assi principali d'inerzia**. Se un corpo rigido ha degli assi di simmetria questi sono sempre assi principali d'inerzia. I momenti d'inerzia calcolati rispetto ad essi si dicono **momenti principali d'inerzia**.

Se un corpo rigido ruota attorno ad un asse principale d'inerzia L_o e ω sono paralleli e quindi vale

$$L_o = I\omega \quad (8.10)$$

ove il momento d'inerzia I va calcolato rispetto all'asse principale in questione.

In figura 8.3 sono riportati i momenti d'inerzia di alcuni corpi rigidi di massa m , rispetto agli assi principali d'inerzia indicati.

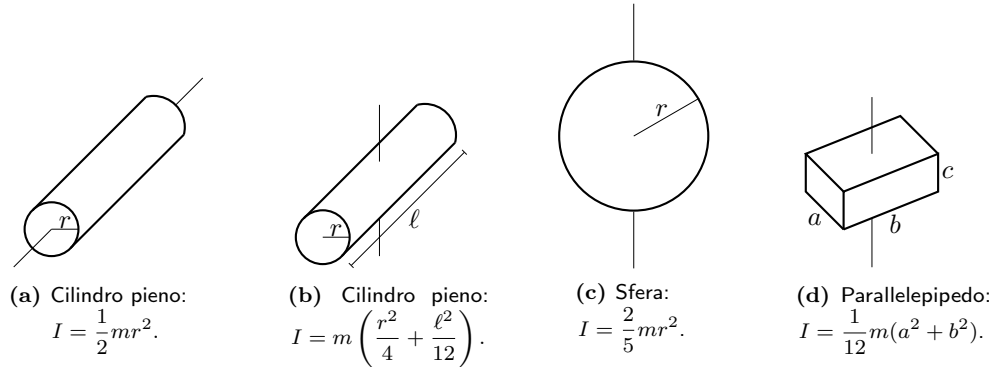


Figura 8.3: Alcuni momenti d'inerzia.

8.3 TEOREMA DI HUYGENS-STEINER

Esiste una semplice relazione fra il momento d'inerzia di un corpo rigido calcolato rispetto ad un asse passante per il baricentro e il momento d'inerzia rispetto ad un secondo asse parallelo al primo.

Per vederlo si consideri, come in figura 8.4, una terna di assi cartesiani x, y, z scelti in modo tale che l'asse z passi per il centro di massa G del corpo rigido; sia inoltre r un secondo asse parallelo all'asse z e distante d da esso. Si consideri quindi il generico punto materiale del sistema rigido

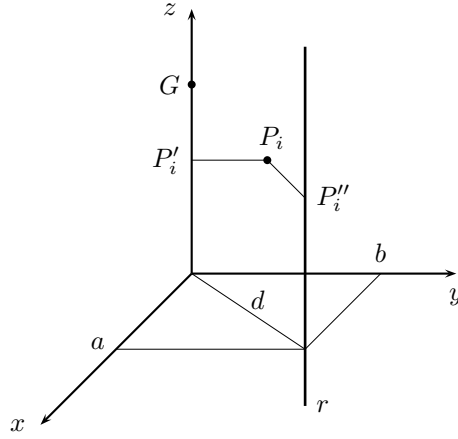


Figura 8.4: Il teorema di Huygens-Steiner

$P_i(x_i, y_i, z_i)$ e siano $P'_i(0, 0, z_i)$ e $P''_i(a, b, z_i)$ le sue proiezioni sull'asse z e sull'asse r ; allora il momento d'inerzia del corpo rigido rispetto a r è

$$\begin{aligned} I_r &= \sum_{i=1}^N m_i (\mathbf{P}_i \mathbf{P}_i'')^2 = \sum_{i=1}^N m_i [(x_i - a)^2 + (y_i - b)^2] = \\ &= \sum_{i=1}^N m_i (x_i^2 - 2ax_i + a^2 + y_i^2 - 2by_i + b^2) \end{aligned} \quad (8.11)$$

che può essere riscritta nella forma

$$I_r = \sum_{i=1}^N m_i (x_i^2 + y_i^2) + (a^2 + b^2) \sum_{i=1}^N m_i - 2a \sum_{i=1}^N m_i x_i - 2b \sum_{i=1}^N m_i y_i. \quad (8.12)$$

la prima sommatoria è il momento d'inerzia I_G rispetto all'asse z passante per G ; la seconda somma è uguale a md^2 ove m è la massa totale del corpo rigido; la terza e la quarta sommatoria sono nulle perché valgono:

$$\sum_{i=1}^N m_i x_i = mx_G, \quad \sum_{i=1}^N m_i y_i = my_G \quad (8.13)$$

ma G è sull'asse z e quindi le sue coordinate x_G e y_G sono nulle. Quindi, in definitiva, si è trovato

$$I_r = I_G + md^2. \quad (8.14)$$

L'equazione precedente è nota con il nome di **teorema di Huygens-Steiner**³ ed è anche noto con il nome di *teorema degli assi paralleli*. In particolare, conseguenza immediata del teorema è che dato un fascio di assi paralleli il momento d'inerzia di un corpo rigido è minimo rispetto all'asse passante per il centro di massa.

8.4 DINAMICA ROTAZIONALE DEL CORPO RIGIDO.

Se un corpo rigido ruota attorno ad un asse, vale la seconda equazione cardinale

$$\mathbf{M}_o^E = \dot{\mathbf{L}}_o^E \quad (8.15)$$

³ Christiaan Huygens (1629–1695) matematico e fisico olandese. Jakob Steiner (1796–1863) matematico svizzero.

ove O è un punto dell'asse di rotazione. Scegliendo il sistema di riferimento in modo che l'asse di rotazione coincida con l'asse z , utilizzando la (8.9), si ottiene (per semplicità di notazione, qui e nel seguito si omette l'apice che denota le forze esterne):

$$M_z = \dot{L}_z = I_z \dot{\omega} = I_z \alpha \quad (8.16)$$

ove si è usata l'ultima delle (2.142) e il momento d'inerzia I_z è calcolato rispetto all'asse di rotazione; si può omettere di indicare il polo O poiché il momento assiale ha lo stesso valore rispetto a tutti i punti dell'asse di rotazione. M_z , componente del momento della risultante delle forze esterne lungo l'asse di rotazione, è detto **momento assiale**.

Se il momento assiale è costante, il corpo rigido ruota attorno all'asse z con accelerazione angolare costante e quindi il moto risultante è rotatorio uniformemente accelerato; valgono dunque le leggi:

$$\theta(t) = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2} \alpha t^2 \quad , \quad \omega(t) = \omega_0 + \alpha t . \quad (8.17)$$

In questo caso, il generico punto materiale P_i di massa m_i del corpo rigido percorre una traiettoria circolare di raggio r_i attorno all'asse di rotazione; nell'intervallo di tempo $\Delta t = t_2 - t_1$, P_i si sposta di

$$\Delta \mathbf{OP}_i = \mathbf{v}_i \Delta t = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{Q}_i \mathbf{P}_i \Delta t , \quad (8.18)$$

ove è stata usata la (2.115).

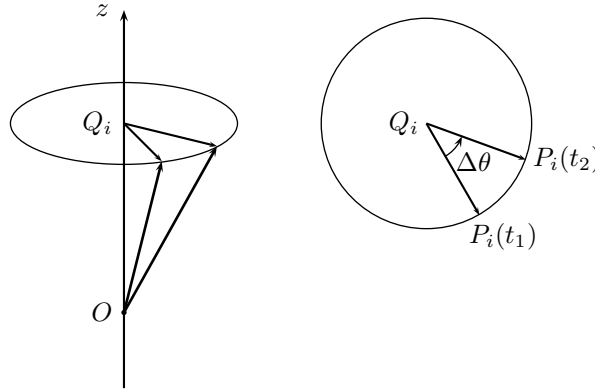


Figura 8.5: Lo spostamento di P_i .

In figura 8.5, è rappresentato lo spostamento dei punti materiali P_i a cui, per chiarezza, è stata aggiunta una vista 'dall'alto'.

Se su P_i agisce la forza risultante \mathbf{F}_i il lavoro compiuto da tale forza è quindi

$$\mathcal{L}_i = \mathbf{F}_i \cdot \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{Q}_i \mathbf{P}_i \Delta t ; \quad (8.19)$$

quindi il lavoro complessivo fatto sul corpo rigido è

$$\mathcal{L} = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i \cdot \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{Q}_i \mathbf{P}_i \Delta t . \quad (8.20)$$

Poiché i vettori $\mathbf{Q}_i \mathbf{O}$ e $\boldsymbol{\omega}$ sono paralleli, vale

$$\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{Q}_i \mathbf{P}_i = \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{Q}_i \mathbf{O} + \mathbf{OP}_i) = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{OP}_i \quad (8.21)$$

pertanto

$$\mathcal{L} = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i \cdot \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{OP}_i \Delta t = \boldsymbol{\omega} \cdot \sum_{i=1}^N \mathbf{OP}_i \times \mathbf{F}_i \Delta t \quad (8.22)$$

ove è stata usata la prima delle (2.76); quindi, infine,

$$\mathcal{L} = \boldsymbol{\omega} \cdot \sum_{i=1}^N \mathbf{M}_{oi} \Delta t = \mathbf{M}_o \cdot \boldsymbol{\omega} \Delta t . \quad (8.23)$$

Poiché ω ha la stessa direzione e lo stesso verso dell'asse z di rotazione e ricordando che $\omega \Delta t = \Delta \theta$, la precedente si scrive

$$\mathcal{L} = M_z \omega \Delta t = M_z \Delta \theta . \quad (8.24)$$

Il **lavoro** delle forze (esterne) agenti sul corpo rigido rotante attorno ad un asse è quindi il prodotto del momento assiale per lo spostamento angolare.

Dalla precedente equazione (8.24) si ottiene facilmente un'espressione per la **potenza** sviluppata dalle forze esterne:

$$\mathcal{P} = \frac{\mathcal{L}}{\Delta t} = M_z \frac{\Delta \theta}{\Delta t} = M_z \omega . \quad (8.25)$$

La (8.24) è corretta per qualsiasi spostamento solo se M_z è costante e quindi il moto rotatorio è uniformemente accelerato; diversamente occorre fare delle considerazioni simili a quelle fatte nel paragrafo 5.1.1 nel caso del lavoro di forza non costante, e rappresentare il lavoro come area al di sotto della curva che rappresenta la funzione $M_z(\theta)$.

Per il teorema dell'energia cinetica, il lavoro (8.24) deve essere uguale alla variazione dell'energia cinetica di rotazione (8.6); infatti, eliminando il tempo dalle (8.17), similmente a quanto fatto per ottenere la (2.29), si ottiene

$$\Delta \theta = \theta(t) - \theta_0 = \omega_0 t + \frac{1}{2} \alpha t^2 = \frac{\omega^2(t) - \omega_0^2}{2\alpha} \quad (8.26)$$

e quindi

$$M_z \Delta \theta = I_z \alpha \Delta \theta = I_z \alpha \frac{\omega^2(t) - \omega_0^2}{2\alpha} = \frac{1}{2} I_z [\omega^2(t) - \omega_0^2] , \quad (8.27)$$

ove è stata usata la (8.16). La precedente è stata dimostrata per momento assiale costante, ma la sua validità è generale e rappresenta il **teorema dell'energia cinetica** nel caso rotatorio:

$$M_z \Delta \theta = \frac{1}{2} I_z \omega^2(t) - \frac{1}{2} I_z \omega_0^2 . \quad (8.28)$$

Se le forze esterne agenti sul corpo rigido sono conservative è possibile definire un'energia potenziale \mathcal{U} tale che, come nel caso del punto materiale, il lavoro sia opposto alla variazione di \mathcal{U} . In tal caso si ha la **conservazione dell'energia meccanica** definita ancora come somma di energia cinetica e potenziale.

8.4.1 CONSERVAZIONE DEL MOMENTO ANGOLARE ASSIALE.

Se il momento assiale è nullo, dalla (8.16) si ricava

$$\dot{L}_z = 0 \quad (8.29)$$

quindi la componente del momento angolare nella direzione dell'asse di rotazione rimane costante durante il moto.

In particolare ciò si verifica quando l'asse di rotazione è verticale e l'unica forza ad agire sul corpo rigido è la forza peso; infatti in tale caso la risultante delle forze agenti e l'asse di rotazione sono paralleli e quindi il momento assiale è nullo. In queste condizioni il corpo rigido si muove di moto rotatorio con velocità angolare costante.

Interessante è anche il caso in cui il corpo non sia rigido ma deformabile; la (8.29), che è conseguenza della seconda equazione cardinale, è ancora vera, ma in questo caso il momento d'inerzia può non rimanere costante. È quanto si verifica quando un pattinatore, che si pone in rotazione con le braccia aperte, aumenta la propria velocità angolare ripiegando le braccia lungo il corpo: così facendo, infatti, diminuisce la distanza fra le braccia e l'asse di rotazione, diminuendo il momento d'inerzia rispetto alla verticale. Poiché

$$L_z = I_z \omega \quad (8.30)$$

rimane costante, la diminuzione di I_z porta ad un aumento di ω .

Moto rettilineo		Moto rotatorio attorno a un asse	
spostamento lineare	s	spostamento angolare	θ
velocità lineare	$v = \dot{s}$	velocità angolare	$\omega = \dot{\theta}$
accelerazione lineare	a	accelerazione angolare	$\alpha = \dot{\omega}$
massa	m	momento d'inerzia	I
forza	$F = ma = \dot{p}$	momento della forza	$M_z = I\alpha = \dot{L}_z$
quantità di moto	$p = mv$	momento angolare	$L_z = I_z\omega$
lavoro	$\mathcal{L} = Fs$	lavoro	$\mathcal{L} = M_z\theta$
potenza	$\mathcal{P} = Fv$	potenza	$\mathcal{P} = M_z\omega$
energia cinetica	$\mathcal{E}_c = \frac{1}{2}mv^2$	energia cinetica	$\mathcal{E}_c = \frac{1}{2}I\omega^2$

Tabella 8.1: Le corrispondenze fra grandezze lineari e angolari.

Il lettore attento si sarà accorto che le equazioni che descrivono la dinamica rotazionale di un corpo rigido sono formalmente analoghe alle corrispondenti equazioni che descrivono la dinamica traslatoria di un punto materiale. In effetti si ottengono le quelle da queste, formalmente operando le sostituzioni suggerite nella tabella 8.1.

8.5 APPLICAZIONI.

Si vedono qui di seguito alcuni casi importanti in cui la teoria sviluppata in questo capitolo trova un'applicazione.

8.5.1 ROTAZIONE ATTORNO AD UN ASSE NON PRINCIPALE.

Si consideri ora il caso di due punti materiali P_1 e P_2 di uguale massa m fissati agli estremi di un'asta di lunghezza l e massa trascurabile, vincolata a ruotare attorno ad un asse passante per il suo centro O e tale che formi con l'asta un angolo costante θ come in figura 8.6. Fissati l'asse x lungo l'asta orientato da P_2 a P_1 , l'asse z perpendicolare all'asta per il suo centro O e l'asse y (non rappresentato in figura) perpendicolare al foglio in O e di verso entrante, si vuole determinare il momento angolare del sistema. Vale

$$\mathbf{L}_O = \mathbf{OP}_1 \times m\mathbf{v}_1 + \mathbf{OP}_2 \times m\mathbf{v}_2 \quad (8.31)$$

Osservando che \mathbf{v}_1 e \mathbf{v}_2 hanno lo stesso modulo v ma la prima è entrante nel foglio mentre la seconda è uscente, si trova che i due prodotti vettoriali della precedente equazione danno come risultati vettori avente lo stesso modulo, la stessa direzione e lo stesso verso, vale cioè

$$\mathbf{L}_O = \frac{l}{2}mv\hat{\mathbf{k}}' + \frac{l}{2}mv\hat{\mathbf{k}}' = lmv\hat{\mathbf{k}}' \quad (8.32)$$

ove $\hat{\mathbf{k}}'$ è il versore (rotante) dell'asse z . Il momento angolare \mathbf{L}_O , quindi *non* è parallelo all'asse di rotazione; questo non deve stupire poiché l'asse di rotazione, non essendo asse di simmetria del corpo rigido, non è asse principale d'inerzia. D'altra parte P_1 e P_2 si muovono di moto circolare uniforme su traiettorie aventi lo stesso raggio r e la stessa velocità angolare ω , vale quindi la relazione

$$v = \omega r = \omega \frac{l}{2} \sin \theta \quad (8.33)$$

quindi

$$\mathbf{L}_O = \frac{1}{2}l^2m\omega \sin \theta \hat{\mathbf{k}}' \quad (8.34)$$

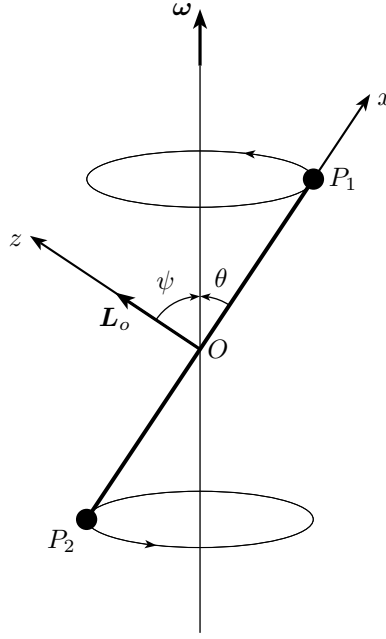


Figura 8.6: L'asta rotante.

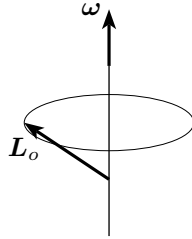
Il momento d'inerzia del sistema rispetto all'asse z vale

$$I_z = 2m \left(\frac{l}{2} \right)^2 = \frac{1}{2} m l^2 \quad (8.35)$$

Poiché L_o ha la stessa direzione e lo stesso verso dell'asse z , vale

$$L_z = \frac{1}{2} l^2 m \omega \sin \theta = I_z \omega \sin \theta = I_z \omega_z . \quad (8.36)$$

Il momento angolare quindi si mantiene in ogni istante perpendicolare all'asta, quindi ruota attorno all'asse rotazione; questo moto di L_o si dice **precessione** del momento angolare, figura 8.7.

Figura 8.7: Precessione di L_o .

Per la seconda equazione cardinale, se il momento angolare varia vi deve essere un momento delle forze esterne. Questo è fornito dalle forze vincolari che mantengono costante l'angolo θ ; vale dunque

$$\mathbf{M}_o = \dot{\mathbf{L}}_o = \frac{1}{2} l^2 m \omega \sin \theta \dot{\hat{\mathbf{k}}}' = \frac{1}{2} l^2 m \omega \sin \theta \boldsymbol{\omega} \times \hat{\mathbf{k}}' \quad (8.37)$$

e quindi

$$\mathbf{M}_o = \frac{1}{2} l^2 m \omega \sin \theta \sin \psi \hat{\mathbf{j}}' \quad (8.38)$$

ove ψ è l'angolo fra $\boldsymbol{\omega}$ e L_o , ed è il complementare di θ ; quindi

$$\mathbf{M}_o = \omega L_z \sin \psi \hat{\mathbf{j}}' = \boldsymbol{\omega} \times L_o . \quad (8.39)$$

8.5.2 MOTO DI ROTOLAMENTO.

Si consideri un disco omogeneo di massa m e raggio r che rotola su di un piano orizzontale, *senza strisciare*, tirato da una forza \mathbf{F} agente sul centro di massa (si veda la figura 8.8). Il moto può essere scomposto nel moto di traslazione del centro di massa piú quello di rotazione attorno al centro di massa. La condizione per cui il rotolamento avviene senza strisciare presuppone che il punto P di contatto fra il disco e il suolo sia fermo. Ci si può convincere di questo fatto nel modo seguente.

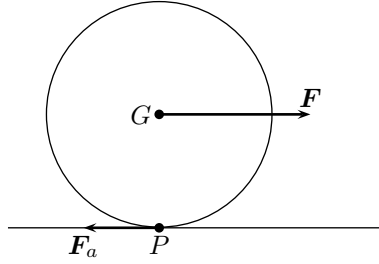


Figura 8.8: Il disco rotolante.

La velocità di un punto del disco può essere pensata come somma della velocità del centro di massa piú la velocità rispetto al centro di massa, equazione (6.26); nel caso di P si ha quindi

$$\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_G + \mathbf{u}_P . \quad (8.40)$$

D'altra parte nel sistema di riferimento del centro di massa il moto di P è rotatorio con velocità angolare ω , per cui vale la (2.115) e quindi

$$\mathbf{u}_P = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{GP} \quad (8.41)$$

e quindi

$$\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_G + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{GP}. \quad (8.42)$$

La direzione di $\boldsymbol{\omega}$ è perpendicolare al foglio e il suo verso è entrante, pertanto è perpendicolare a \mathbf{GP} quindi il loro prodotto vettoriale è un vettore che ha come modulo ωr e come direzione e verso quello opposto di \mathbf{v}_G ; quindi il modulo di \mathbf{v}_P è in ogni istante

$$v_P = v_G - \omega r . \quad (8.43)$$

Se il disco rotola senza strisciare, nel tempo t impiegato dal disco a compiere un giro completo, il centro di massa G si sposta di una distanza pari alla circonferenza. Il tempo impiegato a fare un giro con velocità angolare ω è $t = 2\pi/\omega$, mentre il tempo necessario a percorrere la distanza $2\pi r$ a velocità v_G è $t = 2\pi r/v_G$; uguagliando questi due tempi si ricava:

$$\frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi r}{v_G} \quad \Longleftrightarrow \quad v_G = \omega r ; \quad (8.44)$$

e quindi

$$v_P = 0 \quad (8.45)$$

che è quanto si doveva mostrare.

Si usino ora le equazioni (8.1) e (8.16) per determinare il moto del disco. Le forze esterne agenti sono la forza \mathbf{F} , la forza d'attrito \mathbf{F}_a , il peso e la reazione vincolare perpendicolare al piano; le ultime due sono uguali ed opposte (si veda, tuttavia, la discussione sull'attrito volvente alla fine del paragrafo) e quindi non contribuiscono alla risultante delle forze esterne (per questo non sono state rappresentate in figura 8.8). Scegliendo G come polo per il calcolo del momento totale delle forze esterne e come asse z l'asse di rotazione nel sistema di riferimento del centro di massa, si ottiene

$$\mathbf{F} + \mathbf{F}_a = m\mathbf{a}_G \quad , \quad M_z = I_z\alpha . \quad (8.46)$$

\mathbf{F} ed \mathbf{F}_a hanno versi opposti e il momento di \mathbf{F} rispetto a G è nullo quindi le equazioni precedenti si possono scrivere

$$F - F_a = ma_G \quad , \quad F_a r = \frac{1}{2} m r^2 \alpha \quad (8.47)$$

ove si è usato il momento d'inerzia di un disco di massa m e raggio r riportato nella figura 8.3. Dalla (8.44) si ottiene

$$\dot{v}_G = \dot{\omega} r \quad \implies \quad a_G = \alpha r \quad (8.48)$$

e quindi la seconda delle (8.47) diviene

$$F_a = \frac{1}{2} m r \alpha = \frac{1}{2} m a_G \quad (8.49)$$

sostituendo questa equazione nella prima delle (8.47) si trova

$$F = \frac{3}{2} m a_G . \quad (8.50)$$

Questa equazione consente, nota la forza agente, di determinare l'accelerazione con cui si muove il centro di massa. Si noti che la forza di attrito è 1/3 della forza esterna.

Se all'istante iniziale $t_0 = 0$ s il disco è fermo, al successivo istante t il centro di massa si è spostato di

$$s(t) = \frac{1}{2} a_G t^2 = \frac{1}{3} \frac{F}{m} t^2 ; \quad (8.51)$$

in tale istante la sua velocità è

$$v_G(t) = a_G t = \frac{2}{3} \frac{F}{m} t . \quad (8.52)$$

La forza d'attrito agisce sul punto P che, come visto sopra, è fermo; il suo lavoro è quindi nullo. Il lavoro totale delle forze agenti nell'intervallo di tempo da 0 a t è quindi quello di \mathbf{F} , che, nel caso presente, si scrive:

$$\mathcal{L}(t) = F s(t) = \frac{1}{3} \frac{F^2}{m} t^2 = \frac{3}{4} m v_G^2(t) . \quad (8.53)$$

D'altra parte l'energia cinetica all'istante t è data dal teorema di König (6.30); ricordando la (8.44) e utilizzando l'espressione per il momento d'inerzia di un disco (che è un cilindro) riportata in figura 8.3, si trova:

$$\mathcal{E}_c(t) = \frac{1}{2} m v_G^2(t) + \frac{1}{2} I_G \omega^2(t) = \frac{1}{2} m v_G^2(t) + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} m r^2 \omega^2(t) = \frac{3}{4} m v_G^2(t) , \quad (8.54)$$

in accordo con il teorema dell'energia cinetica.

Poiché il punto P è fermo, il moto del disco rotolante può, in ogni istante, essere considerato come un moto rotatorio attorno a P . Così facendo, l'energia cinetica può essere calcolata più semplicemente perché non vi è energia cinetica di traslazione; è solamente necessario calcolare il momento d'inerzia rispetto a P , ma questo è dato dal teorema di Huygens-Steiner (8.14):

$$I_P = I_G + m r^2 = \frac{1}{2} m r^2 + m r^2 = \frac{3}{2} m r^2 . \quad (8.55)$$

L'energia cinetica all'istante t è quindi data dalla (8.6):

$$\mathcal{E}_c(t) = \frac{1}{2} I_P \omega^2(t) = \frac{3}{4} m r^2 \omega^2(t) = \frac{3}{4} m v_G^2(t) , \quad (8.56)$$

in accordo con quanto già trovato.

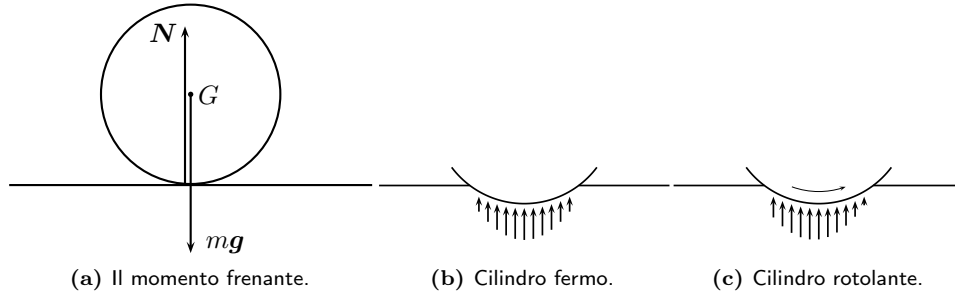


Figura 8.9: Attrito volvente.

ATTRITO VOLVENTE. Quando un corpo rotola su di un piano, la superficie di contatto non è mai puntiforme: vi è sempre la deformazione di una area piccola ma non nulla della superficie di contatto; questa deformazione produce, per il principio di azione e reazione, una forza sul corpo rotolante che produce un momento frenante. Per vedere come ciò accada si consideri un cilindro che rotoli su di piano orizzontale, come in figura 8.9. Quando il cilindro è fermo vi è una deformazione della superficie di appoggio simmetrica rispetto alla verticale passante per il baricentro del cilindro (figura 8.9b); questa deformazione produce una reazione vincolare uguale ed opposta alla forza peso e passante per il baricentro. In questo caso la somma di peso e reazione vincolare è nulla.

Quando il cilindro è in moto la deformazione della superficie di appoggio non è simmetrica ma è maggiore nella direzione del moto (figura 8.9c). In questo caso peso e reazione vincolare sono ancora uguali ed opposte e quindi hanno risultante nulla, ma poiché le loro rette di applicazione non coincidono vi è un momento risultante M_v che si oppone al rotolamento. I vettori mg ed N , quindi, costituiscono una coppia di forze il cui braccio è detto **coefficiente di attrito volvente** e dipende dalle superfici a contatto; il modulo di M_v è quindi dato da

$$M_v = \mu_v N \quad (8.57)$$

Volendo interpretare questo momento come effetto di una forza frenante F_v sviluppata dal vincolo nel punto di contatto, questa deve avere, rispetto al baricentro lo stesso momento M_v ; quindi deve valere

$$F_v r = M_v \quad \Rightarrow \quad F_v = \mu_v \frac{N}{r}. \quad (8.58)$$

Risulta quindi che la forza d'attrito volvente è inversamente proporzionale al raggio di curvatura del corpo nel punto di contatto.

Se il piano è obliquo la (8.57) continua a valere, solo che in tal caso N forma una coppia con la componente del peso perpendicolare al piano inclinato.

8.5.3 IL PENDOLO DI TORSIONE.

Si tratta di un dispositivo il cui funzionamento è simile a quello della bilancia di torsione già incontrata alla fine del capitolo 4; si vuole qui utilizzare la teoria sviluppata in questo capitolo per determinarne il moto. Si consideri quindi un disco appeso sulla verticale del suo centro di massa ad un filo rigido di sezione trascurabile, come in figura 8.10. Se il disco viene ruotato attorno all'asse del filo di un angolo θ rispetto alla posizione di equilibrio, il filo genera una forza di richiamo il cui momento assiale è proporzionale a θ . Posto l'asse z nella direzione del filo, vale quindi

$$M_z = -c\theta \quad (8.59)$$

ove c è una costante che dipende dalle caratteristiche di rigidità del filo. Detto I_z il momento d'inerzia del disco rispetto all'asse del filo, utilizzando la (8.16) si ottiene:

$$I_z \alpha = -c\theta \quad \Rightarrow \quad \alpha = -\frac{c}{I} \theta. \quad (8.60)$$

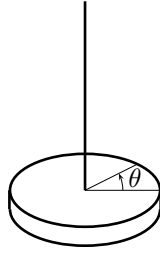


Figura 8.10: Il pendolo di torsione.

Questa equazione è analoga alla legge del moto armonico (2.134): l'accelerazione (angolare) è proporzionale all'opposto dello spostamento (angolare); quindi il disco compie delle rotazioni oscillando con pulsazione ω data da

$$\omega^2 = \frac{c}{I} ; \quad (8.61)$$

il periodo di queste oscillazioni è:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{c}} . \quad (8.62)$$

8.5.4 PENDOLO COMPOSTO.

Un problema dinamico la cui soluzione è assai simile a quella ora vista per il pendolo di torsione è quello del pendolo composto. Si tratta di un corpo rigido libero di ruotare attorno ad un asse orizzontale passante per un punto fisso diverso dal centro di massa.

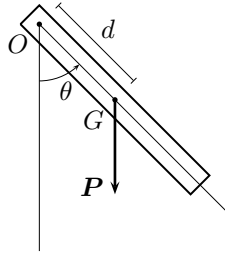


Figura 8.11: Il pendolo composto.

Se il corpo viene spostato dalla sua posizione di equilibrio, sotto l'azione della forza peso, compie delle oscillazioni attorno a questa.

Si consideri, per esempio, una sbarra libera di ruotare attorno al punto O distante d da G . Indicando con z l'asse di rotazione nel verso uscente dal foglio, deve valere:

$$M_z = I_z \alpha \quad (8.63)$$

ove I_z è il momento d'inerzia rispetto all'asse di rotazione. Sulla sbarra agiscono la forza peso \mathbf{P} , applicata in G , e la forza vincolare, applicata in O . Rispetto al polo O il momento risultante delle forze esterne è il momento della forza peso $\mathbf{M}_o = \mathbf{OG} \times \mathbf{P}$. Questo vettore ha la stessa direzione dell'asse z , ma verso opposto, quindi

$$M_z = -mgd \sin \theta ; \quad (8.64)$$

Se l'angolo θ è piccolo (in figura, per chiarezza di rappresentazione, è stato disegnato il caso di θ troppo grande perché valga l'approssimazione qui utilizzata), è possibile usare l'approssimazione, si veda l'equazione (B.7):

$$\sin \theta \simeq \theta \quad (8.65)$$

e quindi si ricava

$$I_z \alpha = -mgd\theta \quad \Rightarrow \quad \alpha = -\frac{mgd}{I_z} \theta . \quad (8.66)$$

Questa equazione, come la (8.60), è l'equazione di un'oscillazione armonica di pulsazione ω data da

$$\omega^2 = \frac{mgd}{I_z} \quad (8.67)$$

e quindi avente periodo

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I_z}{mgd}}. \quad (8.68)$$

Confrontando questa equazione con la (3.61), si vede che il pendolo composto si comporta come un pendolo semplice avente lunghezza

$$\ell = \frac{I_z}{md}, \quad (8.69)$$

detta **lunghezza ridotta**. D'altra parte per il teorema di Huygens-Steiner, vale

$$I_z = I_G + md^2 \quad (8.70)$$

e quindi la lunghezza ridotta diviene

$$\ell = d + \frac{I_G}{md}. \quad (8.71)$$

La lunghezza ridotta ha la seguente proprietà. Se si cerca in punto di sospensione a una diversa distanza d' da G che dia la stessa lunghezza ridotta del pendolo composto, deve valere:

$$d' + \frac{I_G}{md'} = d + \frac{I_G}{md}, \quad (8.72)$$

da cui, con pochi calcoli lasciati alla cura del lettore studioso, si trova

$$mdd'(d - d') = I_G(d - d'). \quad (8.73)$$

Dalla richiesta che le distanze siano diverse, e cioè che valga $d' \neq d$, segue:

$$d' = \frac{I_G}{md} \quad (8.74)$$

e quindi, confrontando con (8.71),

$$d + d' = \ell. \quad (8.75)$$

8.5.5 CARRUCOLA.

Si consideri una carrucola, assimilabile ad un disco di raggio r e massa m , libera di ruotare senza attrito attorno ad un asse passante per il centro O ; tramite un filo alla carrucola sono appesi due punti materiali di masse m_1 ed m_2 , con $m_2 > m_1$ come in figura 8.12. Si vuole determinare il moto delle due masse.

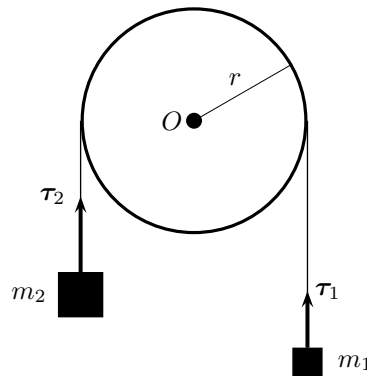


Figura 8.12: La carrucola.

La tensione del filo agisce sulla carrucola e sui due punti materiali; per la prima, che compie un moto rotatorio attorno al suo asse, vale l'equazione (8.16), per i secondi, che compiono un moto traslatorio, vale la (3.12); quindi scegliendo l'asse z uscente dal foglio e coincidente con l'asse di rotazione e osservando che le due masse si muovono con la stessa accelerazione:

$$\begin{cases} m_1 a = \tau_1 - m_1 g \\ m_2 a = m_2 g - \tau_2 \\ \tau_2 r - \tau_1 r = I_z \alpha \end{cases} \quad (8.76)$$

ove I_z è il momento d'inerzia della carrucola rispetto al suo asse di rotazione. Consultando la figura (8.3), si trova

$$I_z = \frac{1}{2} m r^2 \quad (8.77)$$

e quindi, usando anche la (2.127), si trova

$$\begin{cases} \tau_1 = m_1(g + a) \\ \tau_2 = m_2(g - a) \\ \tau_2 r - \tau_1 r = \frac{1}{2} m r^2 \alpha = \frac{1}{2} m r a \end{cases} \quad (8.78)$$

L'accelerazione a è l'accelerazione con cui si muove un punto della circonferenza esterna della carrucola e quindi l'accelerazione con cui si muove il filo, ad essa solidale, e quindi l'accelerazione dei punti materiali appesi al filo. Risolvendo questo sistema nelle tre incognite τ_1 , τ_2 e a , si trova

$$\begin{cases} \tau_1 = \frac{4m_2 + m}{m + 2m_1 + 2m_2} m_1 g \\ \tau_2 = \frac{4m_1 + m}{m + 2m_1 + 2m_2} m_2 g \\ a = \frac{2(m_2 - m_1)}{m + 2m_1 + 2m_2} g . \end{cases} \quad (8.79)$$

il moto dei due punti materiali è quindi uniformemente accelerato.

Se i due punti materiali partono da fermi, dopo aver percorso la distanza h la loro velocità è data dalla (2.29):

$$v = \sqrt{2ah} = \sqrt{\frac{4(m_2 - m_1)}{m + 2m_1 + 2m_2} gh} . \quad (8.80)$$

Questa velocità può anche essere determinata utilizzando il principio di conservazione dell'energia; infatti se il punto materiale di massa m_1 sale e il punto materiale di massa m_2 scende di un'altezza h vi è una variazione di energia potenziale cui deve corrispondere un'eguale variazione di energia cinetica delle masse e della carrucola. Nella posizione finale i due punti materiali hanno la stessa velocità (stesso modulo, ma versi opposti) v e la carrucola ha una velocità angolare ω legata a v dalla (2.114); quindi:

$$m_2 gh - m_1 gh = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v^2 + \frac{1}{2} I_z \omega^2 = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v^2 + \frac{1}{4} m r^2 \omega^2 \quad (8.81)$$

che si può riscrivere

$$(m_2 - m_1) gh = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v^2 + \frac{1}{4} m v^2 \quad (8.82)$$

da cui

$$v = \sqrt{\frac{4(m_2 - m_1)}{m + 2m_1 + 2m_2} gh} , \quad (8.83)$$

come già trovato sopra.

INTERMEZZO. IL CASO GENERALE. EQUAZIONI DI EULERO.

⁴Nel caso piú generale il moto rotatorio di un corpo rigido avviene attorno ad un punto fisso, che può anche non appartenere al corpo rigido. Sia O tale punto; la posizione di ogni altro punto P_i del corpo rigido è individuata dal vettore $\mathbf{r}_i \equiv O\mathbf{P}_i$; ogni punto si muove con la stessa velocità angolare $\boldsymbol{\omega}$ attorno ad O con velocità \mathbf{v}_i data da

$$\mathbf{v}_i = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i . \quad (8.84)$$

Il momento angolare rispetto ad O vale quindi

$$\mathbf{L}_O = \sum_{i=1}^N m_i (\mathbf{r}_i \times \mathbf{v}_i) = \sum_{i=1}^N m_i (\mathbf{r}_i \times \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i) = \sum_{i=1}^N m_i [\boldsymbol{\omega} r_i^2 - \mathbf{r}_i (\mathbf{r}_i \cdot \boldsymbol{\omega})] , \quad (8.85)$$

ove è stata usata la seconda delle (2.76). Esplicitando le componenti si trova

$$\begin{aligned} L_{Ox} &= \sum_{i=1}^N m_i [r_i^2 \omega_x - x_i (x_i \omega_x + y_i \omega_y + z_i \omega_z)] \\ L_{Oy} &= \sum_{i=1}^N m_i [r_i^2 \omega_y - y_i (x_i \omega_x + y_i \omega_y + z_i \omega_z)] \\ L_{Oz} &= \sum_{i=1}^N m_i [r_i^2 \omega_z - z_i (x_i \omega_x + y_i \omega_y + z_i \omega_z)] \end{aligned} \quad (8.86)$$

Quindi, definendo i **coefficienti d'inerzia**:

$$\begin{aligned} I_{xx} &= \sum_{i=1}^N m_i (r_i^2 - x_i^2) , \quad I_{yy} = \sum_{i=1}^N m_i (r_i^2 - y_i^2) , \quad I_{zz} = \sum_{i=1}^N m_i (r_i^2 - z_i^2) \\ I_{xy} &= - \sum_{i=1}^N m_i x_i y_i , \quad I_{xz} = - \sum_{i=1}^N m_i x_i z_i , \quad I_{yz} = - \sum_{i=1}^N m_i y_i z_i , \end{aligned} \quad (8.87)$$

le componenti del momento angolare si possono scrivere nella forma

$$\begin{aligned} L_{Ox} &= I_{xx} \omega_x + I_{xy} \omega_y + I_{xz} \omega_z \\ L_{Oy} &= I_{xy} \omega_x + I_{yy} \omega_y + I_{yz} \omega_z \\ L_{Oz} &= I_{xz} \omega_x + I_{yz} \omega_y + I_{zz} \omega_z \end{aligned} \quad (8.88)$$

Similmente, l'energia cinetica del corpo rigido si può scrivere

$$\mathcal{E}_c = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{v}_i \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{v}_i = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{L} \quad (8.89)$$

ove è stata usata la prima delle (2.76); quindi

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_c &= \frac{1}{2} I_{xx} \omega_x^2 + \frac{1}{2} I_{xy} \omega_x \omega_y + \frac{1}{2} I_{xz} \omega_x \omega_z + \\ &+ \frac{1}{2} I_{xy} \omega_y \omega_x + \frac{1}{2} I_{yy} \omega_y^2 + \frac{1}{2} I_{yz} \omega_y \omega_z + \\ &+ \frac{1}{2} I_{xz} \omega_z \omega_x + \frac{1}{2} I_{yz} \omega_z \omega_y + \frac{1}{2} I_{zz} \omega_z^2 . \end{aligned} \quad (8.90)$$

⁴ Il contenuto del presente intermezzo è formalmente piuttosto complesso, benché assai interessante, ed è inevitabilmente limitato a qualche cenno del problema. Per approfondire ulteriormente l'argomento si consiglia [12], dove il lettore studioso troverà pane i suoi denti.

Si può dimostrare (la dimostrazione richiede qualche nozione di algebra lineare e quindi è al di là dei limiti di questi appunti) che, se come assi di riferimento si scelgono gli assi principali d'inerzia del corpo rigido, i coefficienti d'inerzia *misti* I_{xy} , I_{xz} e I_{yz} si annullano e quindi il momento angolare e l'energia cinetica hanno la semplice espressione:

$$\begin{aligned} L_1 &= I_1 \omega_1 \quad , \quad L_2 = I_2 \omega_2 \quad , \quad L_3 = I_3 \omega_3 \\ \mathcal{E}_c &= \frac{1}{2} I_1 \omega_1^2 + \frac{1}{2} I_2 \omega_2^2 + \frac{1}{2} I_3 \omega_3^2 \quad , \end{aligned} \quad (8.91)$$

ove le componenti rispetto ai tre assi principali sono state indicate con 1, 2 e 3.

È assai conveniente scrivere anche la seconda equazione cardinale nel sistema di riferimento, solidale al corpo rigido, degli assi principali d'inerzia 1, 2 e 3. Questo sistema di riferimento, che viene indicato C , è evidentemente un sistema non inerziale; coerentemente con la notazione introdotta al paragrafo 2.8.2 si indicano con \hat{i}' , \hat{j}' e \hat{k}' i tre versori degli assi di C .

Dato il generico vettore \mathbf{A} , la sua rapidità di variazione in C si può scrivere

$$(\dot{\mathbf{A}})_c = \dot{A}_1 \hat{i}' + \dot{A}_2 \hat{j}' + \dot{A}_3 \hat{k}' \quad . \quad (8.92)$$

Questa è legata alla rapidità di variazione nel sistema di riferimento fisso S , di origine O , dalle *relazioni di Poisson*⁵. Per determinarle si parte dal vettore \mathbf{A} che nel sistema di riferimento S si scrive

$$\mathbf{A} = A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k} \quad (8.93)$$

Calcolando la rapidità di variazione si trova

$$\dot{\mathbf{A}} = \dot{A}_x \hat{i} + \dot{A}_y \hat{j} + \dot{A}_z \hat{k} = (\dot{\mathbf{A}})_s \quad (8.94)$$

Similmente, nel sistema di riferimento C il vettore \mathbf{A} si scrive

$$\mathbf{A} = A_1 \hat{i}' + A_2 \hat{j}' + A_3 \hat{k}' \quad . \quad (8.95)$$

Per calcolarne la rapidità di variazione occorre tenere presente che anche i versori degli assi variano, il calcolo va quindi eseguito in modo simile a quanto già fatto per giungere all'equazione (2.166). Si trova così:

$$\dot{\mathbf{A}} = \dot{A}_1 \hat{i}' + \dot{A}_2 \hat{j}' + \dot{A}_3 \hat{k}' + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{A} = (\dot{\mathbf{A}})_c + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{A} \quad . \quad (8.96)$$

Confrontando le (8.94) e (8.96) si ottengono le **relazioni di Poisson**:

$$\boxed{(\dot{\mathbf{A}})_s = (\dot{\mathbf{A}})_c + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{A} \quad .} \quad (8.97)$$

Applicando le relazioni di Poisson al momento angolare \mathbf{L}_o , ricordando che per la seconda equazione cardinale vale $(\dot{\mathbf{L}}_o)_s = \mathbf{M}_o$, si ottiene

$$\mathbf{M}_o = (\dot{\mathbf{L}}_o)_c + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{L}_o \quad . \quad (8.98)$$

Si noti che la (8.39) è un caso particolare della precedente con \mathbf{L}_o costante in C . Ricordando che in C le componenti del momento d'inerzia sono date dalla prima delle (8.91), la precedente equazione si può scrivere come segue:

$$\begin{aligned} M_1 &= \dot{L}_1 + \omega_2 L_3 - \omega_3 L_2 = I_1 \dot{\omega}_1 + \omega_2 I_3 \omega_3 - \omega_3 I_2 \omega_2 \\ M_2 &= \dot{L}_2 + \omega_3 L_1 - \omega_1 L_3 = I_2 \dot{\omega}_2 + \omega_3 I_1 \omega_1 - \omega_1 I_3 \omega_3 \\ M_3 &= \dot{L}_3 + \omega_1 L_2 - \omega_2 L_1 = I_3 \dot{\omega}_3 + \omega_1 I_2 \omega_2 - \omega_2 I_1 \omega_1 \end{aligned} \quad (8.99)$$

da cui si ottengono le **equazioni di Eulero**⁶

⁵ Siméon-Denis Poisson (1781–1840), matematico francese.

⁶ Leonhard Euler (1707–1783), matematico e fisico svizzero.

$$\begin{aligned} M_1 &= I_1 \dot{\omega}_1 - (I_2 - I_3) \omega_2 \omega_3 \\ M_2 &= I_2 \dot{\omega}_2 - (I_3 - I_1) \omega_3 \omega_1 \\ M_3 &= I_3 \dot{\omega}_3 - (I_1 - I_2) \omega_1 \omega_2 . \end{aligned} \quad (8.100)$$

Queste equazioni hanno in generale una soluzione complicata. Se il momento delle forze esterne è nullo le equazioni di Eulero diventano

$$\begin{aligned} I_1 \dot{\omega}_1 &= (I_2 - I_3) \omega_2 \omega_3 \\ I_2 \dot{\omega}_2 &= (I_3 - I_1) \omega_3 \omega_1 \\ I_3 \dot{\omega}_3 &= (I_1 - I_2) \omega_1 \omega_2 ; \end{aligned} \quad (8.101)$$

se la rotazione è uniforme, cioè se $\dot{\omega}_1 = \dot{\omega}_2 = \dot{\omega}_3 = 0$, allora almeno due delle componenti di $\boldsymbol{\omega}$ sono nulle e quindi la velocità angolare ha la direzione di uno degli assi principali d'inerzia, cioè vi può essere moto rotatorio uniforme solo attorno ad un asse principale d'inerzia.

Sempre supponendo $\mathbf{M} = \mathbf{0}$, si consideri il caso semplice in cui il corpo rigido abbia un'asse di simmetria; questo coincide con un asse principale d'inerzia, per esempio il 3. Per la simmetria assiale, i due momenti d'inerzia perpendicolari all'asse di simmetria sono uguali, quindi

$$I_1 = I_2 \quad (8.102)$$

allora le equazioni di Eulero diventano

$$\begin{aligned} I_1 \dot{\omega}_1 &= (I_1 - I_3) \omega_2 \omega_3 \\ I_1 \dot{\omega}_2 &= (I_3 - I_1) \omega_3 \omega_1 \\ I_3 \dot{\omega}_3 &= 0 \end{aligned} \quad (8.103)$$

dall'ultima delle tre equazioni si deduce che ω_3 rimane costante; dalle prime due, quindi si ricava

$$\dot{\omega}_1 = -\Omega \omega_2 \quad , \quad \dot{\omega}_2 = \Omega \omega_1 \quad (8.104)$$

con

$$\Omega = \frac{I_3 - I_1}{I_1} \omega_3 . \quad (8.105)$$

Poiché Ω è costante, calcolando la rapidità di variazione di $\dot{\omega}_1$ si ottiene

$$\ddot{\omega}_1 = -\Omega \dot{\omega}_2 = -\Omega^2 \omega_1 . \quad (8.106)$$

Questa equazione è analoga a quella del moto armonico con pulsazione Ω di cui si conosce la soluzione; usando la prima delle (2.135):

$$\omega_1(t) = A \cos \Omega t , \quad (8.107)$$

ove, per semplicità, la fase iniziale è stata posta a zero. Usando ora la seconda delle (2.135) si ottiene

$$\dot{\omega}_1(t) = -A \Omega \sin \Omega t \quad (8.108)$$

e quindi, dalla prima delle (8.104), si ottiene

$$\omega_2(t) = -\frac{1}{\Omega} \dot{\omega}_1 = A \sin \Omega t . \quad (8.109)$$

In definitiva, pertanto, si ha

$$\begin{aligned} \omega_1(t) &= A \cos \Omega t \\ \omega_2(t) &= A \sin \Omega t . \end{aligned} \quad (8.110)$$

Confrontando queste equazioni con le (2.130), si vede che rappresentano il moto circolare uniforme di un vettore di componenti ω_1 ed ω_2 . In altre parole, mentre ω_3 è costante, ω_1 ed ω_2 variano

in modo che il vettore $\omega_1 \hat{i} + \omega_2 \hat{j}$ ruoti con velocità angolare Ω , come rappresentato in figura 8.13. Il vettore velocità angolare $\boldsymbol{\omega}$ del corpo rigido, quindi, ruota attorno all'asse di rotazione con velocità angolare data dalla (8.105). Quindi $\boldsymbol{\omega}$ ha un moto di precessione attorno all'asse di simmetria.

Un buon esempio per applicare quanto visto qui è il moto di rotazione terrestre attorno all'asse passante per i poli che è asse di simmetria; la Terra non è una sfera perfetta, ma è un po' schiacciata ai poli.

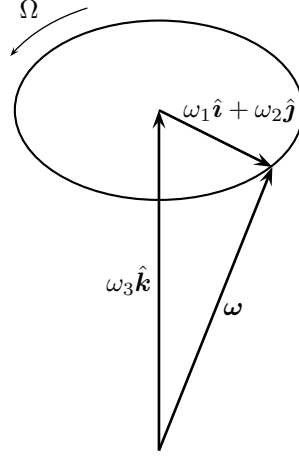


Figura 8.13: La precessione di $\boldsymbol{\omega}$.

I momenti d'inerzia valgono⁷

$$\begin{aligned} I_3 &= 8.034 \times 10^{37} \text{ kg m}^2 \\ I_1 &= 8.008 \times 10^{37} \text{ kg m}^2 \end{aligned} \quad (8.111)$$

e quindi

$$\Omega \simeq \frac{\omega_3}{308} \quad (8.112)$$

quindi, poiché la rotazione della Terra avviene in un giorno, la precessione dell'asse terrestre avviene in circa 308 giorni, cioè circa 10 mesi. Questa precessione ha un'ampiezza di pochi metri e non va confusa con la precessione di origine astronomica; questa, già conosciuta nell'antichità e solitamente attribuita ad *Ipparco*⁸ è ben più rilevante, avente un'ampiezza di circa 47° ; è dovuta all'interazione della Terra con il Sole e la Luna e ha un periodo di circa 26000 anni; è nota con il nome di *precessione degli equinozi*.

⁷ Si veda, per esempio, KURT LAMBECK *The Earth's Variable Rotation*, Cambridge University Press, 1980, p. 27, citato da <http://scienceworld.wolfram.com/physics/MomentofInertiaEarth.html>.

⁸ Ipparco di Nicea (190–120 a.C.), astronomo, matematico e geografo di Nicea.

9

STATICA DEL CORPO RIGIDO.

In questo capitolo si studiano le condizioni per l'equilibrio di un corpo rigido. Diversamente da quanto fatto nei capitoli precedenti si vuole dare alla presente trattazione un'impostazione assiomatica deduttiva, si dedurranno in teoremi della statica a partire da certi postulati opportunamente scelti. Nel far ciò si segue la tradizione cominciata da Archimede¹ nella sua opera *Sull'equilibrio dei piani* in [13] e proseguita da Galilei all'inizio della *Seconda Giornata* dei suoi *Discorsi* in [2] ed esposta in forma moderna nel primo capitolo di [5]. Come si vedrà, da questo approccio deduttivo la nozione di momento di una forza, già incontrato nei capitoli precedenti, esce in modo molto naturale.

9.1 EQUILIBRIO DELLA BILANCIA A BRACCI.

Come primo semplice esempio di corpo rigido si considera qui una *bilancia a bracci*, che è un'asta rigida e omogenea sospesa nel suo punto medio O alla quale possono essere appesi, in qualsiasi posizione, dei corpi. Si comincia con una definizione.

Definizione 1. Si dice di equilibrio una configurazione in cui l'asta della bilancia si trovi in posizione orizzontale.

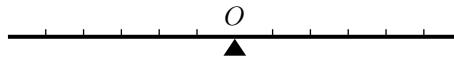


Figura 9.1: La bilancia scarica.

Si danno quindi i seguenti postulati.

Postulato 1. La bilancia scarica è in equilibrio.

Postulato 2. Se, a partire da una situazione di equilibrio, vengono appese due masse uguali sui due bracci a distanze uguali dal punto di sospensione dell'asta della bilancia il sistema rimane in equilibrio.

Postulato 3. A partire da una situazione di equilibrio, è possibile sostituire due masse uguali sospese in punti diversi P_1 e P_2 con le stesse due masse sospese entrambe nel punto medio di P_1P_2 senza modificare la situazione di equilibrio.

Dai postulati 1 e 2 segue immediatamente il seguente teorema.

Teorema 1. Due masse uguali sospese sui due bracci a distanze uguali dal punto di sospensione dell'asta della bilancia costituiscono una configurazione di equilibrio.

Inoltre dal postulato 3 e dal teorema precedente si ottiene il seguente

Teorema 2. A partire da una configurazione di equilibrio, è possibile appendere una massa qualsiasi al punto di sospensione senza modificare la condizione di equilibrio.

Dimostrazione.

Infatti da una qualunque configurazione di equilibrio, per il postulato 2, è possibile aggiungere una qualunque coppia di masse uguali equidistanti dal punto di sospensione e quindi, per il postulato 3, spostarle nel punto di sospensione. L'arbitrarietà delle due masse conclude la dimostrazione. A questo punto si pone il problema di risolvere il problema dell'equilibrio della bilancia nel caso generale in cui ai suoi bracci venga appeso un numero qualsiasi di masse. Si presentano, in successione, alcuni casi.

¹ Archimede (287–212 a.C.), grande scienziato di Siracusa.

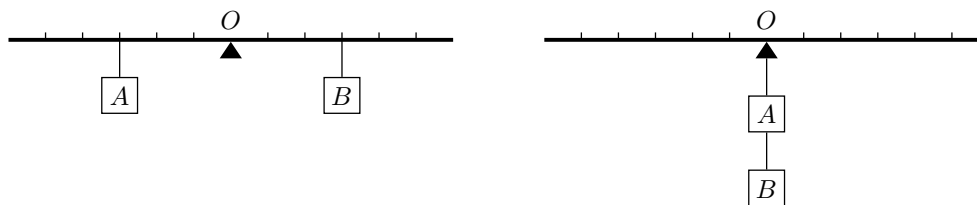


Figura 9.2: Illustrazione del teorema 2.

Teorema 3. *Una massa posta su un braccio della bilancia ne equilibra due uguali alla prima poste in uno stesso punto dell'altro braccio se la distanza dal punto di sospensione cui si trova quella è doppia della distanza dal punto di sospensione cui si trovano queste.*

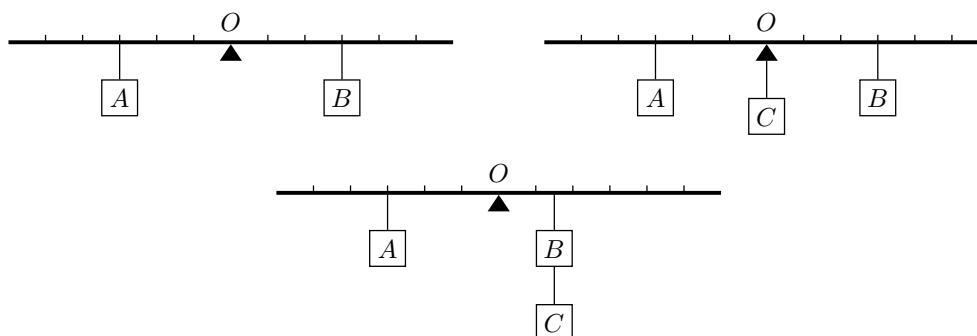


Figura 9.3: Dimostrazione del teorema 3.

Dimostrazione.

Con riferimento alla figura 9.3, si parta dalla configurazione di equilibrio (teorema 1) con due masse uguali A e B appese in punti equidistanti da O ; si aggiunga (teorema 2) in O una massa C uguale alle precedenti, quindi (postulato 3) si spostino la massa C e la B nel punto medio dei loro punti di sospensione. La situazione è ancora di equilibrio e, per costruzione, la distanza da O della massa A è il doppio della distanza da O delle due masse uguali B e C .

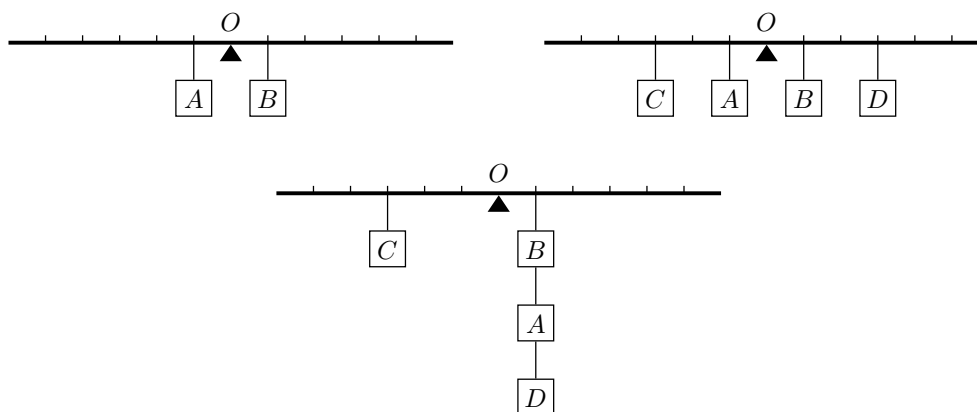


Figura 9.4: Dimostrazione del teorema 4.

Teorema 4. *Una massa posta su un braccio della bilancia ne equilibra tre uguali alla prima poste in uno stesso punto dell'altro braccio se la distanza dal punto di sospensione cui si trova quella è tripla della distanza dal punto di sospensione cui si trovano queste.*

Dimostrazione.

Con riferimento alla figura 9.4, si parta dalla configurazione di equilibrio (teorema 1) con due masse uguali A e B appese in punti equidistanti da O ; si aggiungano (teorema 1) altre due masse

C e D appese in punti equidistanti da O tali che le quattro masse risultino tutte equidistanti fra loro; si appendano A e D al punto ove si trova appesa B (postulato 3). La configurazione è evidentemente di equilibrio e, per costruzione, C si trova da O ad una distanza tripla rispetto al punto ove sono le tre masse A , B e D .

Teorema 5. *Due masse uguali appese in uno stesso punto di un braccio di una bilancia equilibrano tre masse uguali alle prime se la distanza dal punto di sospensione cui si trovano quelle è $\frac{3}{2}$ della distanza dal punto di sospensione cui si trovano queste.*

Dimostrazione.

Con riferimento alla figura 9.5, si parta dalla configurazione di equilibrio (teorema 1) con due masse uguali A e B appese in punti equidistanti da O ; si aggiunga (teorema 2) una massa C uguale alle precedenti sospesa nel punto O ; si aggiungano inoltre (teorema 1) altre due masse D ed E appese in punti equidistanti da O tali che le quattro masse risultino tutte equidistanti fra loro; si appendano ora (postulato 3) la masse B ed E al loro punto medio e le masse D e C al loro punto medio, che, per costruzione, si trova in A . La configurazione è evidentemente di equilibrio e, per costruzione, le due masse B ed E si trovano ad una distanza da O che è $\frac{3}{2}$ della distanza da O delle tre masse A , C e D .

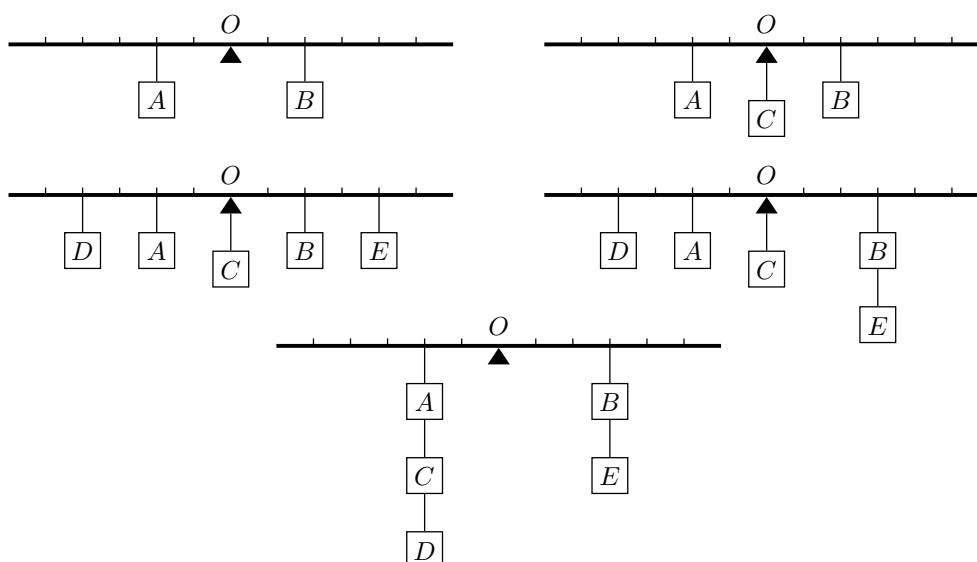


Figura 9.5: Dimostrazione del teorema 5.

Teorema 6. *Tre masse uguali appese in uno stesso punto di un braccio di una bilancia equilibrano quattro masse uguali alle prime se la distanza dal punto di sospensione cui si trovano quelle è $\frac{4}{3}$ della distanza dal punto di sospensione cui si trovano queste.*

Dimostrazione.

Con riferimento alla figura 9.6, si parta dalla configurazione di equilibrio (teorema 1) con due masse uguali A e B appese in punti equidistanti da O ; si aggiunga (teorema 2) una massa C uguale alle precedenti sospesa nel punto O ; si aggiungano inoltre (teorema 1) altre due masse D ed E appese in punti equidistanti da O tali che le cinque masse risultino tutte equidistanti fra loro e di seguito (teorema 1) altre due masse uguali F e G appese in punti equidistanti da O tali che le sette masse risultino tutte equidistanti tra loro. Ora si appendano B e G (postulato 3) al loro punto medio insieme alla massa E e (postulato 3) le masse A e D al loro punto medio, infine (ancora postulato 3) le masse C ed F al loro punto medio che, si osservi, coincide con la posizione in cui sono già appese A e D . La configurazione è evidentemente di equilibrio e, per costruzione, le due masse E , B e G si trovano ad una distanza da O che è $\frac{4}{3}$ della distanza da O delle tre masse A , D , C ed F .

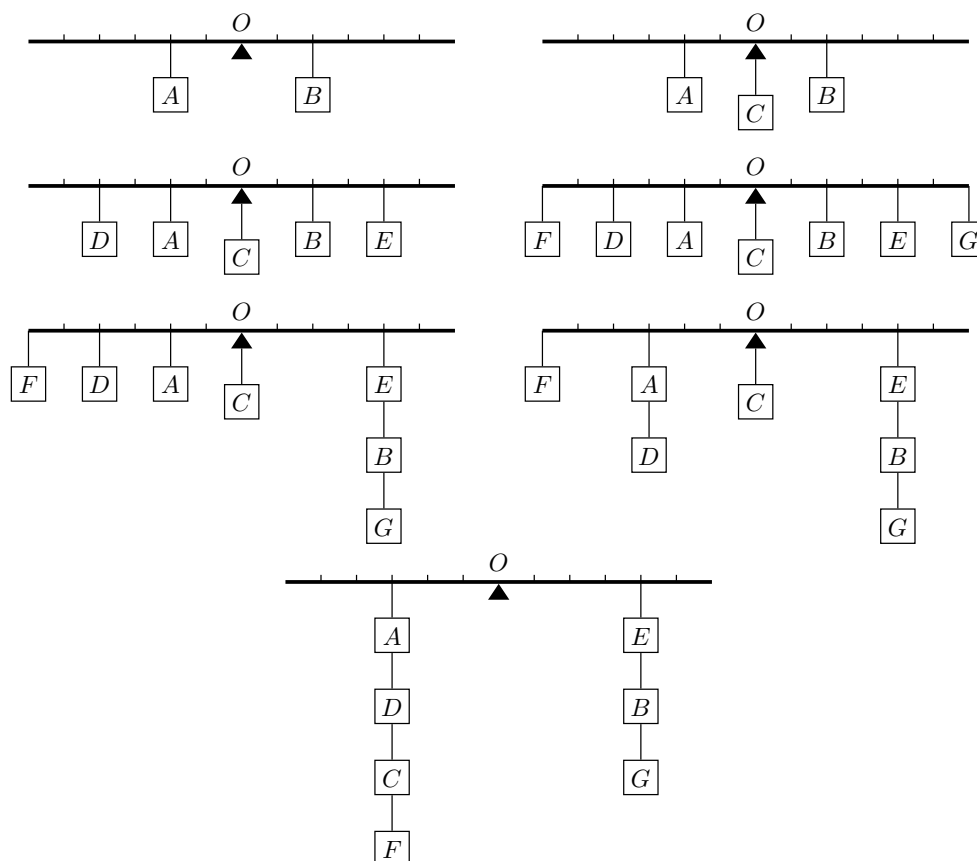


Figura 9.6: Dimostrazione del teorema 6.

Evidentemente teoremi di questo tipo se ne possono costruire infiniti, ma i pochi esempi fatti possono essere riassunti e generalizzati nel seguente.

Teorema 7 (Condizione di equilibrio di una bilancia a bracci). *Una bilancia è in equilibrio se le masse appese ai suoi bracci sono inversamente proporzionali alle distanze dal punto di sospensione.*

Come conseguenza di quanto visto fin qui si ottiene la legge che dà la risultante di due vettori paralleli.

Infatti in condizioni di equilibrio la risultante delle forze agenti sulla bilancia deve essere nulla: se così non fosse, infatti, cioè se vi fosse una forza risultante diversa da zero agente sulla bilancia, essa si metterebbe in moto seguendo le leggi della dinamica e non sarebbe quindi in equilibrio. Ora, quando la bilancia è scarica essa è in equilibrio; questo significa che la forza peso agente su di essa è equilibrata esattamente dalla reazione vincolare, diretta verso l'alto, agente sul punto di sospensione.

Se ai bracci della bilancia vengono appese delle masse in modo tale che la configurazione sia ancora di equilibrio (quindi in accordo con il teorema 7 visto sopra), usando il medesimo ragionamento si può concludere che la risultante delle singole forze peso agenti su tali masse è ancora equilibrata dalla reazione vincolare, cioè che la risultante delle forze peso agenti e la reazione vincolare sono due vettori di intensità uguale, direzione uguale e verso opposto. Poiché la reazione vincolare è applicata nel punto di sospensione, anche la risultante delle forze peso, che ha come intensità la somma delle due intensità deve necessariamente essere applicata nel punto di sospensione.

Quindi il presente ragionamento ha portato alla determinazione del punto di applicazione della risultante delle due forze peso parallele ed equiverse. Questo risultato è generalizzabile a qualunque coppia di forze parallele e può essere enunciato nella forma seguente.

La risultante di due vettori paralleli ed equiversi è un vettore che ha come modulo la somma dei moduli, la stessa direzione e lo stesso verso dei vettori addendi e la sua retta di applicazione è tale che le distanze dai punti di applicazione delle vettori addendi sono inversamente proporzionali alle loro intensità.

Di questo fatto è possibile anche dare una dimostrazione geometrica secondo le linee seguenti. Si considerino due vettori \mathbf{v}_1 e \mathbf{v}_2 paralleli ed equiversi, applicati rispettivamente in P_1 e P_2 ; per determinarne la somma $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$, evidentemente, non è possibile utilizzare l'usuale metodo del parallelogramma. Si ricorre quindi al seguente espediente. Si considerino due vettori \mathbf{a} e \mathbf{b} uguali ed opposti, cioè tale che valga $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{0}$ e si applichino in P_1 ed in P_2 , lungo la retta congiungente i due punti, come in figura 9.7.

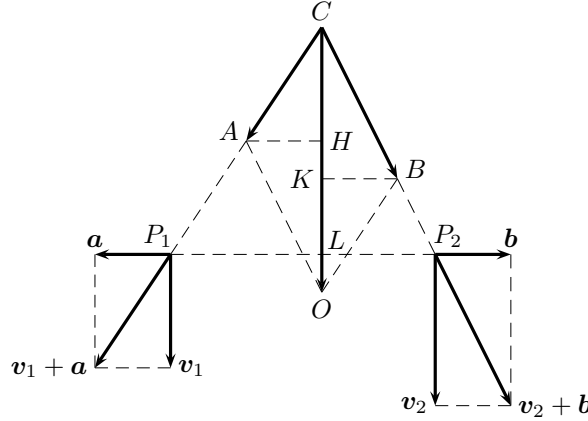


Figura 9.7: La somma di due vettori paralleli.

In tal modo, la risultante \mathbf{v} dei due vettori \mathbf{v}_1 e \mathbf{v}_2 si può scrivere nella forma

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{a} + \mathbf{b} = (\mathbf{v}_1 + \mathbf{a}) + (\mathbf{v}_2 + \mathbf{b}). \quad (9.1)$$

Ora si osservi che i due vettori $\mathbf{v}_1 + \mathbf{a}$ e $\mathbf{v}_2 + \mathbf{b}$ non sono più paralleli ed è pertanto possibile sommarli utilizzando il metodo del parallelogramma. Si prolunghino quindi i due vettori lungo le loro rette di applicazione fino al punto di intersezione C e qui si costruisca il parallelogramma $AOBC$. Siano H e K le proiezioni di A e B sulla diagonale CO . Si osservi che CH è congruente ad \mathbf{v}_1 mentre HO è congruente a \mathbf{v}_2 , quindi il modulo della somma di $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$ è uguale alla somma dei moduli. Inoltre, per la similitudine delle coppie di triangoli CAH , CP_1L e CBK , CP_2L , valgono le relazioni di proporzionalità:

$$CH : AH = CL : LP_1 \quad , \quad CK : KB = CL : LP_2 \quad (9.2)$$

da cui

$$CH \cdot LP_1 = AH \cdot CL \quad , \quad CK \cdot LP_2 = KB \cdot CL \quad (9.3)$$

ma $AH = KB$ quindi i secondi membri delle due equazioni sono uguali. Se ne deduce

$$CH \cdot LP_1 = CK \cdot LP_2 \quad (9.4)$$

relazione che può essere riscritta nella forma

$$v_1 \cdot LP_1 = v_2 \cdot LP_2. \quad (9.5)$$

Resta così dimostrato che le distanze della retta di applicazione della risultante di due vettori paralleli dai punti di applicazione dei vettori addendi sono inversamente proporzionali alle loro intensità.

Si lascia al lettore studioso la dimostrazione che, nel caso che i vettori siano paralleli ma di verso opposto, la risultante ha modulo uguale alla differenza dei moduli ed il verso del maggiore.

Con quanto detto fino qui è possibile un'analisi completa della forze agenti sulla bilancia per la

determinazione della condizione di equilibrio. Il contenuto del precedente teorema 7, osservando che massa e peso sono proporzionali, può essere enunciato affermando che condizione affinché la bilancia sia in equilibrio è che il prodotto del peso applicato in certo punto di un braccio per la distanza di questo punto da O deve essere uguale alla medesima quantità calcolata per l'altro braccio cioè, indicando con \mathbf{F}_1 ed \mathbf{F}_2 le forze peso e con b_1 e b_2 le distanze dei loro punti di applicazione da O , la condizione di equilibrio può essere scritta nella forma

$$F_1 b_1 = F_2 b_2 . \quad (9.6)$$

Si consideri pertanto la figura 9.8a in cui è rappresentata una bilancia sui bracci della quale gravano due forze peso \mathbf{F}_1 ed \mathbf{F}_2 i cui punti di applicazione P_1 e P_2 distano da O rispettivamente b_1 e b_2 e valga la condizione di equilibrio (9.6). Sulla bilancia agisce inoltre la reazione vincolare

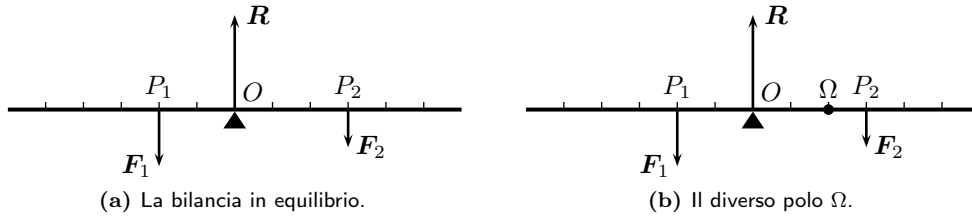


Figura 9.8: Le forze agenti sulla bilancia.

\mathbf{R} applicata al sostegno in O e tale che sia

$$\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{R} = 0 \quad (9.7)$$

Calcolando i momenti delle tre forze rispetto al polo O si trova che il momento $\mathbf{M}_O^{(R)}$ di \mathbf{R} è nullo poiché il punto di applicazione coincide con O . I momenti di \mathbf{F}_1 ed \mathbf{F}_2 sono i vettori

$$\mathbf{M}_O^{(1)} = \mathbf{OP}_1 \times \mathbf{F}_1 \quad , \quad \mathbf{M}_O^{(2)} = \mathbf{OP}_2 \times \mathbf{F}_2 . \quad (9.8)$$

Questi vettori hanno entrambi direzione perpendicolare al foglio, ma il primo ha verso uscente mentre il secondo ha verso entrante. I loro moduli sono dati da

$$M_O^{(1)} = F_1 b_1 \quad , \quad M_O^{(2)} = F_2 b_2 . \quad (9.9)$$

che, per la condizione di equilibrio (9.6), sono uguali. Quindi il momento totale

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{M}_O^{(1)} + \mathbf{M}_O^{(2)} + \mathbf{M}_O^{(R)} = \mathbf{M}_O^{(1)} + \mathbf{M}_O^{(2)} \quad (9.10)$$

è nullo visto che i vettori addendi sono uguali ed opposti. Condizione di equilibrio della bilancia quindi, oltre all'annullarsi delle forze agenti, equazione (9.7), è l'annullarsi del momento totale delle forze agenti.

Per il calcolo dei momenti il polo può essere scelto ovunque. Si consideri, ad esempio, il punto Ω diverso da O , come in figura 9.8b. Il calcolo dei momenti dà

$$\mathbf{M}_\Omega^{(1)} = \mathbf{\Omega P}_1 \wedge \mathbf{F}_1 = (\mathbf{\Omega O} + \mathbf{OP}_1) \wedge \mathbf{F}_1 = \mathbf{\Omega O} \wedge \mathbf{F}_1 + \mathbf{M}_O^{(1)} \quad (9.11)$$

$$\mathbf{M}_\Omega^{(2)} = \mathbf{\Omega P}_2 \wedge \mathbf{F}_2 = (\mathbf{\Omega O} + \mathbf{OP}_2) \wedge \mathbf{F}_2 = \mathbf{\Omega O} \wedge \mathbf{F}_2 + \mathbf{M}_O^{(2)} ;$$

a questi occorre ora aggiungere il momento della reazione vincolare, non più zero:

$$\mathbf{M}_\Omega^{(R)} = \mathbf{\Omega O} \wedge \mathbf{R} . \quad (9.12)$$

Il momento totale è quindi

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_\Omega &= \mathbf{M}_\Omega^{(1)} + \mathbf{M}_\Omega^{(2)} + \mathbf{M}_\Omega^{(R)} = \mathbf{\Omega O} \wedge \mathbf{F}_1 + \mathbf{M}_O^{(1)} + \mathbf{\Omega O} \wedge \mathbf{F}_2 + \mathbf{M}_O^{(2)} + \mathbf{\Omega O} \wedge \mathbf{R} = \\ &= \mathbf{\Omega O} \wedge (\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{R}) + \mathbf{M}_O^{(1)} + \mathbf{M}_O^{(2)} = \mathbf{M}_O^{(1)} + \mathbf{M}_O^{(2)} = \mathbf{M}_O , \end{aligned} \quad (9.13)$$

ove si è usata l'equazione (9.7). Il calcolo del momento totale delle forze, quindi, non dipende dal polo prescelto.

9.2 EQUAZIONI CARDINALI DELLA STATICA.

I risultati qui ottenuti per la bilancia a bracci possono essere generalizzati per qualunque corpo esteso.

Condizione necessaria all'equilibrio di un corpo rigido

Un corpo rigido si trova in equilibrio se sono nulli la risultante delle forze esterne agenti su di esso e il momento totale delle forze esterne rispetto a un polo O comunque scelto.

Se sul corpo agiscono le N forze $\mathbf{F}_1, \dots, \mathbf{F}_N$ applicate nei punti P_1, \dots, P_N , la condizione ora enunciata è espressa dalle equazioni

$$\mathbf{F} = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i = \mathbf{0} \quad , \quad \mathbf{M}_o = \sum_{i=1}^N \mathbf{M}_o^{(i)} = \sum_{i=1}^N \mathbf{OP}_i \wedge \mathbf{F}_i = \mathbf{0} . \quad (9.14)$$

dette *equazioni cardinali della statica del corpo rigido*.

È il caso di precisare che la prima delle due equazioni (9.14) è condizione necessaria all'equilibrio rispetto alle traslazioni, mentre la seconda è condizione necessaria all'equilibrio rispetto alle rotazioni del corpo rigido.

La condizione per l'equilibrio è solo necessaria poiché l'annullarsi di \mathbf{F} ed \mathbf{M}_o , garantisce che la velocità \mathbf{v}_G del centro di massa e la velocità angolare $\boldsymbol{\omega}$ del corpo rigido siano costanti. Quindi perché la condizione data sia anche sufficiente all'equilibrio occorre che il corpo rigido sia in quiete.

9.3 CENTRO DI FORZE PARALLELE. BARICENTRO

Un insieme di N forze parallele ed $\mathbf{F}_1 \dots \mathbf{F}_N$ applicate nei punti $P_1 \dots P_N$ hanno risultante applicata in un punto C detto **centro delle forze parallele**. Per vederlo, si considerino N forze tutte parallele al versore $\hat{\mathbf{w}}$, cioè tali che l' i -esima forza, di componente F_i nella direzione di $\hat{\mathbf{w}}$, si possa scrivere $\mathbf{F}_i = F_i \hat{\mathbf{w}}$; allora il vettore risultante è

$$\mathbf{F} = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i = \sum_{i=1}^N F_i \hat{\mathbf{w}} = \left(\sum_{i=1}^N F_i \right) \hat{\mathbf{w}} = F \hat{\mathbf{w}} \quad (9.15)$$

la risultante, quindi, è anch'esso parallelo a $\hat{\mathbf{w}}$ e ha come componente la somma delle componenti. Il momento delle forze rispetto ad un qualunque polo O è

$$\mathbf{M}_o = \sum_{i=1}^N \mathbf{OP}_i \times \mathbf{F}_i = \sum_{i=1}^N F_i \mathbf{OP}_i \times \hat{\mathbf{w}} \quad (9.16)$$

Si definisce allora **centro delle forze** il punto C dato da

$$\mathbf{OC} = \frac{1}{F} \sum_{i=1}^N F_i \mathbf{OP}_i . \quad (9.17)$$

Con questa definizione il momento delle forze diventa

$$\mathbf{M}_o = F \mathbf{OC} \times \hat{\mathbf{w}} = \mathbf{OC} \times F \hat{\mathbf{w}} = \mathbf{OC} \times \mathbf{F} \quad (9.18)$$

Le N forze quindi agiscono come un'unica forza \mathbf{F} , uguale alla loro risultante, applicata in C . Utilizzando questo linguaggio è possibile ricavare nuovamente il centro di gravità, o baricentro, di un corpo, in modo equivalente a quanto già fatto nella sezione 6.3. Un corpo rigido può essere pensato come un insieme di punti materiali ciascuno sottoposto ad una forza peso. L'insieme delle forze peso agenti su di un corpo rigido è proprio un caso di forze parallele. Il centro delle

forze peso di un corpo rigido, cioè il punto di applicazione della forza peso può essere determinato come segue. Indicato con \hat{j} il versore dell'asse verticale, il peso totale P è dato da

$$\mathbf{P} = \sum_{i=1}^N (-m_i g) \hat{j} = -mg \hat{j} \quad (9.19)$$

ove m è la massa del corpo rigido; pertanto nel caso presente $F_i = -m_i g$ e quindi

$$\mathbf{OC} = \frac{1}{-mg} \sum_{i=1}^N (-m_i g) \mathbf{OP}_i = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{OP}_i. \quad (9.20)$$

Si è così ritrovata l'equazione (6.17).

Per studiare l'equilibrio di un corpo rigido si considera pertanto la forza peso applicata al centro di massa. Determinare il baricentro di un corpo rigido qualsiasi in generale richiede il calcolo integrale ed è quindi fuori dalla portata di questi appunti. Tuttavia in alcuni casi calcolare il baricentro è possibile con tecniche elementari. Di seguito si analizzano alcuni casi.

1. Se il corpo rigido ha un asse di simmetria il baricentro si trova su tale asse.
2. Se il corpo rigido ha più assi di simmetria, il baricentro è il punto di intersezione di tali assi.
3. Se il corpo rigido è composto da più corpi rigidi attaccati insieme, il baricentro del corpo è il baricentro dei baricentri dei corpi componenti.

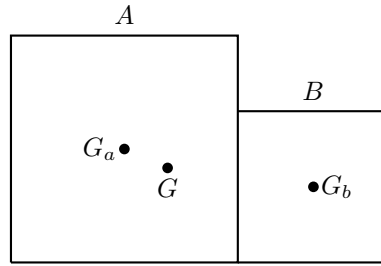


Figura 9.9: Il baricentro di un corpo composto.

La cosa diviene più chiara mediante il seguente esempio. Si consideri un corpo rigido costituito da due corpi A e B di masse m_a ed m_b allora vale

$$\mathbf{OG} = \frac{m_a \mathbf{OG}_a + m_b \mathbf{OG}_b}{m} \quad (9.21)$$

ove $m = m_a + m_b$; infatti valgono

$$\begin{aligned} \mathbf{OG}_a &= \frac{1}{m_a} \sum_A m_i \mathbf{OP}_i \\ \mathbf{OG}_b &= \frac{1}{m_b} \sum_B m_i \mathbf{OP}_i \end{aligned} \quad (9.22)$$

ove con \sum_A si intende la somma limitata ai soli punti del corpo A e similmente per \sum_B . Quindi

$$\begin{aligned} \frac{m_a \mathbf{OG}_a + m_b \mathbf{OG}_b}{m_a + m_b} &= \frac{1}{m_a + m_b} \left(\sum_A m_i \mathbf{OP}_i + \sum_B m_i \mathbf{OP}_i \right) = \\ &= \frac{1}{m_a + m_b} \sum_{A+B} m_i \mathbf{OP}_i = \mathbf{OG} \end{aligned} \quad (9.23)$$

La situazione è illustrata dalla figura 9.9, ove sono rappresentati due cubi che hanno gli spigoli aventi rapporto 3/2.

Similmente, se il corpo rigido presenta un foro, il baricentro si ottiene per sottrazione nel modo seguente.

Si consideri un corpo rigido di massa m che, come in figura 9.10, presenti un buco; sia m_1 la

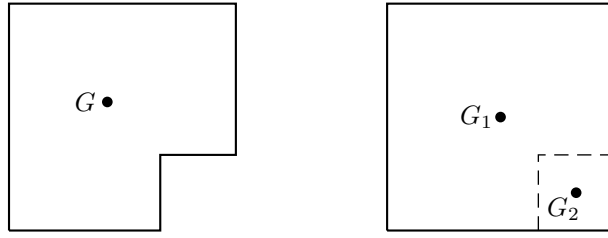


Figura 9.10: Un corpo rigido con un buco.

massa che avrebbe il corpo senza buco e sia G_1 il suo baricentro; sia poi m_2 la ‘massa del buco’ cioè la massa di un corpo che riempie esattamente il buco e sia G_2 il suo baricentro. Allora il baricentro G del corpo è dato da

$$OG = \frac{m_1 OG_1 - m_2 OG_2}{m} \quad (9.24)$$

ove $m = m_1 - m_2$; infatti, utilizzando la (9.21), si ottiene

$$OG_1 = \frac{m OG + m_b OG_2}{m_1} \quad (9.25)$$

da cui segue immediatamente la (9.24).

4. Per la determinare il baricentro delle figure piane può essere utile il **teorema di Pappo-Guldino**² che qui si enuncia senza dimostrazione.

Il volume del solido ottenuto facendo ruotare una figura piana F di 360° attorno ad un asse è uguale al prodotto dell’area \mathcal{A} di F per la lunghezza della circonferenza percorsa dal baricentro di F .

Vale quindi

$$V = 2\pi d\mathcal{A} \quad (9.26)$$

ove d è la distanza del baricentro dall’asse di rotazione. La conoscenza del volume generato e dell’area della figura, consente quindi di determinare la posizione del baricentro.

9.3.1 LA SCALA APPOGGIATA.

Come caso esemplare di equilibrio di un corpo rigido si affronta qui il problema di determinare le condizioni di equilibrio di una scala di lunghezza l appoggiata ad un pavimento scabro e ad una parete liscia, come in figura 9.11.

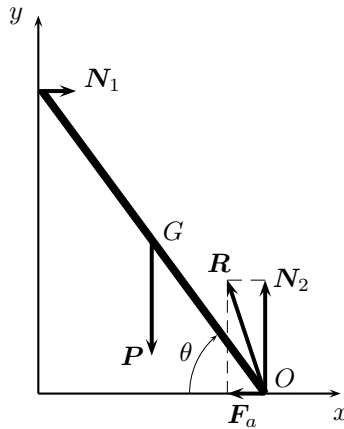


Figura 9.11: La scala appoggiata.

² Pappo (IV sec.), matematico di Alessandria. Paul Guldin (1577–1643), matematico svizzero.

Sulla scala agiscono quindi tre forze: la forza peso $\mathbf{P} = m\mathbf{g}$ applicata al baricentro G , la reazione vincolare \mathbf{N}_1 perpendicolare alla parete liscia, la reazione vincolare \mathbf{R} obliqua al pavimento che si può scomporre nella componente perpendicolare \mathbf{N}_2 e nella componente parallela, cioè l'attrito statico \mathbf{F}_a . Per l'equilibrio deve dunque valere

$$\mathbf{P} + \mathbf{N}_1 + \mathbf{R} = \mathbf{0} , \quad (9.27)$$

la scala appoggia sul pavimento (che è la scelta più conveniente poiché rispetto ad esso due delle forze agenti hanno momento nullo), si ha

$$\mathbf{M}_o^P + \mathbf{M}_o^{N_1} = \mathbf{0} \quad (9.28)$$

Scelti opportunamente gli assi di riferimento (si veda la figura 9.11 ove non è rappresentato l'asse z uscente dal foglio), considerando le componenti x e y della (9.27) e z della precedente, si trovano le seguenti tre equazioni

$$\begin{cases} N_1 - F_a = 0 \\ N_2 - mg = 0 \\ mg \frac{l}{2} \cos \theta - N_1 l \cos \theta = 0 \end{cases} \quad (9.29)$$

che, risolte, forniscono il valore delle reazioni vincolari necessari all'equilibrio:

$$\begin{cases} N_1 = F_a = \frac{1}{2} mg \cotg \theta \\ N_2 = mg \end{cases} \quad (9.30)$$

Ricordando che $F_a \leq \mu_s N_2$, vi è equilibrio se il coefficiente di attrito statico è sufficientemente grande, cioè se:

$$F_a = \frac{1}{2} mg \cotg \theta \leq \mu_s N_2 = \mu_s mg \quad (9.31)$$

da cui si trova la condizione per l'equilibrio:

$$\mu_s \geq \frac{1}{2} \cotg \theta . \quad (9.32)$$

9.4 EQUILIBRIO DI UN CORPO RIGIDO VINCOLATO.

Se un corpo rigido ha un vincolo, lo studio del suo equilibrio deve tenere conto della reazione vincolare; si esaminano qui di seguito due situazioni.

9.4.1 CORPO VINCOLATO AD UN ASSE.

Si consideri dunque un corpo rigido vincolato a ruotare liberamente attorno ad un asse fisso. Su di esso agiscono due forze: il peso \mathbf{P} applicato al baricentro G e la reazione vincolare \mathbf{R} applicata al punto C centro di rotazione attorno all'asse fisso, come illustrato in figura 9.12 ove l'asse di rotazione, non rappresentato, è perpendicolare al foglio in C . Per le equazioni cardinali della statica (9.14) il corpo è in equilibrio se sono nulli la risultante delle forze agenti e il momento totale rispetto a qualunque polo, cioè se valgono

$$\mathbf{P} + \mathbf{R} = \mathbf{0} , \quad \mathbf{M}^P + \mathbf{M}^R = \mathbf{0} . \quad (9.33)$$

Dalla prima di queste equazioni si deduce che le due forze agenti sono uguali in modulo e direzione ma opposte in verso, costituiscono pertanto una *coppia di forze* il cui momento totale, dato dalla (5.79), è nullo se è nullo il braccio della coppia, cioè se le due forze hanno la stessa retta di applicazione. Questo accade quando il baricentro si trova sulla verticale del punto di sospensione. Vi sono pertanto tre possibilità a cui corrispondono tre tipi diversi di equilibrio del corpo rigido illustrate in figura 9.13.

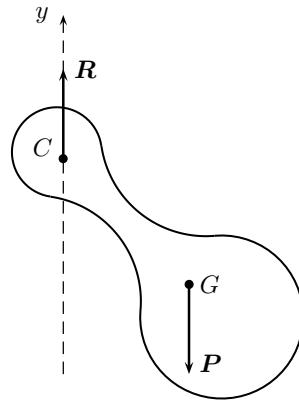


Figura 9.12: Un corpo rigido vincolato ad un asse.

1. Se il baricentro si trova al di sotto del punto di sospensione, ruotando di poco il corpo la coppia di forze formate da \mathbf{P} e \mathbf{R} ha un momento che tende a riportare il corpo nella posizione di equilibrio; si ha quindi **equilibrio stabile**, figura 9.13a.
2. Se il baricentro si trova al di sopra del punto di sospensione, ruotando di poco il corpo la coppia di forze formate da \mathbf{P} e \mathbf{R} ha un momento che tende ad allontanare il corpo dalla posizione di equilibrio; si ha quindi **equilibrio instabile**, figura 9.13b.
3. Se il baricentro coincide con il punto di sospensione, ruotando di poco il corpo la coppia di forze formate da \mathbf{P} e \mathbf{R} ha ancora momento nullo; il corpo quindi si trova ancora in una posizione di equilibrio; si ha quindi **equilibrio indifferente**, figura 9.13c.

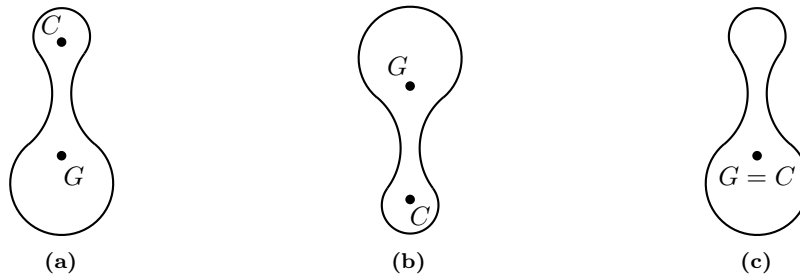


Figura 9.13: I diversi tipi di equilibrio di un corpo rigido vincolato ad un asse.

9.4.2 CORPO RIGIDO APPOGGIATO SU DI UN PIANO ORIZZONTALE.

Su un corpo rigido appoggiato su di un piano agiscono due forze: la forza peso \mathbf{P} e la reazione vincolare \mathbf{N} del piano. Come per il caso precedente, vi è equilibrio se le due forze formano una coppia di braccio nullo. Poiché la reazione vincolare è applicata solo superficie di appoggio, per avere equilibrio è necessario che la forza peso abbia la retta di applicazione passante per la superficie di appoggio, cioè occorre che il baricentro si trovi sulla verticale della superficie di appoggio. Anche qui si danno tre casi possibili a seconda del tipo di equilibrio, come in figura 9.14 ove sono rappresentate tre posizioni di equilibrio di un cono.

Se il corpo non appoggia su una superficie, ma su più punti la reazione vincolare è la somma delle reazioni vincolari che il piano esplica nei diversi punti di appoggio; questi sono vettori paralleli ed equiversi, quindi la loro risultante è, certamente applicata all'interno del poligono avente per vertici i punti di appoggio. Quindi il corpo è in equilibrio solo se il suo baricentro è sulla verticale di qualche punto interno a tale poligono. Si osservi che si per il corpo rigido vincolato ad un asse, sia per quello appoggiato ad un piano orizzontale, la condizione di equilibrio stabile corrisponde, fra tutte le posizioni consentite dal vincolo, a quella in cui l'energia potenziale della forza peso è minima; viceversa la condizione di equilibrio instabile si ha nella posizione in cui essa è massima.

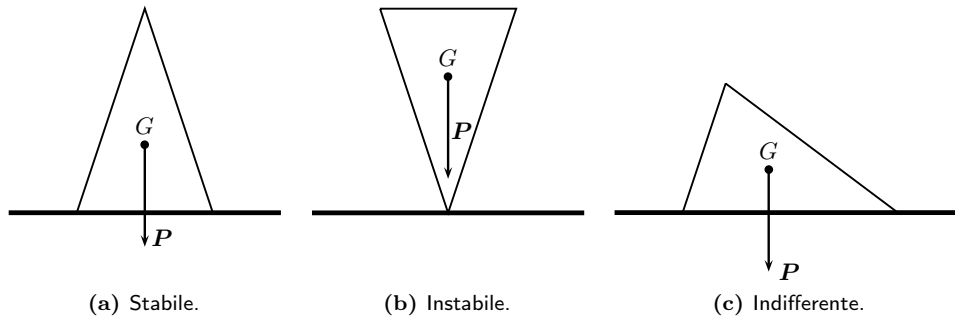


Figura 9.14: I diversi tipi di equilibrio di un corpo rigido appoggiato.

9.5 LA LEVA.

Accanto al piano inclinato e alla carrucola visti in precedenza, vi è un'altra macchina semplice molto importante: si tratta della **leva**. È un corpo rigido, solitamente a forma di asse o di sbarra, con un punto fisso O detto **fulcro**. Consente di equilibrare forze di modulo diverso ed è di grande utilità pratica. La forza F_r che si vuole equilibrare viene detta **forza resistente**, mentre la forza F_m che equilibra viene anche detta **forza motrice**. Vi è equilibrio quando il momento delle forze applicate è nullo; utilizzando come polo il fulcro deve valere

$$F_m b_m = F_r b_r \quad (9.34)$$

ove b_m e b_r sono i bracci delle due forze. Dalla relazione precedente si danno tre possibilità

$$\begin{aligned} b_m > b_r &\iff F_m < F_r \\ b_m = b_r &\iff F_m = F_r \\ b_m < b_r &\iff F_m > F_r \end{aligned} \quad (9.35)$$

Nel primo caso la forza motrice è minore della forza resistente: la leva si dice **vantaggiosa**. Nel secondo caso la forza motrice è uguale alla forza resistente: la leva si dice **indifferente**. Nel terzo caso la forza motrice è maggiore della forza resistente: la leva si dice **svantaggiosa**. Le leve sono classificate anche a seconda della posizione del fulcro. Si dice di **primo genere**

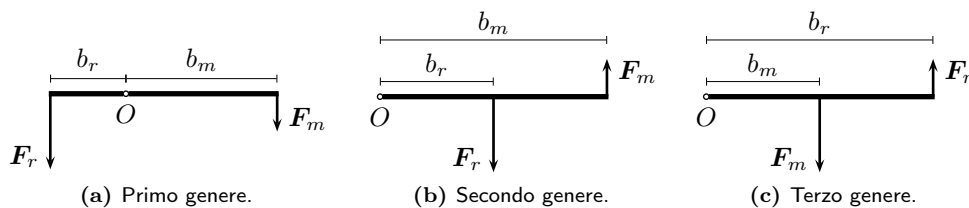


Figura 9.15: I diversi generi di leva.

una leva in cui il fulcro si trova tra il punto di applicazione della forza motrice e quello della forza resistente; può essere vantaggiosa, svantaggiosa o indifferente. Sono leve del primo tipo la bilancia a bracci, la stadera, la forbice, la tenaglia e la carrucola.

Si dice di **secondo genere** una leva in cui il punto di applicazione della forza resistente si trova tra il fulcro e il punto di applicazione della forza motrice; è sempre vantaggiosa. Sono leve del secondo tipo la carriola, il remo e lo schiaccianoci.

Si dice di **terzo genere** una leva in cui il punto di applicazione della forza motrice si trova tra il fulcro e il punto di applicazione della forza resistente; è sempre svantaggiosa. Sono leve del terzo tipo le pinzette, le pinze prendi ghiaccio, l'avambraccio umano.

Parte III

MECCANICA DEI LIQUIDI.

10

STATICA DEI LIQUIDI.

10.1 STATI DI AGGREGAZIONE DELLA MATERIA.

La materia può presentarsi in tre diversi stati di aggregazione: solido, liquido e aeriforme. Che una certa sostanza si presenti in uno di questi tre stati dipende dalla relazione fra l'energia potenziale della forza di attrazione intermolecolare e l'energia cinetica delle sue molecole.

In una sostanza allo **stato solido** l'energia cinetica molecolare è piccola rispetto all'energia potenziale; le molecole quindi sono fortemente legate fra loro, sono disposte in maniera ordinata secondo un schema regolare detto **reticolo cristallino**; alle molecole rimane solo la libertà di vibrare attorno alla loro posizione reticolare. Come conseguenza un corpo solido ha una forma definita, è rigido ed incompressibile.

In una sostanza allo **stato aeriforme** l'energia cinetica è grande rispetto all'energia potenziale; le molecole quindi sono libere di muoversi indipendentemente le une dalle altre con un moto fortemente disordinato. Come conseguenza un aeriforme non ha una forma definita e tende ad occupare tutto il volume che ha a disposizione (va quindi conservato in recipienti chiusi) ed è fortemente compressibile.

Una sostanza allo **stato liquido** ha un comportamento intermedio fra i due precedenti; l'energia cinetica e l'energia potenziale hanno valori paragonabili; il moto delle molecole non è tale da renderle libere, ma è sufficiente a rompere l'ordine del reticolo cristallino; tuttavia le forze intermolecolari sono ancora sufficienti a far sì che la distanza media fra le molecole sia simile a quella della sostanza nello stato solido. Come conseguenza un liquido non ha una forma definita ma tende ad assumere la forma del recipiente che lo contiene ed è molto poco comprimibile; sue caratteristiche sono la **tensione superficiale** e la **viscosità**.

In quel che segue si affronta lo studio della meccanica delle sostanze nello stato liquido.

10.2 DENSITÀ E PRESSIONE.

La forza di interazione molecolare è piuttosto complessa da trattare poiché è attrattiva quando le molecole si trovano ad una distanza superiore a qualche ångström¹. Al di sotto di tale distanza la forza diventa fortemente repulsiva. Inoltre, anche riuscendo a risolvere il problema dinamico per una forza simile, non si tratta dell'interazione fra due molecole, ma dell'interazione reciproca di un numero enorme di molecole. Per avere un'idea di questo numero si consideri che in un litro d'acqua vi sono circa 10^{25} molecole. Non è quindi possibile affrontare il problema utilizzando il modello di punto materiale e la teoria della meccanica newtoniana utilizzata fin qui e descrivere il moto delle molecole del liquido in termini di forze, accelerazioni e velocità. È pertanto necessario trovare un diverso approccio al problema.

Per far ciò è necessario utilizzare un *modello* diverso che utilizzi nuove grandezze fisiche dette **grandezze macroscopiche** che, rinunciando a descrivere il moto di ogni singola molecola di liquido, rendano conto del comportamento del liquido nel suo complesso.

Si definisce **densità** ρ di un corpo il rapporto fra la sua massa m e il suo volume V ; vale cioè

$$\rho = \frac{m}{V} . \quad (10.1)$$

La densità ha le dimensioni di una massa diviso un volume, vale cioè $[\rho] = [l]^{-3}[m]$; la sua unità di misura è il kg m^{-3} . Un corpo si dice **omogeneo** se qualunque porzione di esso ha la stessa

¹ L'ångström, (simbolo Å) è una unità di misura di lunghezza molto usata in fisica atomica; vale la relazione $1 \text{ Å} = 10^{-10} \text{ m}$. Anders Jonas Ångström (1814–1874), fisico svedese.

densità; se il corpo non è omogeneo la densità può variare da punto a punto; in questo caso per definire la densità nel punto P si considera una piccola porzione del corpo che racchiuda P e si calcola il rapporto fra massa e volume al tendere a zero del volume della porzione.

Come detto sopra, le sostanze allo stato liquido sono molto poco comprimibili. In questi appunti si suppone che i liquidi siano perfettamente incompressibili e che, quindi, la loro densità sia costante (si veda oltre la definizione di *liquido perfetto* alla sezione 11.1).

Accanto al concetto di densità, è a volte utile introdurre quello di **peso specifico**. P_s . Esso è definito come il rapporto fra il modulo della forza peso mg e il volume V di un corpo. Vale dunque

$$P_s = \frac{mg}{V} = \rho g . \quad (10.2)$$

Ha le dimensioni di una forza diviso un volume, vale cioè $[P_s] = [t]^{-2}[l]^{-2}[m]$; quindi la sua unità di misura è N m^{-3} .

Il peso specifico è un concetto da usare con una certa cautela visto che l'accelerazione di gravità g non è costante sulla superficie terrestre.

Si definisce **pressione** p esercitata da una forza \mathbf{F} su una superficie il rapporto fra il modulo F_\perp della componente della forza perpendicolare alla superficie e l'area S della superficie in questione; vale cioè

$$p = \frac{F_\perp}{S} . \quad (10.3)$$

La pressione ha le dimensioni di una forza diviso una superficie, vale cioè $[p] = [t]^{-2}[l]^{-1}[m]$; la sua unità di misura è detta pascal² (simbolo Pa); esercita la pressione di un pascal la forza di un newton che preme su una superficie di un metro quadrato, vale quindi

$$1 \text{ Pa} = 1 \text{ N m}^{-2} = 1 \text{ kg m}^{-1} \text{ s}^{-2} . \quad (10.4)$$

Le definizioni di densità e pressione date qui sopra valgono qualsiasi sia lo stato di aggregazione della materia del corpo in questione. Se, in particolare, il corpo è liquido è importante definire la pressione *all'interno* del liquido. Si consideri dunque un punto P interno al liquido e si consideri una piccola superficie S di centro P disposta orizzontalmente, allora la pressione p è il rapporto fra la forza che il liquido soprastante esercita sulla superficie e l'area della superficie stessa. Il valore della pressione, in generale, può essere diverso da punto a punto quindi si definisce la pressione nel punto P come il valore cui tende il rapporto F/S al tendere a zero della superficie.

10.2.1 PRESSIONE ATMOSFERICA.

L'atmosfera è l'involucro di gas che avvolge la Terra fino ad un'altezza di qualche migliaio di chilometri. La sua composizione e la sua densità variano molto con la quota ma i suoi componenti principali sono l'azoto e l'ossigeno. Sulla superficie della Terra si può misurare la pressione esercitata da questo 'mare' di gas sovrastante, che viene detta **pressione atmosferica**. Rimandando a una sezione successiva la descrizione dello strumento di misura della pressione atmosferica, qui si osserva che essa varia sia con la latitudine che con l'altitudine e, in un dato punto sulla superficie è comunque soggetta alle variazioni di temperatura e umidità. Si definisce **pressione normale** p_0 quella misurata al livello del mare alla latitudine di 45° e alla temperatura di 15°C . Per la misura della pressione atmosferica, oltre al pascal, si usano altre unità di misura: l'*atmosfera* (simbolo atm), il *bar* (simbolo bar) con il suo sotto multiplo *millibar* (mbar). Valgono le relazioni

$$p_0 = 1 \text{ atm} = 1.01325 \times 10^5 \text{ Pa} = 1.01325 \text{ bar} = 1013.25 \text{ mbar} . \quad (10.5)$$

In questi appunti si suppone sempre la pressione atmosferica abbia il valore normale p_0 .

² Blaise Pascal (1623-1662), matematico, fisico e filosofo francese.

10.3 LIQUIDO IN EQUILIBRIO.

Un liquido si dice *in equilibrio* se è fermo o, meglio, se non vi è trasporto di materia da un punto ad un altro. In realtà, come visto sopra, le molecole di un liquido si muovono; ma dal nuovo punto di vista *macroscopico* ciò non ha alcuna importanza, ciò che conta è che la velocità media delle molecole del liquido sia un vettore nullo.

La pressione in un liquido in equilibrio ha le seguenti proprietà.

1. La forza esercitata dalla pressione del liquido su ciascuna delle pareti del recipiente che lo contiene è sempre perpendicolare alla parete in questione.

Un semplice esperimento che può mettere in luce questa proprietà è il seguente. Si prenda un palloncino di gomma e lo riempia d'acqua si pratichino dei piccoli fori nella gomma, si vedrà il liquido fuoriuscire con direzione perpendicolare alla superficie da ogni foro, qualsiasi sia la sua posizione.

2. In ogni punto di un liquido in equilibrio la pressione p è indipendente dall'orientazione della superficie rispetto alla quale la pressione viene calcolata.

Per verificarlo si consideri, come rappresentato in figura 10.1, un prisma retto a base triangolare attorno al generico punto P (non rappresentato in figura) di un liquido in equilibrio. Si scelga un sistema di riferimento cartesiano tridimensionale in cui i piani xy , yz e zx si trovino sulle facce ortogonali del prisma; si supponga inoltre per semplicità (ma l'ipotesi non diminuisce la generalità dell'argomento) che la faccia obliqua sia quadrata di lato l ; sia infine θ l'angolo formato dalla faccia obliqua con il piano zx .

Poiché il prisma è supposto in equilibrio la somma delle forze agenti su di esso deve essere nulla; queste sono la forza peso e le forze di pressione. Si comincia col considerare la componente x di queste forze. Vi è la forza di pressione, in figura denotata con \mathbf{F}_1 , che preme sulla faccia yz la cui area è $l^2 \sin \theta$; quindi, indicando con p_x la pressione nella direzione x , il modulo di \mathbf{F}_1 è

$$F_{1x} = p_x l^2 \sin \theta \quad (10.6)$$

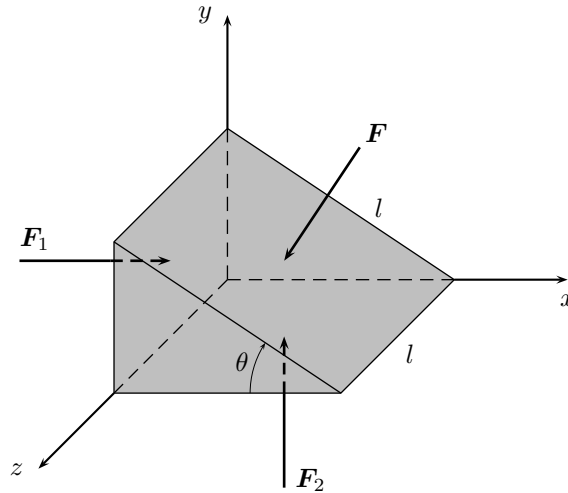


Figura 10.1: Il prisma in equilibrio.

L'altra forza che ha una componente x è la forza di pressione \mathbf{F} che preme sulla superficie obliqua; detta p la pressione nella direzione perpendicolare alla faccia obliqua, il modulo di \mathbf{F} è $F = pl^2$, quindi la sua componente x è

$$F_x = -pl^2 \sin \theta \quad (10.7)$$

La condizione di equilibrio per la componente x quindi diventa

$$p_x l^2 \sin \theta - pl^2 \sin \theta = 0 \quad (10.8)$$

Per quanto riguarda la componente y , vi è la forza di pressione \mathbf{F}_2 che preme sulla faccia zx che ha area $l^2 \cos \theta$; quindi, indicando con p_y la pressione nella direzione y il modulo di \mathbf{F}_2 è

$$F_{2y} = p_y l^2 \cos \theta . \quad (10.9)$$

Vi è poi la componente y della forza \mathbf{F} :

$$F_y = -pl^2 \cos \theta ; \quad (10.10)$$

infine vi è la forza peso $m\mathbf{g}$; poiché il volume del prisma è $V = \frac{1}{2}l^3 \sin \theta \cos \theta$, indicando con ρ la densità del liquido, la componente y della forza peso si può scrivere

$$-mg = -\rho V g = -\frac{1}{2}\rho l^3 g \sin \theta \cos \theta . \quad (10.11)$$

La condizione di equilibrio per la componente y quindi diventa

$$p_y l^2 \cos \theta - pl^2 \cos \theta - \frac{1}{2}\rho l^3 g \sin \theta \cos \theta = 0 \quad (10.12)$$

Mettendo insieme, con le opportune semplificazioni, le due condizioni di equilibrio (10.8) ed (10.12) si trova:

$$\begin{aligned} p &= p_x \\ p &= p_y - \frac{1}{2}\rho l g \sin \theta \cos \theta \end{aligned} \quad (10.13)$$

Se si vuole la pressione nel punto P occorre, come detto sopra, far tendere a zero la superficie, cosa che qui corrisponde a far tendere a zero l . Per le pressioni in P si trova quindi la relazione

$$p = p_x = p_y ; \quad (10.14)$$

poiché questa relazione non dipende dall'angolo di inclinazione della faccia obliqua, la pressione p che preme su una superficie di un liquido in equilibrio è indipendente dall'orientazione della superficie stessa, come si doveva dimostrare. Per quanto riguarda la pressione nella direzione z , basta ripetere la dimostrazione ora vista con una diversa orientazione del prisma.

Anche per questa proprietà è possibile fare un semplice esperimento. Si consideri un palloncino di gomma stavolta gonfiato d'aria e lo si immerga completamente in acqua. Se la pressione all'interno dell'acqua fosse diversa in direzioni diverse, il palloncino ne risulterebbe deformato, invece, pur rimpicciolito a causa della maggiore pressione in acqua rispetto a quella esterna, mantiene la propria forma.

10.4 LEGGE DI STEVIN.

All'interno di un recipiente ove si trovi un liquido in equilibrio si considerino due superfici uguali parallele di area S e distanti h . Poiché il liquido fra le due superfici è in equilibrio la risultante delle forze totali agenti su di esso deve essere nulla.

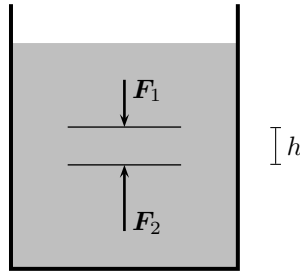


Figura 10.2: La legge di Stevin.

Si comincia a considerare la componente verticale della risultante. Sia p_1 la pressione che preme, verso il basso, sulla superficie superiore e p_2 quella che preme, verso l'alto, sulla superficie inferiore. Sulla porzione del liquido in questione agiscono le seguenti forze verticali: la forza di modulo $F_1 = p_1 S$, dovuta alla pressione p_1 , diretta verso il basso, la forza di modulo $F_2 = p_2 S$, dovuta alla pressione p_2 , diretta verso l'alto e la forza peso, diretta verso il basso, di modulo

$$P = mg = \rho V g \quad (10.15)$$

ove ρ è la densità del liquido e V è il volume della porzione di liquido compresa fra le due superfici e quindi vale $V = Sh$. La condizione di equilibrio quindi richiede che la differenza delle due forze di pressione equilibri la forza peso, cioè che valga

$$F_2 - F_1 = P \quad \Longleftrightarrow \quad p_2 S - p_1 S = \rho S h g \quad (10.16)$$

risistemando questa equazione si ottiene

$$p_2 - p_1 = \rho g h . \quad (10.17)$$

che è nota con il nome di **legge di Stevin**³. La pressione in un liquido, quindi aumenta con la profondità; considerando che la superficie libera di un liquido, essendo in equilibrio con l'atmosfera, ha pressione p_0 , la pressione all'interno di un liquido è sempre maggiore della pressione atmosferica. La legge di Stevin ha alcune importanti conseguenze.

La prima è un immediato corollario della (10.17): la pressione ha lo stesso valore in due punti che si trovino alla stessa profondità.

Un'altra conseguenza della legge di Stevin è la **legge di Pascal**.

Una variazione di pressione in un punto di un liquido si trasmette integralmente in tutti gli altri punti del liquido stesso.

Per vederlo si considerino due punti P_1 e P_2 del liquido, le cui pressioni p_1 e p_2 siano legate dalla (10.17), se la pressione p_1 in P_1 aumenta fino al valore $p'_1 = p_1 + \Delta p$, in P_2 la pressione diviene

$$p'_2 = p'_1 + \rho g h = p_1 + \Delta p + \rho g h = p_2 + \Delta p \quad (10.18)$$

quindi gli aumenti di pressione sono uguali.

Una terza conseguenza della legge di Stevin è il **principio dei vasi comunicanti**.

Se due o più vasi in cui si trovi lo stesso liquido sono in comunicazione, le superfici libere dei liquidi in ciascuno di essi si trovano alla stessa altezza.

Infatti, poiché le superfici libere hanno tutte la stessa pressione p_0 per la legge di Stevin il loro dislivello h deve essere nullo.

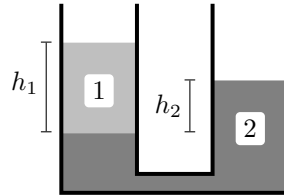


Figura 10.3: Vasi comunicanti.

Le cose sono diverse se due vasi sono riempiti con liquidi di densità diversa. Si considerino due vasi comunicanti riempiti uno con un liquido di densità ρ_1 e l'altro con un liquido di densità $\rho_2 > \rho_1$ e si supponga che i liquidi restino separati senza mescolarsi (per esempio acqua e olio). Poiché i due liquidi sono in equilibrio, la pressione nei punti della superficie di separazione è uguale per entrambi, sia essa p . Inoltre le superfici libere dei due liquidi sono in equilibrio con

³ Simon Stevin (1548–1620), fisico e matematico fiammingo.

l'atmosfera, quindi le loro pressioni sono entrambe uguali a p_0 . I due liquidi sono sottoposti alla stessa differenza di pressione e la legge di Stevin (10.17) applicata ad essi, diventa

$$p_0 - p = \rho_1 g h_1 \quad , \quad p_0 - p = \rho_2 g h_2 \quad (10.19)$$

da cui, per confronto, si ottiene

$$\rho_1 h_1 = \rho_2 h_2 \quad (10.20)$$

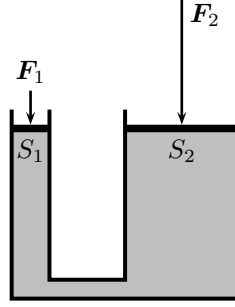


Figura 10.4: Il torchio idraulico.

Quindi, le altezze dei due liquidi sopra la superficie di separazione sono inversamente proporzionali alle rispettive densità. Evidentemente, nel caso particolare in cui le densità siano uguali si ritrova il principio dei vasi comunicanti, cioè $h_1 = h_2$.

10.4.1 TORCHIO IDRAULICO.

La legge di Stevin viene applicata in un dispositivo, detto *torchio idraulico*, con il quale utilizzando una piccola forza è possibile equilibrare forze molto grandi. Come rappresentato in figura 10.4, è costituito da due cilindri di diametro diverso che costituiscono un sistema di vasi comunicanti riempiti dallo stesso liquido e chiusi mediante due pistoni mobili ma a perfetta tenuta.

Sia quindi S_1 l'area del pistone del cilindro più piccolo ed S_2 quella del più grande. Nella posizione di lavoro in cui i due pistoni si trovano alla stessa altezza la pressione del liquido a contatto con i due pistoni è uguale; quindi, se il sistema è in equilibrio, le forze F_1 ed F_2 che spingono sui due pistoni esercitano la stessa pressione, vale cioè

$$\frac{F_1}{S_1} = \frac{F_2}{S_2} ; \quad (10.21)$$

le due forze sono quindi direttamente proporzionali alle superfici sulle quali premono. Pertanto, scegliendo due cilindri con sezioni molto diverse, è possibile equilibrare, con forze modeste, forze anche diverse decine di volte più intense; viene utilizzato come sollevatore o martinetto.

10.4.2 BAROMETRO DI TORRICELLI.

Sulla legge di Stevin si basa anche il funzionamento del primo barometro costruito per la misurazione della pressione atmosferica da Torricelli.⁴ Il dispositivo, illustrato in figura 10.5, è costituito da sottile un tubo di vetro della lunghezza di circa un metro che viene riempito completamente di mercurio (la cui densità è $\rho_{Hg} = 13\,579 \text{ kg m}^{-3}$), tappato accuratamente in modo da non far entrare aria, e quindi immerso in un recipiente contenente anch'esso mercurio. Rimuovendo il tappo si vede il mercurio scendere fino ad un'altezza $h = 760 \text{ mm}$ sulla superficie libera del mercurio nel recipiente. Lo spazio lasciato libero dal mercurio nel tubo è vuoto quindi la pressione è nulla. La pressione atmosferica che preme sulla superficie libera del mercurio nel recipiente, quindi, è tale da equilibrare la colonna di mercurio dentro il tubo.

⁴ Evangelista Torricelli (1607–1647), matematico e fisico italiano.

Poiché la pressione del liquido sulla superficie libera è uguale alla pressione atmosferica p_0 , applicando la legge di Stevin (10.17) si trova

$$p_0 = \rho_H g h . \quad (10.22)$$

L'equazione precedente permette quindi il calcolo della pressione atmosferica che risulta essere $p_0 = 101\,239\text{ Pa}$, assai vicino al valore normale (10.5).

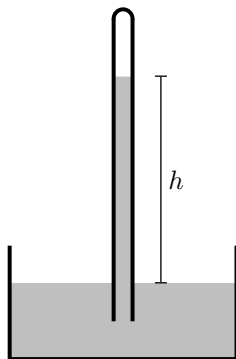


Figura 10.5: Il barometro di Torricelli.

In onore di Torricelli e del suo strumento è stata introdotta un'altra unità di misura della pressione, detta torr, che misura i millimetri di mercurio letti sul barometro. La conversione fra la nuova unità di misura e il pascal è quindi data da

$$760\text{ torr} = 101\,325\text{ Pa} . \quad (10.23)$$

Il barometro di Torricelli ha dei limiti di funzionamento dovuti alla presenza di vapori di mercurio nella parte superiore del tubo, che dovrebbe esser vuota, e al fatto che la misura dipenda da g il cui valore cambia spostandosi sulla superficie terrestre.

Tuttavia l'esperimento di Torricelli ha avuto un'importanza storica fondamentale poiché ha dimostrato che il vuoto può essere prodotto, risolvendo definitivamente un problema, detto dell'*horror vacui*, che era stato dibattuto fin dai tempi di Aristotele.

10.5 LEGGE DI ARCHIMEDE.

Un corpo immerso in un liquido è sottoposto a forze dovute alla pressione che sono tanto più intense quanto più il corpo si trova in profondità, in accordo con la legge di Stevin. Inoltre la parte inferiore del corpo è esposta ad una pressione maggiore della parte superiore; questa differenza di pressione genera una forza netta diretta verso l'alto nota come **spinta di Archimede**.

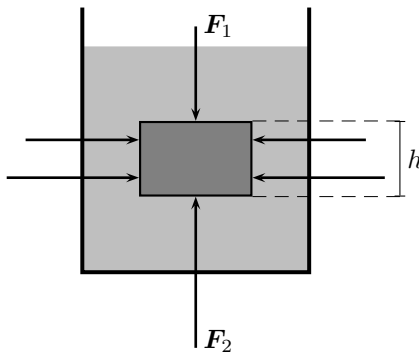


Figura 10.6: La spinta di Archimede.

Il nome è dovuto al fatto che il primo a dare una trattazione scientifica del comportamento dei corpi in acqua è stato lo scienziato siracusano nella sua opera *Sui galleggianti* (in [13] pag. 517).

Si consideri quindi un corpo, avente forma di parallelepipedo, completamente immerso in un liquido di densità ρ_l ; sia S l'area delle basi del parallelepipedo, disposte orizzontalmente, e sia h la sua altezza; pertanto il volume del corpo è dato da $V = Sh$; sia inoltre ρ la sua densità cosicché la massa del corpo è

$$m = \rho V = \rho Sh . \quad (10.24)$$

Sul corpo, oltre alla forza peso, agiscono le forze di pressione; quelle con direzione orizzontale, che agiscono sulle superfici laterali del parallelepipedo, si equilibrano a due a due; quelle con direzione verticale, invece, non si equilibrano e hanno una risultante diretta verso l'alto di modulo

$$\begin{aligned} F_A &= F_2 - F_1 = p_2 S - p_1 S = \\ &= (p_2 - p_1) S = \rho_l g h S \end{aligned} \quad (10.25)$$

ove p_1 e p_2 sono le pressioni agenti sulle due basi del parallelepipedo ed è stata usata la (10.17). Quindi

$$F_A = \rho_l g V . \quad (10.26)$$

La forza F_A è detta *spinta di Archimede*. Per stabilire se in corpo galleggia F_A va confrontata con la forza peso $P = mg = \rho V g$. Quindi, poiché valgono

$$\begin{aligned} F_A > P &\iff \rho_l > \rho \\ F_A < P &\iff \rho_l < \rho , \end{aligned} \quad (10.27)$$

il parallelepipedo galleggia se la sua densità è minore di quella del liquido in cui è immerso, viceversa affonda se la sua densità è maggiore di quella del liquido. Se le due densità sono uguali il parallelepipedo rimane in equilibrio. Si noti che la spinta di Archimede *non dipende* dalla profondità a cui si trova il parallelepipedo.

La spinta di Archimede può essere espressa in un modo semplice osservando che $\rho_l V$ è la massa di una quantità di liquido avente il volume del parallelepipedo; si è soliti riferirsi a questo come il *liquido spostato* dalla presenza del corpo. Quindi $F_A = \rho_l V g$ è il *peso del liquido spostato*.

Quanto visto nel caso semplice del parallelepipedo, può essere generalizzato a corpi di qualsiasi forma; si può quindi enunciare la seguente **legge di Archimede**.

Qualsiasi corpo immerso in un liquido riceve una spinta verso l'alto di modulo uguale al peso del liquido spostato.

Questa legge è vera anche se il corpo galleggia essendo parzialmente immerso.

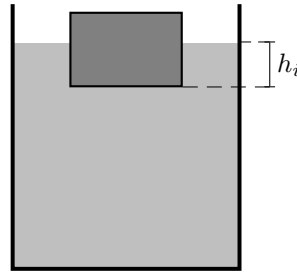


Figura 10.7: Galleggiamento.

Per vederlo si consideri un corpo, per semplicità ancora a forma di parallelepipedo, di densità minore del liquido in cui si trova immerso; la forza di Archimede è maggiore della forza peso, quindi il corpo si muove verso l'alto fino a raggiungere una posizione di equilibrio in cui una parte del corpo è emersa e una parte è immersa, come illustrato in figura 10.7. Sia quindi h_i l'altezza della parte immersa, cosicché il volume immerso è $V_i = Sh_i$.

Sulla superficie superiore, in equilibrio con l'atmosfera, preme verso il basso la pressione p_0 , sulla superficie inferiore preme verso l'alto la pressione, data dalla legge di Stevin:

$$p = p_0 + \rho_l g h_i \quad (10.28)$$

Quindi, il modulo della spinta di Archimede è

$$F_A = pS - p_0S = \rho_l g h_i S = \rho_l g V_i \quad (10.29)$$

che è ancora il peso del liquido spostato, in accordo con la legge di Archimede. Poiché il corpo è in equilibrio questa forza deve avere lo stesso modulo della forza peso $P = mg = \rho V g$; quindi vale

$$F_A = P \quad \Longleftrightarrow \quad \rho_l g V_i = \rho V g \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{V_i}{V} = \frac{\rho}{\rho_l} \quad (10.30)$$

Quindi quando un corpo galleggia il rapporto il volume immerso e il volume totale è uguale al rapporto fra la densità del corpo e la densità del liquido.

10.5.1 EQUILIBRIO DEI GALLEGGIANTI.

Il punto di applicazione della forza peso è il baricentro G del corpo, mentre il punto di applicazione della forza di Archimede è il baricentro C della parte immersa; in generale, per un corpo galleggiante, questi due punti non coincidono, come illustrato nella figura 10.8.

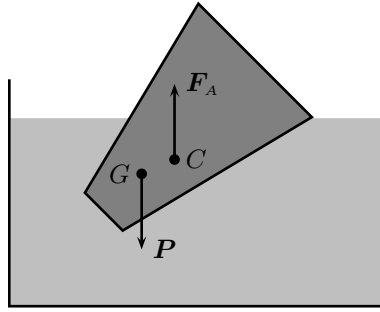


Figura 10.8: Equilibrio di un galleggiante.

Nel caso generale quindi, forza peso e spinta di Archimede costituiscono una coppia di forze che tende a far ruotare il corpo immerso.

Si ha equilibrio del galleggiante quando G e C si trovano sulla stessa verticale; tale equilibrio è stabile o instabile a seconda che il baricentro dell'intero corpo si trovi più in basso o più in alto del baricentro della parte immersa.

L'analisi è complicata dal fatto che mentre G rimane fisso, la posizione di C varia al variare della parte immersa sotto l'azione del momento rotante. Si tratta un problema per progettisti di natanti che qui si può tralasciare.

10.5.2 BILANCIA IDROSTATICA.

La bilancia idrostatica è un dispositivo utilizzato per misurare la densità dei corpi solidi non solubili. La prima descrizione del suo funzionamento si deve a Galilei che, nell'opera giovanile *La bilancetta* (si veda [14], pagina 49), ne fa uso per ricostruire congetturalmente il procedimento che avrebbe seguito Archimede per risolvere il famoso problema della corona di Gerone.

Si tratta di una bilancia a bracci sui quali siano appesi, ad uguale distanza dal punto di sospensione, due piatti uguali. Per la misura della densità ρ di un corpo di massa incognita m è necessario fare due pesate. Nella prima, il corpo viene posto su uno dei piatti ed equilibrato con un corpo di massa nota m_1 . Vale quindi

$$mg = m_1 g \quad \Longleftrightarrow \quad m = m_1 . \quad (10.31)$$

Nella seconda il corpo viene appeso al piatto ed immerso in acqua, che è un liquido di densità nota ρ_a ed equilibrato con un corpo di massa nota m_2 . Vale quindi

$$m_2 g = mg - m_a g \quad \Longleftrightarrow \quad m_2 = m - m_a , \quad (10.32)$$

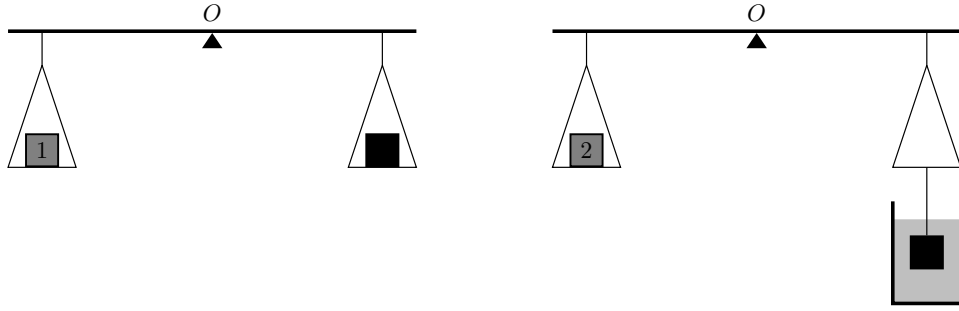


Figura 10.9: La due pesate con la bilancia idrostatica.

ove m_a è la massa dell'acqua spostata. Dal confronto di queste due equazioni si trova

$$m_a = m_1 - m_2 . \quad (10.33)$$

Ma il corpo incognito e l'acqua spostata hanno lo stesso volume V , quindi il rapporto fra le loro masse è uguale al rapporto delle densità, cioè

$$\frac{m}{m_a} = \frac{\rho V}{\rho_a V} = \frac{\rho}{\rho_a} . \quad (10.34)$$

Pertanto la densità incognita è data da

$$\rho = \frac{m}{m_a} \rho_a = \frac{m_1}{m_1 - m_2} \rho_a . \quad (10.35)$$

10.6 TENSIONE SUPERFICIALE.

Come detto più sopra, le molecole di un liquido hanno una forza di attrazione reciproca. Questa interazione è responsabile di un comportamento diverso delle molecole che si trovano all'interno del liquido rispetto a quelle che si trovano sulla superficie libera.

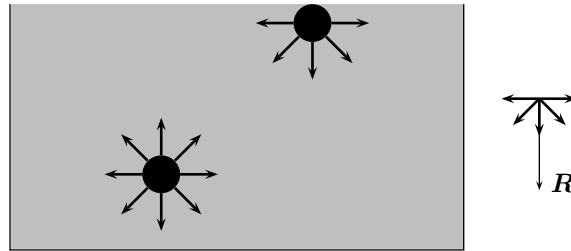


Figura 10.10: La risultante delle forze intermolecolari.

Come si vede dalla figura 10.10, la molecola che si trova sulla superficie libera, diversamente da quella che si trova all'interno, risente di forze non equilibrate, avente risultante \mathbf{R} diretta perpendicolarmente alla superficie libera verso l'interno del liquido. La superficie del liquido, quindi, si comporta come la superficie elastica di palloncino di gomma gonfiabile: ci vuole un certo lavoro per aumentarne l'area.

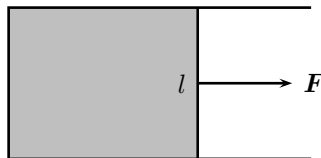


Figura 10.11: La tensione superficiale.

Si prenda un piccolo telaio simile a quello utilizzato per produrre le bolle di sapone, che sia però rettangolare con un lato scorrevole, come in figura 10.11. Si disponga quindi una lamina liquida sul telaio; a causa dell'interazione molecolare la lamina tende a diminuire la propria area, quindi per tenere il telaio in equilibrio è necessario applicare una forza \mathbf{F} ; questa risulta proporzionale alla lunghezza l del lato mobile sul quale agisce. Si definisce allora **tensione superficiale** il rapporto

$$\tau = \frac{F}{2l} \quad (10.36)$$

ove il fattore 2 al denominatore è dovuto al fatto che la lamina è costituita da due superfici e che la forza \mathbf{F} le tiene in equilibrio entrambe. τ ha le dimensioni di una forza fratto una lunghezza, vale cioè $[\tau] = [l]^{-2}[m]$; quindi la sua unità di misura è quindi N m^{-1} .

Per spostare il lato mobile di Δx la forza \mathbf{F} compie il lavoro

$$\mathcal{L} = F\Delta x = 2\tau l\Delta x = \tau\Delta S \quad (10.37)$$

ove ΔS è l'aumento di area delle due facce della lamina. Da questa relazione si vede che la tensione superficiale può essere vista come il lavoro compiuto da una forza esterna costante per aumentare di una unità l'area della lamina di liquido. A questo lavoro è possibile associare una *energia potenziale superficiale* \mathcal{U}_s data da

$$\mathcal{U}_s = \tau S \quad (10.38)$$

La condizione di equilibrio, come visto nel caso dell'equilibrio del corpo rigido, è quella in cui, nel rispetto dei vincoli, l'energia potenziale delle forze agenti è minima; vi è quindi equilibrio quando la superficie del liquido è minima.

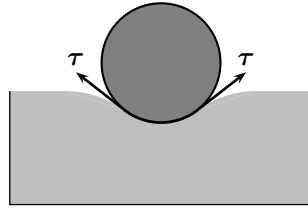


Figura 10.12: L'ago sottile galleggiante.

Questo è il motivo per cui una goccia d'acqua libera assume la forma di una sfera: poiché la sfera è la forma di superficie minima che un dato volume può assumere. In ogni punto della superficie libera del liquido quindi si può associare il vettore $\boldsymbol{\tau}$ avente modulo dato dalla (10.36) direzione tangente alla superficie del liquido e perpendicolare al bordo. Il modulo di tale vettore dipende dalla sostanza con cui il liquido è a contatto; inoltre τ diminuisce all'aumentare della temperatura. Grazie a questa forza certi insetti sono in grado di camminare sull'acqua o è possibile far galleggiare un sottile ago sulla superficie dell'acqua di un bicchiere come rappresentato in figura 10.12. In tutti punti di contatto fra l'acqua e il metallo dell'ago è presente la tensione $\boldsymbol{\tau}$; la risultante di tutte le tensioni è un vettore diretto verso l'alto in grado di equilibrare la forza peso dell'ago.

10.6.1 LINEE DI CONTATTO.

Si dice *linea di contatto* una linea di confine fra tre sostanze diverse, solide liquide o aeriformi. Si consideri per il esempio il caso in cui una goccia di liquido galleggia sopra un altro liquido come illustrato in figura 10.13; si pensi, per esempio ad una goccia d'acqua sul mercurio, o una goccia d'olio sull'acqua. In questo caso, in ogni punto della linea di contatto agiscono le tensioni superficiali dei due liquidi. Queste, a seconda della sostanza con cui il liquido è a contatto, possono essere diverse. La situazione di equilibrio della goccia è quella in cui in ogni punto della linea di contatto le tre tensioni hanno risultante nulla, cioè

$$\boldsymbol{\tau}_{12} + \boldsymbol{\tau}_{23} + \boldsymbol{\tau}_{13} = \mathbf{0} \quad (10.39)$$

Questa condizione implica che i tre vettori τ_{12}, τ_{23} e τ_{13} siano i tre lati di un triangolo, quindi, per un noto teorema di geometria euclidea, il modulo di ciascuno di essi deve essere minore della somma e maggiore della differenza degli altri due. Questo può non essere possibile per certi liquidi; in particolare l'acqua ha una tensione di vapore rispetto all'aria molto grande, quindi capita che certi liquidi non riescano a formare gocce in equilibrio e quindi si diffondono in strati molto sottili sulla superficie dell'acqua.

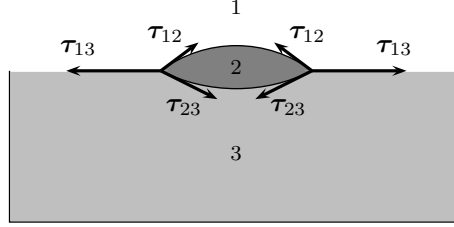


Figura 10.13: Linea di contatto fra due liquidi e l'aria.

Un altro caso importante è quello in cui vi è contatto fra il liquido e la superficie solida del recipiente che lo contiene; in questo caso la linea di contatto si verifica fra il liquido, il solido e l'aria.

In questo caso la somma delle tre tensioni deve equilibrare la reazione vincolare \mathbf{N} perpendicolare alla parete. Deve valere quindi

$$\mathbf{N} + \tau_{12} + \tau_{23} + \tau_{13} = \mathbf{0} . \quad (10.40)$$

La componente di questa equazione rispetto ad un asse y parallelo alla parete e orientato verso l'alto, diviene

$$-\tau_{12} \cos \theta - \tau_{23} + \tau_{13} = 0 \quad (10.41)$$

ove θ , detto **angolo di contatto**, è l'angolo formato dalla tangente al liquido nel punto di

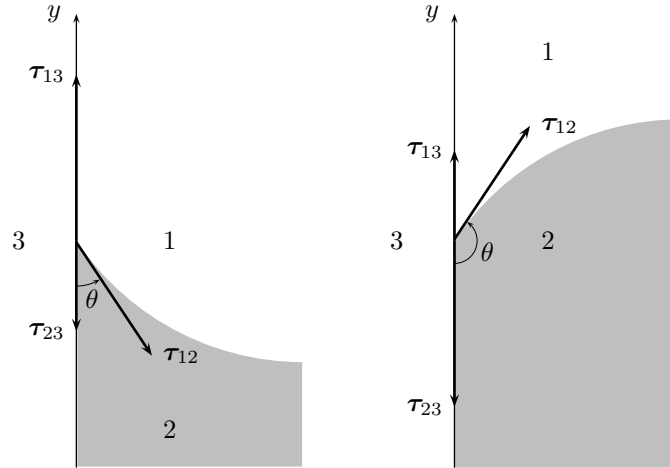


Figura 10.14: Linea di contatto fra liquido, solido e l'aria.

contatto con la parete e la parete stessa. Vale quindi

$$\cos \theta = \frac{\tau_{13} - \tau_{23}}{\tau_{12}} \quad (10.42)$$

che è positivo o negativo a seconda che sia τ_{23} maggiore o minore di τ_{13} . A questi due casi corrisponde un angolo acuto o ottuso, si verificano cioè le due possibilità rappresentate in figura 10.14. Se $\theta < 90^\circ$ si dice che il liquido *bagna* la parete; nel caso particolare $\theta = 0^\circ$ si dice che il liquido *bagna perfettamente* la parete. Se invece $\theta > 90^\circ$ si dice che il liquido *non bagna* la parete.

10.6.2 LEGGE DI YOUNG-LAPLACE.

Una lamina di liquido è in equilibrio fra la pressione interna al liquido e quella esterna. Questa differenza di pressione può essere messa in relazione con la tensione superficiale.

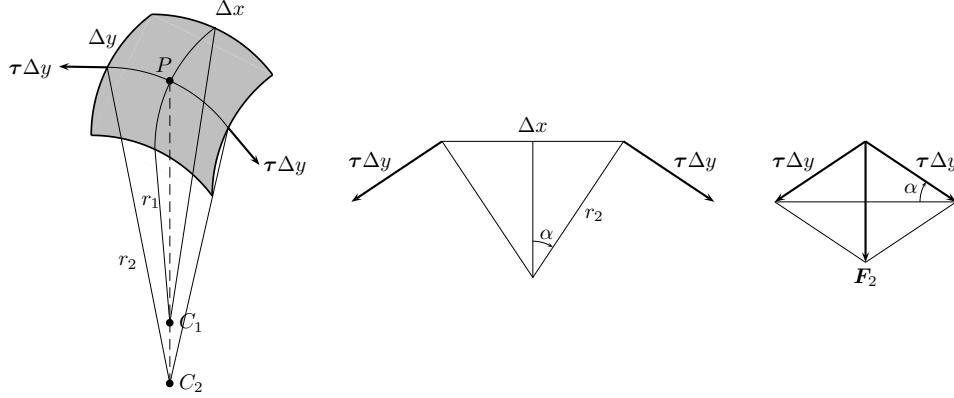


Figura 10.15: Dimostrazione della formula di Young-Laplace.

Si consideri un punto P della superficie di un liquido e una piccola superficie di dimensioni Δx e Δy ; in generale la superficie è curva e i raggi di curvatura nelle due direzioni x e y sono diversi. Siano quindi, con riferimento alla figura 10.15, C_1 e C_2 i centri di curvatura e r_1 ed r_2 i relativi raggi. Sui due bordi di lunghezza Δy agiscono le forze dovute alla tensione superficiale; se la superficie che si sta considerando è piccola, è una buona approssimazione applicare queste forze nei punti medi dei bordi.

Per determinare la risultante di queste forze, riferendosi ancora alla figura 10.15, si vede che vale la proporzione

$$\frac{F}{2} : \tau \Delta y = \frac{\Delta x}{2} : r_2 \quad \Longleftrightarrow \quad F_2 = \frac{\tau}{r_2} \Delta x \Delta y = \frac{\tau}{r_2} \Delta S \quad (10.43)$$

ove $\Delta S = \Delta x \Delta y$ è, nell'approssimazione di piccola superficie, l'area della superficie in questione. Procedendo nello stesso modo per le forze di tensione agenti sui due bordi di lunghezza Δx si trova

$$F_1 = \frac{\tau}{r_1} \Delta y \Delta x = \frac{\tau}{r_1} \Delta S \quad (10.44)$$

La risultante di queste due forze parallele ed equiverse pertanto ha modulo

$$F = F_1 + F_2 = \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) \tau \Delta S. \quad (10.45)$$

Questa forza, diretta nel verso della parte concava della superficie, è la risultante delle forze dovute alla tensione superficiale e deve equilibrare le forze di pressione presenti ai due lati della superficie. Sia dunque p_2 il valore della pressione dal lato concavo della superficie e p_1 il valore della pressione dal lato convesso; vale $p_2 > p_1$ quindi

$$(p_2 - p_1) \Delta S = \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) \tau \Delta S \quad (10.46)$$

quindi

$$p_2 - p_1 = \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) \tau \quad (10.47)$$

che è nota come **legge di Young-Laplace**⁵. La (10.47) può essere utilizzata, per esempio per mettere in relazione la pressione interna di una bolla di sapone con la tensione superficiale dell'acqua saponata che costituisce la bolla stessa.

⁵ Thomas Young (1773–1829), fisico ed egittologo inglese. Pierre-Simon Laplace (1749–1827), scienziato francese.

10.6.3 CAPILLARITÀ.

Se si immerge in un recipiente contenente un liquido un tubo di vetro di diametro molto piccolo, dell'ordine di qualche frazione di millimetro, detto **capillare**, a causa della tensione superficiale il livello del liquido all'interno del capillare è diversa da quella del recipiente, in violazione del principio dei vasi comunicanti. Tale livello è maggiore o minore a seconda che il liquido *bagni* o *non bagni* la superficie del capillare come illustrato in figura 10.16 ove, per chiarezza di rappresentazione, il diametro del capillare è sproporzionatamente ingrandito.

Si consideri quindi, come in figura 10.16a, un tubo capillare di vetro di raggio a immerso in un recipiente contenente un liquido che bagna il vetro (per esempio l'acqua). L'angolo di contatto fra il liquido e la superficie verticale del vetro è acuto, vi è quindi una tensione superficiale diretta verso il basso, quindi, in accordo con la legge di Young-Laplace (10.47), la pressione del liquido è minore della pressione esterna; pertanto il liquido sale lungo il capillare fino ad un'altezza h tale che la pressione idrostatica equilibri tale differenza.

Visto che il capillare è molto sottile, è una buona approssimazione supporre che la superficie concava del liquido, detta **menisco concavo**, sia una porzione di sfera di raggio r . Dall'analisi della figura 10.16a, si vede che vale

$$r = \frac{a}{\cos \theta} . \quad (10.48)$$

Utilizzando la (10.47), osservando che nel caso presente vale $r_1 = r_2 = r$, si ottiene

$$\Delta p = \frac{2\tau}{r} = \frac{2\tau \cos \theta}{a} . \quad (10.49)$$

Questa differenza di pressione deve essere equilibrata dalla colonna di liquido; quindi, usando la

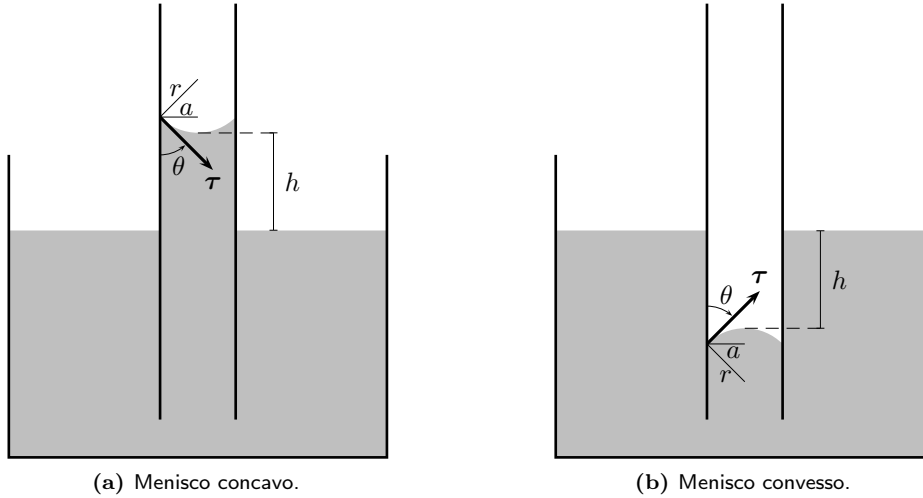


Figura 10.16: Il fenomeno della capillarità.

legge di Stevin (10.17),

$$\Delta p = \rho g h . \quad (10.50)$$

Confrontando le ultime due equazioni si trova infine

$$h = \frac{2\tau \cos \theta}{\rho g} \frac{1}{a} , \quad (10.51)$$

quindi l'altezza del liquido dentro il capillare è quindi inversamente proporzionale al suo raggio. La (10.51) è nota come **legge di Jurin**⁶.

⁶ James Jurin (1684–1750), medico inglese.

Nel caso in cui il liquido non bagni la superficie verticale del vetro (è, per esempio, il caso del mercurio), la tensione superficiale è volta verso l'alto e la superficie del liquido assume una forma convessa detta **menisco convesso**; in accordo con la legge di Young-Laplace, la pressione del liquido è maggiore della pressione esterna, quindi diversamente dal caso precedente il livello del liquido nel capillare scende di un'altezza h . Calcoli analoghi a quelli già visti nel caso precedente portano alla medesima equazione (10.51).

INTERMEZZO. LIQUIDO IN ROTAZIONE.

Si consideri un recipiente di forma cilindrica in cui si trovi un liquido. Se il recipiente è fermo la superficie libera del liquido è piana e orizzontale. Si vuole qui vedere cosa accade se il recipiente viene messo in rotazione con velocità angolare ω attorno al suo asse di simmetria⁷.

Convienne affrontare il problema nel sistema di riferimento, non inerziale, del recipiente rotante. In tale sistema una goccia P di liquido, avente massa m , che si trovi sulla superficie libera è in equilibrio sotto l'azione delle forze di pressione, della forza peso di modulo $P = mg$, della forza centrifuga di modulo $F_c = m\omega^2 x$, ove x è la distanza di P dall'asse di rotazione.

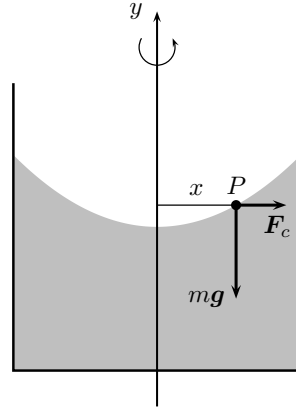


Figura 10.17: Il liquido rotante.

Poiché le forze di pressione sono perpendicolari alla superficie libera del liquido tale deve essere anche la risultante \mathbf{R} di peso e forza centrifuga. Per uno spostamento di P lungo la superficie libera, pertanto, il lavoro di \mathbf{R} è nullo; quindi la somma delle energie potenziali relative a P ed F_c deve avere lo stesso valore in ogni punto della superficie libera del liquido. L'energia potenziale della forza peso è nota ed è data dalla (5.33) e quindi vale $U_p = mgy$; per quanto riguarda la forza centripeta si osservi che, a parte il segno, è formalmente uguale alla forza elastica; quindi la sua energia potenziale ha la stessa espressione formale di quella elastica, cioè vale

$$U_c = -\frac{1}{2}m\omega^2 x^2. \quad (10.52)$$

La condizione di equilibrio quindi è

$$U = U_p + U_c = mgy - \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 = c \quad (10.53)$$

ove c è una costante arbitraria. La precedente equazione si può riscrivere

$$y = \frac{\omega^2}{2g}x^2 + \frac{c}{mg} \quad (10.54)$$

⁷ L'esempio qui presentato ha un grande importanza nella storia della scienza. Newton ha infatti utilizzato un secchio rotante per argomentare l'esistenza dello spazio assoluto, lo si veda in [7] nello *scolio* che segue le definizioni introduttive. L'argomento newtoniano è stato duramente criticato da Mach in [5], pagina 246 e seguenti.

che è l'equazione di una parabola.

Tornando al sistema di riferimento inerziale, la parabola ora determinata gira attorno al suo asse di simmetria generando una superficie detta **paraboloide di rotazione**. Quindi, in condizioni di equilibrio, la superficie libera di un liquido rotante è un paraboloide di rotazione.

11

DINAMICA DEI LIQUIDI.

11.1 DEFINIZIONE DEL MODELLO.

Una descrizione completamente generale del moto di un liquido è assai complessa e va ben oltre i limiti di questi appunti. Qui ci si limita pertanto a studiare una classe molto importante di liquidi. Si dice **perfetto**, o *ideale*, un liquido che sia **perfettamente incompressibile** e che abbia **viscosità nulla**.

Perfettamente incompressibile significa che una massa di liquido conserva il proprio volume qualsiasi sia la pressione cui è sottoposto; un liquido perfettamente incompressibile pertanto ha densità costante.

La *viscosità* è la presenza di attriti fra le diverse parti del liquido e fra il liquido e le pareti del recipiente che lo contiene. Per un liquido a viscosità nulla, quindi, non vi sono perdite di energia per attrito.

Un liquido non viscoso ha alcune caratteristiche già viste per il liquido in equilibrio.

Le forze di pressione agenti su una superficie hanno sempre direzione perpendicolare ad essa.

La pressione in un punto è la stessa in tutte le direzioni. La dimostrazione è analoga a quanto visto nel caso statico alla sezione 10.3; poiché il liquido non è in equilibrio occorre in generale considerare una forza aggiuntiva uguale a ma , che essendo come la forza peso proporzionale alla massa del liquido nel prisma, diventa trascurabile nel limite in cui l tende a zero.

Oltre a queste ipotesi sulla natura del liquido è necessario fare anche le seguenti ipotesi sul tipo di moto compiuto. Si suppone quindi che il moto del liquido sia **stazionario** e **irrotazionale**.

Il moto di un liquido si dice *stazionario* quando in ogni punto dello spazio interessato dal moto del liquido la velocità è costante; cioè, detto in altri termini ogni molecola di liquido che passa per un fissato punto dello spazio ha lo stesso vettore velocità. Nella situazione di moto stazionario pertanto è conveniente associare non una velocità ad ogni molecola di liquido, ma ad ogni punto dello spazio. Questo modo di procedere, assai comodo come si vedrà, è detto **punto di vista euleriano**.

Si dice *irrotazionale* il moto di un liquido in cui non compaiono vortici, cioè un moto in cui ogni porzione di liquido si muove di moto traslatorio senza compiere rotazioni.

Si definisce **linea di flusso**, o *di corrente*, ogni linea che sia in ogni punto tangente a un vettore velocità. Se il liquido è in moto stazionario la velocità è in ogni punto costante nel tempo; quindi la linea di flusso rimane invariata nel tempo. Inoltre, sempre nel caso stazionario, due linee di flusso non si intersecano mai perché se lo facessero vorrebbe dire che nel punto di intersezione le molecole di liquido avrebbero due velocità diverse, ognuna tangente a una diversa linea di flusso.

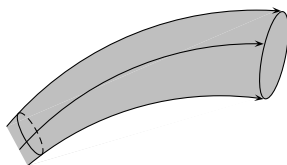


Figura 11.1: Un tubo di flusso.

Si definisce **tubo di flusso** l'insieme di tutte le linee di flusso che passano per una qualunque curva chiusa, come rappresentato in figura 11.1. Se il moto del liquido è stazionario la porzione di liquido che si trova un dato istante all'interno di un dato tubo di flusso vi rimane durante tutto il moto come se si trattasse di un tubo materiale. Per uscirne infatti una molecola di liquido dovrebbe attraversare le linee di flusso che costituiscono la superficie laterale del tubo e quindi si avrebbe intersezione di linee di flusso diverse cosa, come visto sopra, impossibile. Lo stesso argomento porta a riconoscere che del liquido inizialmente esterno ad un tubo di flusso non vi

può penetrare.

Pertanto, nel caso del moto stazionario, che qui si suppone, la dinamica del liquido viene studiata analizzando ciascuno dei tubi di flusso che compongono il liquido in movimento.

11.2 PORTATA.

Si consideri un tubo di flusso e una sua qualsiasi sezione di area S e sia ΔV il volume di liquido che attraversa la sezione nel tempo Δt ; allora si definisce **portata** media del tubo di flusso attraverso la sezione data

$$Q = \frac{\Delta V}{\Delta t}. \quad (11.1)$$

Se il liquido è in moto stazionario la portata è costante; altrimenti, per determinare la portata istantanea, occorre far tendere Δt a zero e quindi $Q = \dot{V}$. Qui si suppone, come già detto, che il moto sia stazionario.

La portata ha le dimensioni di un volume fratto un tempo, vale cioè $[Q] = [t]^{-1}[l]^3$; la sua unità di misura è quindi $\text{m}^3 \text{s}^{-1}$.

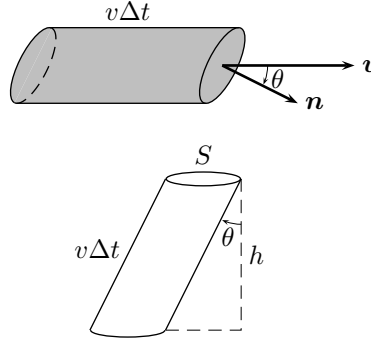


Figura 11.2: Calcolo della portata.

Per calcolare la portata si consideri un intervallo di tempo Δt sufficientemente piccolo che la porzione di tubo di flusso percorsa dal liquido possa essere con buona approssimazione considerata cilindrica (anche se, in generale, non si tratta di un cilindro retto), cioè che le linee di flusso percorse dal liquido siano, in tale intervallo, rettilinee. Si suppone inoltre che il tubo di flusso sia abbastanza sottile e l'intervallo di tempo così piccolo che la velocità del liquido all'interno di tale cilindro possa essere considerata costante. Nel caso generale inoltre, come rappresentato in figura 11.2, la sezione non è perpendicolare alle linee di flusso e quindi alla velocità; sia quindi θ l'angolo formato dalla velocità \mathbf{v} e dal versore \mathbf{n} perpendicolare alla sezione. In queste condizioni, il liquido che attraversa la superficie S è quello contenuto nel cilindro obliquo avente di base S e generatrice $v\Delta t$. Il volume del cilindro obliquo si trova moltiplicando l'area di base per l'altezza h e quest'ultima, come si vede dalla figura, è data da $h = v\Delta t \cos \theta$; quindi il volume ΔV di liquido che attraversa la sezione nell'intervallo di tempo Δt è

$$\Delta V = Sh = Sv\Delta t \cos \theta = S\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}\Delta t \quad (11.2)$$

e quindi la portata:

$$Q = S\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}. \quad (11.3)$$

Pertanto la portata è il prodotto dell'area della sezione per la componente della velocità perpendicolare alla sezione.

Si consideri ora un tubo di flusso di sezione e quota variabile e si consideri il liquido compreso fra due sezioni diverse di area S_1 ed S_2 , come in figura 11.3. Si supponga inoltre che le due sezioni siano abbastanza piccole da poter considerare i moduli delle due velocità v_1 e v_2 costanti in tutti i loro punti. Poiché il liquido è supposto incompressibile, il volume del liquido che entra

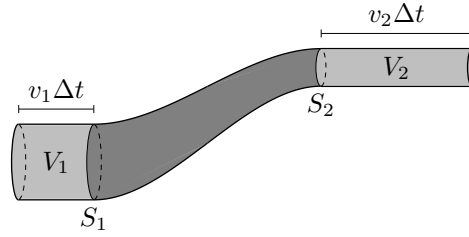


Figura 11.3: Conservazione della portata.

attraverso S_1 deve essere uguale a quello che esce attraverso S_2 in uno stesso intervallo di tempo Δt ; questi due volumi sono, rispettivamente, i volumi dei cilindri¹ di altezza $v_1\Delta t$ e $v_2\Delta t$. Deve quindi valere

$$V_1 = V_2 \quad \Longleftrightarrow \quad S_1 v_1 \Delta t = S_2 v_2 \Delta t \quad \Longleftrightarrow \quad S_1 v_1 = S_2 v_2 ; \quad (11.4)$$

quindi la portata attraverso le due sezioni è la stessa e, visto che le due sezioni sono arbitrarie, si può concludere che la velocità di un liquido in un tubo di flusso è inversamente proporzionale alla sezione perpendicolare del tubo e quindi che la portata è costante, vale cioè

$Q = \text{costante} .$

(11.5)

Questa **legge di conservazione della portata** è anche nota come **equazione di continuità**.

11.3 TEOREMA DI BERNOULLI.

Si consideri una porzione di liquido in un tubo di flusso compresa fra due sezioni ortogonali di area S_1 ed S_2 ; si vuole applicare il teorema dell'energia cinetica al moto di questa porzione di liquido nel suo moto durante il tempo Δt . Facendo riferimento alla figura 11.4, ove la porzione di liquido in esame è raffigurata più scura, le forze che agiscono sul liquido, sono la forza peso \mathbf{P} , la forza \mathbf{F}_1 dovuta alla pressione p_1 che preme sulla superficie S_1 spingendo il liquido e quindi compiendo un lavoro positivo e la forza \mathbf{F}_2 dovuta alla pressione p_2 che preme sulla superficie S_2 opponendosi al moto del liquido e quindi compiendo un lavoro negativo.

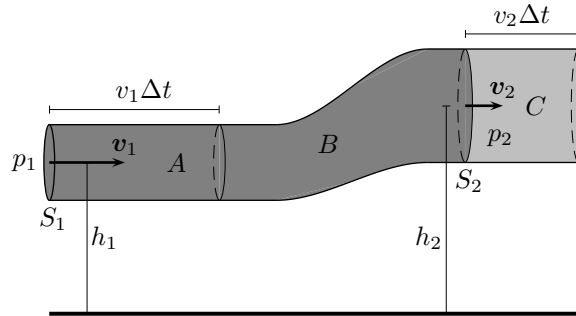


Figura 11.4: Il teorema di Bernoulli.

Durante l'intervallo di tempo Δt la superficie S_1 del liquido, che si trova ad un'altezza h_1 , si muove con velocità v_1 e quindi il suo spostamento è $\Delta s_1 = v_1\Delta t$; similmente la superficie S_2 , che si trova ad un'altezza h_2 , si muove con velocità v_2 e quindi il suo spostamento è $\Delta s_2 = v_2\Delta t$. I lavori delle forze di pressione sono quindi

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_1 &= F_1 \Delta s_1 = p_1 S_1 v_1 \Delta t \\ \mathcal{L}_2 &= -F_2 \Delta s_2 = -p_2 S_2 v_2 \Delta t \end{aligned} \quad (11.6)$$

¹ Per semplicità si sta qui considerando il caso in cui le due sezioni sono perpendicolari alle linee di flusso, cosicché i cilindri sono retti; questa ipotesi non limita la generalità dell'argomento. Si lascia la lettore studioso la riformulazione della dimostrazione nel caso di sezioni oblique.

Per il calcolo del lavoro della forza peso è possibile usare la variazione di energia potenziale; all'inizio dell'intervallo di tempo Δt il liquido occupa i volumi indicati in figura con A e B, mentre alla fine occupa i volumi indicati con B e C. Poiché l'energia potenziale dipende solo dalla posizione, il lavoro della forza peso è dato da

$$\mathcal{L}_p = [\mathcal{U}_p(A) + \mathcal{U}_p(B)] - [\mathcal{U}_p(A) + \mathcal{U}_p(C)] = \mathcal{U}_p(A) - \mathcal{U}_p(C) . \quad (11.7)$$

L'energia potenziale della forza peso agente sulla porzione A del liquido si calcola osservando che la massa m_1 è uguale alla densità ρ per il volume V_1 del cilindro di area di base S_1 e altezza $v_1 \Delta t$, quindi

$$\mathcal{U}_p(A) = m_1 g h_1 = \rho V_1 g h_1 = \rho S_1 v_1 \Delta t g h_1 \quad (11.8)$$

similmente per la porzione C si trova

$$\mathcal{U}_p(C) = \rho S_2 v_2 \Delta t g h_2 \quad (11.9)$$

Il lavoro della forza peso è quindi

$$\mathcal{L}_p = \rho S_1 v_1 \Delta t h_1 - \rho S_2 v_2 \Delta t g h_2 \quad (11.10)$$

Il lavoro totale compiuto sul liquido è uguale alla variazione dell'energia cinetica. Dal punto di vista euleriano qui considerato, la velocità e, quindi, l'energia cinetica dipendono dalla posizione; pertanto similmente a quanto visto per l'energia potenziale della forza peso, vale

$$\Delta \mathcal{E}_c = [\Delta \mathcal{E}_c(B) + \Delta \mathcal{E}_c(C)] - [\Delta \mathcal{E}_c(A) + \Delta \mathcal{E}_c(B)] = \Delta \mathcal{E}_c(C) - \Delta \mathcal{E}_c(A) \quad (11.11)$$

L'energia cinetica della porzione A del liquido è quindi

$$\mathcal{E}_c(A) = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 = \frac{1}{2} \rho V_1 v_1^2 = \frac{1}{2} \rho S_1 v_1 \Delta t v_1^2 \quad (11.12)$$

e similmente per la porzione C:

$$\mathcal{E}_c(C) = \frac{1}{2} \rho S_2 v_2 \Delta t v_2^2 . \quad (11.13)$$

Mettendo insieme tutto quanto trovato, il teorema dell'energia cinetica si scrive

$$\begin{aligned} p_1 S_1 v_1 \Delta t - p_2 S_2 v_2 \Delta t + \rho S_1 v_1 \Delta t g h_1 - \rho S_2 v_2 \Delta t g h_2 = \\ = \frac{1}{2} \rho S_2 v_2 \Delta t v_2^2 - \frac{1}{2} \rho S_1 v_1 \Delta t v_1^2 . \end{aligned} \quad (11.14)$$

Osservando che per la legge di conservazione della portata, (11.4), vale $S_1 v_1 = S_2 v_2$, l'equazione precedente si può semplificare in

$$p_1 - p_2 + \rho g h_1 - \rho g h_2 = \frac{1}{2} \rho v_2^2 - \frac{1}{2} \rho v_1^2 . \quad (11.15)$$

che può essere utilmente riscritta nella forma

$$p_1 + \rho g h_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 = p_2 + \rho g h_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2 ; \quad (11.16)$$

poiché le sezioni S_1 ed S_2 sono state scelte arbitrariamente sul tubo di flusso, la precedente equazione esprime un teorema di conservazione detto **teorema di Bernoulli**²:

$$p + \rho g h + \frac{1}{2} \rho v^2 = \text{costante} .$$

(11.17)

Il teorema di Bernoulli non è altro che il teorema di conservazione dell'energia in cui si tenga conto anche del lavoro delle forze di pressione.

² Daniel Bernoulli (1700–1782), matematico e fisico svizzero.

Dividendo i due membri dell'equazione (11.17) per la quantità costante ρg , si ottiene una relazione fra tre grandezze aventi le dimensioni di una lunghezza:

$$\frac{p}{\rho g} + y + \frac{v^2}{2g} = \text{costante} . \quad (11.18)$$

La prima, detta **altezza piezometrica**, è l'altezza che deve avere una colonna di liquido di densità ρ per esercitare la pressione p ; la seconda è l'altezza geometrica; la terza, detta **altezza cinetica**, è l'altezza massima raggiunta da un corpo lanciato verso l'alto con velocità iniziale v . Per il teorema di Bernoulli, quindi, in ogni punto di un qualsiasi tubo di flusso di un liquido perfetto in moto stazionario e irrotazionale la somma delle altezze piezometrica, geometrica e cinetica è costante.

11.3.1 TEOREMA DI TORRICELLI.

Si consideri un liquido contenuto in un recipiente ove sia praticato un piccolo foro. Si vuole calcolare la velocità di fuoriuscita del liquido dal foro.

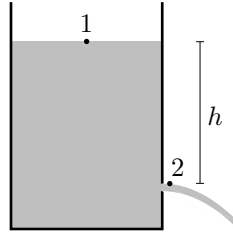


Figura 11.5: Il teorema di Torricelli.

Si supponga che il foro abbia una sezione S_2 molto più piccola della superficie libera S_1 del liquido; in tal modo il livello del liquido si abbassa così lentamente da potersi trascurare la velocità di discesa. Si considerino quindi un tubo di flusso che colleghi un qualsiasi punto 1 sulla superficie libera e un punto 2 sulla superficie del getto appena al di fuori del foro. In questi due punti il liquido è in equilibrio con la pressione atmosferica, si trovano quindi alla stessa pressione p_0 . Quindi, nel caso presente, il teorema di Bernoulli (11.16) si scrive

$$p_0 + \rho g h_1 = p_0 + \rho g h_2 + \frac{1}{2} \rho v^2 \quad (11.19)$$

e quindi, indicando con $h = h_1 - h_2$ la differenza di altezza fra la superficie libera ed il foro, si trova

$$v = \sqrt{2gh} . \quad (11.20)$$

Si riconosce che la velocità trovata è quella raggiunta da un corpo in caduta libera per un'altezza h . L'equazione ora trovata è nota come **teorema di Torricelli**.

11.3.2 EFFETTO VENTURI.

Si consideri liquido che scorre in un condotto orizzontale con una strozzatura e siano S_1 l'area della sezione normale ed S_2 quella della strozzatura, come in figura 11.6. Applicando il teorema di Bernoulli a qualunque tubo di flusso interno al condotto, riconoscendo che, essendo il condotto orizzontale, vale $h_1 = h_2$, si trova

$$p_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2 . \quad (11.21)$$

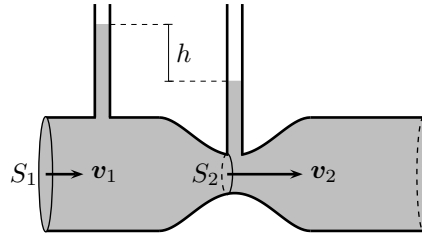


Figura 11.6: Effetto Venturi.

Per la conservazione della portata si ha

$$v_2 = \frac{S_1}{S_2} v_1 \quad (11.22)$$

che sostituita nella precedente, permette di trovare la pressione p_2 nella strozzatura

$$p_2 = p_1 - \frac{1}{2} \rho (v_2^2 - v_1^2) = p_1 - \frac{1}{2} \rho \left(v_2^2 - \frac{S_1^2}{S_2^2} v_2^2 \right) \quad (11.23)$$

e quindi

$$p_2 = p_1 - \frac{1}{2} \rho \frac{S_1^2 - S_2^2}{S_1^2} v_2^2. \quad (11.24)$$

Quindi la pressione del liquido nella strozzatura è tanto minore della pressione nel resto del tubo quanto maggiore è la differenza fra le aree delle due sezioni. Questo fenomeno è detto **effetto Venturi**³.

11.3.3 EFFETTO MAGNUS.

Un corpo sferico che compie in moto rototraslatorio in un liquido risente di una forza che ne devia la traiettoria.

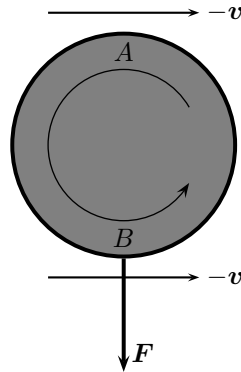


Figura 11.7: Effetto Magnus.

L'analisi completa del problema è piuttosto complessa e al di là dei limiti di questi appunti. Tuttavia vale la pena di far un'analisi qualitativa delle forze in gioco per capire quello che accade. Si consideri quindi una sfera in moto in un liquido in modo tale che il suo centro di massa si muova con velocità costante \mathbf{v} e la sfera ruoti attorno ad un asse passante per il centro di massa e perpendicolare a \mathbf{v} con velocità angolare ω . Conviene analizzare il problema nel sistema di riferimento del centro di massa. Con riferimento alla figura 11.7 ove la sfera è in moto verso sinistra, nel sistema del centro di massa essa risulta ruotare immersa in una corrente che scorre verso destra con velocità $-\mathbf{v}$, i punti sulla superficie del corpo, tuttavia si muovono rispetto al liquido: nel punto A la velocità dei punti della sfera ha verso opposto di quella del liquido: tali

³ Giovanni Battista Venturi (1746-1822), fisico italiano.

velocità quindi, si sottraggono; viceversa, in B i punti sulla sfera hanno velocità che si somma con quella del liquido. Quindi la sfera si trova immersa in un liquido la cui velocità è maggiore in B che in A . Poiché, come visto sopra, vi è una depressione nei punti del liquido di maggiore velocità, questo esercita sulla sfera una pressione maggiore in A che in B ; la sfera quindi è sottoposta ad una forza perpendicolare alla direzione del moto diretta nel verso da A a B . Essendo questa forza sempre perpendicolare alla velocità del centro di massa della sfera, questo si muove lungo un arco di circonferenza.

Questo fenomeno è noto con il nome di **effetto Magnus**⁴.

11.4 VISCOSITÀ.

Quando un liquido reale si muove si manifestano delle forze d'attrito fra il liquido e le superfici del recipiente che lo contiene; vi sono anche forze di attrito fra diverse parti del liquido che scorrono le une sulle altre. Queste forze sono dovute alla coesione fra le molecole del liquido e danno origine a quella caratteristica macroscopica nota come **viscosità**. Un liquido viscoso non rispetta il teorema di Bernoulli poiché le forze d'attrito compiono un lavoro di cui occorre tenere conto. Inoltre se la velocità del liquido supera un certo valore limite il moto del liquido diventa turbolento e la sua descrizione assai complicata. In quel che segue si suppone che le velocità in gioco siano sempre largamente inferiori a tale valore limite.

Per definire la viscosità di un liquido si consideri uno strato di liquido compreso fra due lamine orizzontali che siano in moto una rispetto all'altra. Se il liquido fosse perfetto rimarrebbe immobile, la lamina in moto non eserciterebbe infatti alcuna forza sul liquido; se il liquido è viscoso, invece, vi sono delle forze di adesione fra la superficie superiore dello strato e la lamina in moto e anche fra i versi strati del liquido. Il moto della lamina, pertanto, si trasmette ai diversi strati del liquido fino alla superficie inferiore, che, essendo a contatto con la lamina ferma, rimane anch'essa ferma, la velocità quindi diminuisce con la profondità.

La forza d'attrito F_a fra strato e strato è stata determinata sperimentalmente da Newton; il suo modulo vale

$$F_a = \eta S \frac{\Delta v}{\Delta y} \quad (11.25)$$

ove S è la superficie dello strato, Δv è la variazione di velocità corrispondente ad una variazione Δy di profondità, e η è il **coefficiente di viscosità** ed è caratteristico del tipo di liquido. Le sue dimensioni sono di una forza per un tempo fratto una superficie, vale cioè $[\eta] = [t]^{-1}[l]^{-1}[m]$; quindi la sua unità di misura è Ns m^{-2} . Il coefficiente di viscosità può essere misurato mediante il seguente esperimento. Si consideri recipiente in cui si trovi un liquido di profondità h su cui

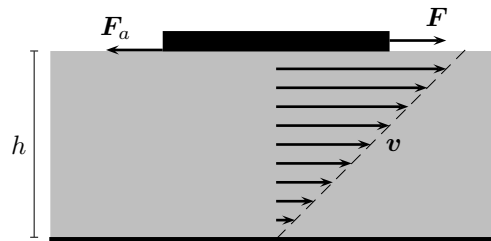


Figura 11.8: La misura di η .

galleggi una lastra avente area S e comunque di dimensioni grandi rispetto ad h ; si imprima alla lastra una forza di modulo crescente fino a che la velocità non raggiunge il valore costante v ; a questo punto il modulo F della forza impressa è uguale al modulo della forza di attrito F_a . La precedente equazione quindi diventa

$$F = \eta S \frac{v}{h} \quad (11.26)$$

e quindi dalla misura di F , v , S e h è possibile determinare η .

⁴ Heinrich Gustav Magnus (1802–1870), fisico tedesco.

11.4.1 ATTRITO VISCOSO.

È un dato sperimentale che un corpo in moto in un liquido subisce una forza frenante detta forza di **attrito viscoso** \mathbf{F}_v ; la sua direzione è la stessa del moto, ma il verso è opposto ed il modulo è proporzionale alla velocità; vale quindi

$$\mathbf{F}_v = -\beta \mathbf{v} = -\gamma \eta \mathbf{v} , \quad (11.27)$$

ove η è il coefficiente di viscosità e γ dipende dalla forma del corpo. Per un corpo sferico di raggio r vale la semplice relazione

$$\gamma = 6\pi r , \quad (11.28)$$

nota come **legge di Stokes**⁵.

Si consideri il caso di un corpo di massa m che si muova sotto l'azione di una forza costante \mathbf{F} , come per esempio la forza peso, in un liquido viscoso. L'equazione fondamentale della dinamica (3.12) in questo caso si scrive

$$\mathbf{F} - \beta \mathbf{v} = m \mathbf{a} . \quad (11.29)$$

Poiché la forza d'attrito viscoso dipende dalla velocità, la soluzione generale di questa equazione e la determinazione della legge oraria del moto del corpo richiedono la conoscenza del calcolo integrale e quindi è oltre i limiti di questi appunti. Tuttavia anche con la matematica elementare è possibile fare un'analisi qualitativa che dà molte informazioni su quel che accade.

Detta v_0 la velocità iniziale, vi sono tre casi a seconda che sia uguale, minore o maggiore del valore v_L definito da

$$v_L = \frac{F}{\beta} . \quad (11.30)$$

Se

$$v_0 = v_L \quad \implies \quad ma = 0 \quad (11.31)$$

il corpo si muove di moto uniforme con velocità v_L ; è il caso in cui la forza di attrito equilibra la forza \mathbf{F} . Se

$$v_0 < v_L \quad \implies \quad ma > 0 \quad (11.32)$$

il moto è accelerato; la velocità quindi aumenta fino a raggiungere il valore v_L , per il quale la forza si annulla e quindi il moto prosegue uniforme con velocità v_L . Se

$$v_0 > v_L \quad \implies \quad ma < 0 \quad (11.33)$$

il moto è decelerato; la velocità diminuisce fino a raggiungere ancora il valore v_L . La velocità (11.30) è detta **velocità limite** ed è la velocità che raggiunge il corpo dopo un certo tempo indipendentemente dalle condizioni iniziali.

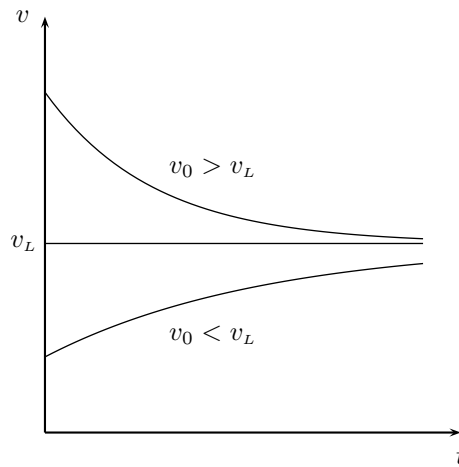


Figura 11.9: Il grafico velocità tempo.

In figura 11.9 è rappresentato il grafico velocità tempo nei tre casi esaminati.

⁵ Sir George Gabriel Stokes (1819–1903), fisico inglese.

Parte IV

TERMODINAMICA

12

TERMOMETRIA.

12.1 SISTEMA TERMODINAMICO. STATO.

Un **sistema termodinamico** è usualmente definito come *un insieme di corpi (o sostanze) ciascuno dei quali ha una composizione chimica ben determinata*. Questa definizione è troppo generica, potendosi applicare a qualunque sistema fisico. Essa sottintende, già nella definizione dell'oggetto di studio, gli scopi e le tecniche di analisi che differenziano la termodinamica da altre branche della fisica, ad esempio la meccanica newtoniana. È opportuno rendere espliciti questi sottintesi, indicando l'insieme dei fatti sperimentali cui la termodinamica, come *teoria fisica*, si riferisce.

La termodinamica amplia il quadro fenomenologico cui è applicabile la meccanica newtoniana in quanto

- i. include i 'fenomeni termici' introducendo enti teorici quali il **calore** o la **temperatura**, correlati a fatti sperimentali di comune esperienza;
- ii. prende in considerazione sistemi fisici costituiti da un gran numero di unità elementari, ad esempio una quantità di sostanza gassosa.
- iii. introduce differenziazioni basate su proprietà specifiche di queste unità elementari, ad esempio il peso molecolare o la specie chimica, e tiene conto del fatto che uno stesso elemento può presentarsi in vari stati di aggregazione.

La termodinamica stabilisce dunque un chiaro dualismo fra fenomeni *macroscopici* e *microscopici*, e si propone di descrivere soltanto i primi, lasciando alla **teoria cinetica** il compito di 'spiegare' i fenomeni macroscopici in termini di proprietà (microscopiche) delle unità elementari costituenti. Questo non avviene all'interno del quadro teorico della meccanica, in cui tutti gli oggetti di studio (per esempio le masse considerate puntiformi) sono enti privi di struttura interna. D'altra parte, la termodinamica ed a maggior ragione la teoria cinetica, utilizzano concetti fisici la cui definizione si trova già nell'ambito della meccanica: lavoro, pressione, energia.

In linea di principio, il carattere deterministico (e la pretesa esaustività che essa ha nel descrivere i fenomeni naturali) della meccanica newtoniana permetterebbe di calcolare, note posizione e velocità iniziale di ogni molecola costituente e date le forze di interazione molecolare e le forze esterne, lo stato di *ogni* sistema fisico, per quanto complesso, in ogni istante futuro. Questo approccio risulta vanificato dal fatto che i sistemi fisici macroscopici sono costituiti da un numero enorme di unità elementari (dell'ordine di 10^{23})¹: vi è dunque una ragione *oggettiva* (l'impossibilità materiale di svolgere i calcoli) che preclude la possibilità di descrivere completamente un sistema fisico macroscopico usando la meccanica newtoniana.

Per questo motivo, le **variabili dinamiche** (questa locuzione verrà sempre usata come sinonimo di **grandezze fisiche**) atte a caratterizzare un sistema fisico utilizzate in termodinamica sono differenti da quelle introdotte nell'ambito della meccanica. Queste ultime (posizione, velocità, accelerazione, ...) perdono di senso (oppure risultano inutilizzabili, il che è lo stesso) se applicate ad oggetti dotati di struttura interna complessa. Vengono dunque introdotte, similmente a quanto già fatto nello studio della dinamica dei fluidi, delle **variabili dinamiche macroscopiche**, le quali non hanno la pretesa (d'altronde utopistica) di fornire una descrizione completa nel senso che la meccanica darebbe a questa espressione. Avviene in questo caso uno spostamento semantico tipico delle rivoluzioni concettuali: il significato dell'espressione 'descrizione completa' di un

¹ La situazione è ancora più drammatica di quanto sembri; infatti si può infatti dimostrare che non è possibile scrivere, in generale la soluzione del problema dinamico di soli tre corpi mutuamente interagenti mediante interazione gravitazionale.

sistema fisico in ambito termodinamico è nettamente diverso, ed è l'unico compatibile con una definizione operativa delle grandezze fisiche in gioco.

Storicamente, lo studio dei sistemi macroscopici si è sviluppato a partire da quello dei fluidi, in particolare dei gas: le variabili dinamiche usate tradizionalmente rispecchiano questa impostazione. Esse sono, ad esempio, il **volume** V occupato da un fluido, la **temperatura** T a cui si trova, la **pressione** p che esercita sulle pareti del recipiente che lo contiene. Volume e pressione sono concetti mutuati dalla meccanica dei fluidi e la loro definizione viene data per nota; una definizione operativa di temperatura, strettamente correlata al dato sensoriale di esperienza comune, verrà data fra breve.

Quando un sistema fisico si trova, o viene preparato, in modo che le variabili dinamiche atte a descriverlo abbiano dei valori numerici ben determinati, misurabili e costanti nel tempo, allora si parla di **stato di equilibrio** di quel sistema. Le variabili utilizzate per la descrizione *completa* dello stato sono denominate **variabili di stato**. Sovente si trova che esistono delle relazioni che legano fra loro le variabili di stato (**equazione di stato**): il numero minimo di variabili la cui specificazione sia necessaria è determinabile applicando una regola empirica nota come **regola delle fasi di Gibbs**² (si veda sotto).

La definizione appena data di stato di equilibrio comporta che il sistema fisico in esame si deve trovare in

- i. equilibrio meccanico: non agiscono forze non equilibrate agenti su di esso dall'esterno oppure all'interno di esso;
- ii. equilibrio chimico: non sono in atto reazioni chimiche oppure trasferimenti di materia (soluzioni, diffusioni) fra i costituenti;
- iii. equilibrio termico: si veda il principio 'zero' della termodinamica.

12.2 PRINCIPIO 'ZERO' DELLA TERMODINAMICA.

Il principio 'zero' della termodinamica è una definizione implicita (ed operativa) delle nozioni di equilibrio termico e di temperatura:

*Due sistemi fisici posti a contatto raggiungono, se isolati dall'ambiente esterno e se viene fatto trascorrere un tempo sufficientemente lungo, la stessa **temperatura**. Si dice anche che i due sistemi fisici si trovano in **equilibrio termico**.*

Questa definizione di temperatura non costituisce un circolo vizioso: basta che uno dei due sistemi fisici sia un termometro (si veda sotto), la cui temperatura, letta sulla scala graduata, è definita in modo convenzionale (questo è un esempio del procedimento *operativo* con cui si definiscono tutte le grandezze fisiche).

Due sistemi in equilibrio con un terzo sono in equilibrio tra di loro. La nozione di equilibrio termico è dunque una relazione di equivalenza.

La possibilità di isolare di un sistema fisico dall'ambiente esterno è un argomento complesso che dovrebbe essere affrontato in una discussione dettagliata. Grossolanamente, un sistema che si trovi in uno stato di equilibrio si dice **isolato** quando permane in tale stato qualsiasi modifica si produca nell'ambiente esterno.

In particolare può creare difficoltà immaginare due sistemi privi di forma propria (masse gassose) posti a contatto. In questi casi, si allarga il concetto di 'contatto' alla possibilità di mescolarsi, oppure i due sistemi vengono posti in recipienti separati da una parete che sia un buon conduttore termico.

Stimare la lunghezza dell'intervallo di tempo necessario perché sia raggiunto l'equilibrio termico è una questione che viene lasciata completamente non analizzata dalla termodinamica. Essa viene assunta come primitiva e si postula che tale intervallo sia finito, cioè che due sistemi raggiungano in ogni caso, prima o poi, l'equilibrio termico. Questo punto di vista è giustificato dall'osservazione empirica che ciò avviene in tutti i casi rilevanti (i casi in cui non avviene non sono studiabili nell'ambito della termodinamica dell'equilibrio). Allo stesso modo, *come* stabilire

² Josiah Willard Gibbs (1839-1903), chimico-fisico statunitense.

che i due sistemi hanno raggiunto la stessa temperatura, nei limiti degli errori sperimentali, è una questione empirica che viene risolta usando dei termometri.

12.3 REGOLA DELLE FASI GIBBS.

Si definisce **fase** ognuno degli stati di aggregazione in cui può presentarsi un costituente. A temperature ordinarie la maggior parte delle specie chimiche si presenta in tre fasi: solida, liquida od aeriforme. Si consideri un sistema termodinamico in equilibrio composto da C costituenti di specie chimica definita, e sia F il numero delle fasi presenti nel sistema. Allora il numero N di variabili indipendenti necessarie per descrivere gli stati di equilibrio del sistema è dato da

$$N = C - F + 2 . \quad (12.1)$$

Un esempio particolarmente importante è quello di una specie chimica pura in fase gassosa, detto **fluido semplice**: per essa $C = F = 1$ e quindi $N = 2$. Si noti come, fra le tre variabili di stato sopra citate, pressione, volume e temperatura, solo due di esse risultino necessarie per specificare lo stato di equilibrio in cui si trovi il sistema. Risulta infatti, come si vedrà in seguito, che un'equazione lega le tre variabili, di modo che, note due di esse, la terza è ricavabile con un semplice calcolo.

La scelta di quali variabili indipendenti usare è una questione di convenienza. In ogni caso è utile rappresentare lo stato di equilibrio sopra un piano cartesiano che porti come ascisse ed ordinate i valori delle due variabili scelte. Ad esempio, se si utilizzano pressione e volume, lo stato del sistema è rappresentato da un punto nel piano pV o piano di Clapeyron³. Le altre due possibili opzioni per le variabili indipendenti danno luogo a rappresentazioni sui piani pT e VT . Ognuno di questi piani viene detto **piano delle fasi**.

12.4 MISURAZIONE DELLA TEMPERATURA.

Per misurare la temperatura è necessario trovare una proprietà di un qualche corpo che sia variabile, in modo noto, con la temperatura del corpo stesso. In questo modo, una misura di una variazione di questa proprietà, che si chiama **grandezza termometrica**, ci fornisce una misura della variazione di temperatura del corpo in questione, che si chiama **sostanza termometrica**. A tale proposito, l'esperienza insegna che il volume di un corpo varia quando la sua temperatura varia. In particolare, salvo rare eccezioni su cui si dovrà tornare più avanti, il volume di un corpo aumenta se aumenta la temperatura; si veda anche la sezione successiva. Si può quindi scegliere il volume come grandezza termometrica e usarlo nella determinazione delle variazioni di temperatura. Quanto alla scelta della sostanza termometrica è conveniente sceglierne una il cui volume vari linearmente con la temperatura, cioè tale che ad uguali aumenti della temperatura corrispondano uguali aumenti di volume. Una sostanza, fra le molte possibili, il cui volume ha un comportamento di questo tipo è il **mercurio**.

Individuata sostanza e grandezza termometriche, è ancora necessario tarare il termometro; si deve dunque stabilire una convenzione su quale temperatura chiamare temperatura nulla e su quale sia la variazione di temperatura che vale un *grado*. Per far questo si usano due temperature di riferimento che siano facilmente riproducibili in laboratorio. Esse vengono chiamate **punti fissi** e sono:

- a. La temperatura del ghiaccio in equilibrio con acqua alla pressione di una atmosfera.
- b. La temperatura del vapore d'acqua in equilibrio con acqua alla pressione di una atmosfera.

Dati questi punti fissi, tarare un termometro significa decidere che temperatura assegnare a ciascuno dei due e quindi fissare una **scala termometrica**. Questa scelta è completamente convenzionale, tanto che nel vasto mondo si usano tarature molto diverse tra loro. Qui se ne cita solamente una che è la scala comunemente usata nei termometri che ci sono familiari; si tratta

³ Benoît Paul Émile Clapeyron (1799-1864), ingegnere francese.

della **scala Celsius**⁴ o **centigrada** che assegna al punto fisso a il valore 0 e al punto fisso b il valore 100. Questo definisce implicitamente il **grado Celsius** o **centigrado**, che viene indicato con il simbolo $^{\circ}\text{C}$, come la centesima parte dell'intervallo di temperatura che separa il punto a dal punto b ⁵. La temperatura misurata mediante il grado Celsius viene designata con la lettera t . Il Sistema Internazionale adotta come unità di misura della temperatura il *kelvin*, simbolo K, che sarà introdotto nella sezione 12.7. La temperatura misurata in kelvin viene indicata con la lettera maiuscola T .

12.5 DILATAZIONE TERMICA.

Come detto sopra, è un fatto sperimentale che i corpi aumentino il proprio volume all'aumentare della temperatura. In questa sezione si vuole determinare quale legge descrive questo fenomeno. Per semplicità si comincia con lo studiare come varia, all'aumentare della temperatura, la lunghezza di un corpo unidimensionale; con ciò si intende un corpo in cui una delle dimensioni sia molto maggiore rispetto alle altre due.

Si supponga quindi che un certo corpo, per fissare le idee si pensi ad una sbarra metallica, abbia una lunghezza ℓ_0 ed una temperatura t_0 ; si supponga poi che la temperatura del corpo aumenti fino al valore t e che, corrispondentemente, la lunghezza aumenti fino al valore ℓ_t . È molto naturale (e, per variazioni di temperatura non troppo elevate, in perfetto accordo con l'esperienza) pensare che la variazione di lunghezza $\Delta\ell$ sia direttamente proporzionale alla variazione di temperatura Δt ; inoltre c'è da aspettarsi che la variazione di lunghezza sia anche proporzionale alla lunghezza iniziale. Questo può essere capito con il seguente ragionamento. Se una sbarra lunga un metro, per una certa variazione di temperatura, aumenta la sua lunghezza di un centimetro, una sbarra di due metri, per la stessa variazione di temperatura, deve aumentare la sua lunghezza di due centimetri, infatti ciascuno dei due metri della sua lunghezza aumenta di un centimetro.

Si può riassumere quanto detto con la seguente equazione per la variazione di lunghezza:

$$\Delta\ell = \ell_t - \ell_0 = \lambda \ell_0 \Delta t \quad (12.2)$$

ove λ è una costante di proporzionalità che dipende dal materiale di cui è composta la sbarra e che viene detto **coefficiente di dilatazione lineare**. Dall'analisi dimensionale della (12.2) si vede che λ ha le dimensioni dell'inverso di una temperatura, vale cioè $[\lambda] = [T]^{-1}$; quindi la sua unità di misura è $\text{per}^{\circ}\text{C}$. Il coefficiente di dilatazione lineare, per i più comuni materiali, è dell'ordine di $10^{-5} \text{ }^{\circ}\text{C}^{-1}$, è quindi molto piccolo, per i dettagli numerici si veda la tabella nell'apposita appendice dell'eserciziario. Da questa equazione si ottiene facilmente

$$\ell_t = \ell_0 [1 + \lambda(t - t_0)] . \quad (12.3)$$

L'equazione precedente assume una forma particolarmente semplice nel caso che la temperatura iniziale sia di zero gradi, cioè se $t_0 = 0^{\circ}\text{C}$:

$$\ell_t = \ell_0(1 + \lambda t) . \quad (12.4)$$

Questa semplice relazione è ben confermata dall'esperienza per valori di temperatura sufficientemente lontani dal punto di fusione del materiale.

Nel caso in cui il corpo che viene riscaldato sia tridimensionale è possibile ripetere un ragionamento perfettamente analogo a quanto visto nel caso unidimensionale. Se V_0 è il volume iniziale a temperatura t_0 , il volume finale V_t a temperatura t è dato da

$$V_t = V_0 [1 + \beta(t - t_0)] \quad (12.5)$$

⁴ Anders Celsius (1701-1744), astronomo svedese.

⁵ Nei paesi anglosassoni viene usata la scala Fahrenheit (1686-1736) che assegna al punto fisso a il valore 32 e al punto fisso b il valore 212; quindi, rispetto alla scala Celsius, la scala Fahrenheit differisce non solo per la scelta dello zero ma anche per l'ampiezza del grado; cinque gradi Celsius corrispondono infatti a nove gradi Fahrenheit.

ove la costante β , dipendente dal materiale, è detto **coefficiente di dilatazione cubica**. Anche in questo caso, se la temperatura iniziale è nulla, si ottiene

$$V_t = V_0(1 + \beta t) . \quad (12.6)$$

È possibile ricavare una semplice relazione fra i coefficienti λ e β per uno stesso materiale considerando un corpo cubico (nel caso di un parallelepipedo la dimostrazione è quasi identica e viene lasciata al lettore studioso; per un corpo di forma generica, la dimostrazione rigorosa richiede tecniche matematiche più complesse il cui utilizzo non modifica il senso fisico di quanto discusso qui). In tale semplice caso la (12.6) diviene

$$V_t = \ell_t^3 = \ell_0^3(1 + \lambda t)^3 \simeq V_0(1 + 3\lambda t) \quad \implies \quad \beta = 3\lambda , \quad (12.7)$$

ove è stata usata la (12.4) e l'approssimazione $(1 + x)^\alpha \simeq 1 + \alpha x$, valida per $|x| \ll 1$ e $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ (si veda la nota 5).

Non sarà inutile osservare che le leggi che descrivono la dilatazione termica presentate in questa sezione sono di natura completamente fenomenologica; nonostante il loro buon accordo con l'esperimento per variazioni di temperatura non troppo grandi, non si fondano su alcuna ipotesi sulla struttura della materia e, alla fine, non danno una *spiegazione* ma solo una *descrizione* della dilatazione termica.

Si noti infine che il funzionamento del termometro a mercurio descritto nella sezione precedente si basa sul fatto che il mercurio ed il vetro hanno coefficienti di dilatazione termica diversi; se così non fosse, infatti, la colonna di mercurio e il recipiente che lo contiene si ingrandirebbero della stessa quantità e non si noterebbe alcun moto relativo: il mercurio dilatato occuperebbe un recipiente dilatato.

12.6 TRASFORMAZIONI DI UN SISTEMA TERMODINAMICO.

Un sistema termodinamico subisce una **trasformazione** quando evolve da uno stato di equilibrio (stato **iniziale**) ad un altro (stato **finale**). Durante la trasformazione, i valori delle variabili di stato mutano. Nel caso in cui lo stato iniziale e finale coincidano, la trasformazione è detta **ciclica**.

Particolarmente importanti, per la semplicità dell'analisi cui si prestano, sono le trasformazioni **quasistatiche** per le quali l'evoluzione dallo stato di equilibrio iniziale a quello finale avviene attraverso una successione di stati di equilibrio e quindi molto lentamente. Una trasformazione quasistatica che possa essere percorsa anche in senso inverso viene detta **trasformazione reversibile**. Le trasformazioni reversibili sono quindi un sottoinsieme proprio delle trasformazioni quasistatiche.

Le trasformazioni quasistatiche sono *ideali*. Esse presuppongono che le variabili dinamiche del sistema varino in modo continuo. Una trasformazione quasistatica è quindi pensabile come una successione di un numero 'infinito' di trasformazioni che connettono tra di loro stati di equilibrio 'infinitamente vicini'. Ne consegue anche che queste trasformazioni siano 'infinitamente lente'. Si vedrà oltre come sia possibile approssimare ogni trasformazione quasistatica con una sequenza *finita* di trasformazioni.

Si è visto come uno stato di equilibrio di un sistema termodinamico sia rappresentabile con un punto in uno spazio delle fasi opportunamente scelto. Ne consegue che *ogni* trasformazione *quasistatica* del sistema è rappresentabile mediante una curva nello stesso spazio. Si noti che le altre trasformazioni (cioè quelle non quasistatiche) *non* sono rappresentabili nello spazio delle fasi in quanto non sono composte da una successione di stati di equilibrio. Se la trasformazione è ciclica ne risulta una curva chiusa. I punti estremi del tratto di curva rappresentante la trasformazione sono ovviamente lo stato iniziale e lo stato finale della trasformazione. Si è soliti introdurre una nomenclatura specifica per alcune trasformazioni elementari di un fluido semplice (si utilizza per le rappresentazioni grafiche il piano delle fasi pV , si veda la figura 12.1).

- i. Trasformazione a volume costante o **isocora**. Sul piano delle fasi è rappresentata da un segmento verticale.

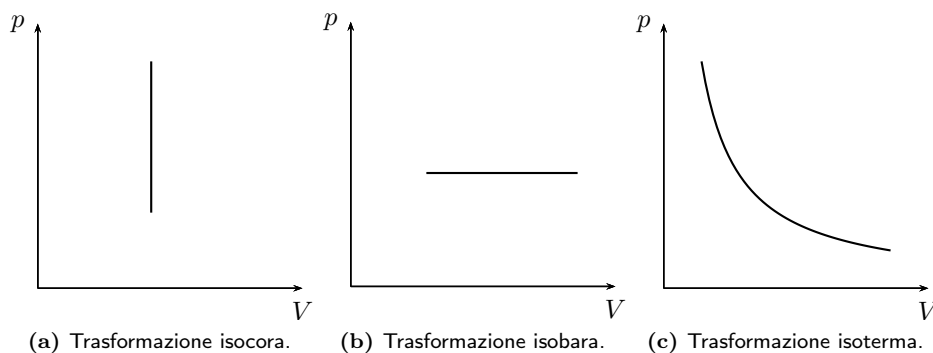


Figura 12.1: Rappresentazione sul piano delle fasi.

- ii. Trasformazione a pressione costante o **isobara**. Sul piano delle fasi è rappresentata da un segmento orizzontale.
- iii. Trasformazione a temperatura costante o **isoterma**. Sul piano delle fasi è rappresentata da un tratto di iperbole equilatera (cosa che sarà dimostrata alla fine della sezione 12.8).

Le trasformazioni termodinamiche reali non sono mai reversibili. Questo è un dato *empirico* di esperienza comune. Lo studio diretto delle trasformazioni irreversibili è particolarmente complesso ed in gran parte ancora da affrontare. Per questo motivo lo studio dei fenomeni ad esse connessi viene affrontato in prima istanza considerando la classe (ideale) delle trasformazioni reversibili. Si vedrà come sia possibile ottenere anche con quest'approccio risultati rilevanti. Alcune 'cause' di irreversibilità possono essere schematicamente classificate come segue:

- i. irreversibilità termica: passaggio spontaneo di una quantità di calore dovuto ad una differenza di temperatura. Questa è la causa studiata con maggior attenzione dalla termodinamica. Essa è incorporata nella teoria, come si vedrà, sotto il nome di secondo principio della termodinamica;
- ii. irreversibilità chimica: reazioni, soluzioni, diffusione e mescolamento di due o più gas;
- iii. irreversibilità meccanica: perdita di una quantità di calore per attrito e simili.

In linea di principio, la termodinamica dell'equilibrio potrebbe essere sviluppata in gran parte senza far cenno a trasformazioni reversibili. D'altro canto, l'astrazione in esse contenuta si rivela efficace ed utile nello sviluppare in modo conciso e perspicuo la teoria; per questo ne verrà fatto un uso più ampio del necessario.

12.7 TERMOMETRI A GAS. LEGGI DI GAY-LUSSAC E TEMPERATURA ASSOLUTA.

In questa sezione si considera un termometro che utilizzi come sostanza termometrica un gas e come scala termometrica la scala centigrada. Si distinguono due casi a seconda della grandezza termometrica utilizzata: il volume o la pressione.

Termometri a pressione costante. In questo tipo di termometro a gas la pressione viene mantenuta costante e come grandezza termometrica viene utilizzato il volume. Secondo le definizioni date nella sezione 1.4, si chiama V_0 il volume del gas al punto fisso corrispondente alla temperatura di 0°C e V_{100} il volume del gas al punto fisso corrispondente alla temperatura di 100°C . È un fatto sperimentale che la variazione della temperatura sia proporzionale alla variazione del volume, al generico volume V assunto dal gas è possibile associare la temperatura centigrada t tale che valga l'equazione

$$\frac{t}{100} = \frac{V - V_0}{V_{100} - V_0}; \quad (12.8)$$

da cui si ottiene facilmente la determinazione della temperatura per mezzo del termometro a pressione costante mediante la formula

$$t = 100 \frac{V - V_0}{V_{100} - V_0} . \quad (12.9)$$

Con qualche calcolo in piú, si ottiene anche

$$V = V_0(1 + \alpha t) , \quad (12.10)$$

ove per la costante α , cui unità di misura è $^{\circ}\text{C}^{-1}$, vale l'equazione

$$\alpha = \frac{V_{100} - V_0}{100 V_0} . \quad (12.11)$$

Termometri a volume costante. In questo tipo di termometro a gas, viceversa, il volume viene mantenuto costante e la pressione viene utilizzata come grandezza termometrica. Anche in questo caso, è un fatto sperimentale che la variazione di temperatura sia proporzionale alla variazione di pressione, quindi, analogamente a quanto fatto sopra, indicando con p_0 e p_{100} rispettivamente la pressione a 0°C e a 100°C , si giunge alla determinazione della temperatura mediante il termometro a volume costante mediante la formula

$$t = 100 \frac{p - p_0}{p_{100} - p_0} . \quad (12.12)$$

Analogamente all'equazione (12.10) si ottiene l'equazione

$$p = p_0(1 + \alpha t) , \quad (12.13)$$

ove per la costante α vale l'equazione

$$\alpha = \frac{p_{100} - p_0}{100 p_0} ^{\circ}\text{C}^{-1} . \quad (12.14)$$

Non è un caso che nelle due equazioni (12.10) e (12.13) la costante α sia indicata con lo stesso simbolo: essa è la *stessa* costante nei due casi. Il fatto cruciale risiede nella constatazione che, per temperature non troppo basse e pressioni non troppo alte, il valore di α è *indipendente dal gas utilizzato*. Questo valore è tale che valga

$$\frac{1}{\alpha} = 273.15 ^{\circ}\text{C} . \quad (12.15)$$

In questo senso le leggi sperimentali (12.10) e (12.13) sono da considerarsi universali. Esse sono note con il nome di **leggi di Gay-Lussac**⁶.

Si consideri ora l'espressione $(1 + \alpha t)$ che si trova a secondo membro nelle due formule; può essere riscritta nella forma:

$$1 + \alpha t = \alpha \left(\frac{1}{\alpha} + t \right) = \alpha(273.15 + t) . \quad (12.16)$$

Se si *definisce* una nuova scala di temperature, il cui 'zero' si trovi a -273.15°C , ponendo:

$$T \equiv \frac{1}{\alpha} + t = (273.15 + t) , \quad (12.17)$$

si ottiene la scala termometrica che utilizza la cosiddetta **temperatura assoluta**. L'unità di misura in questa scala si chiama **kelvin**⁷, simbolo K. Come anticipato sopra, il kelvin è l'unità di misura della temperatura del Sistema Internazionale. Si noti che la scala Celsius e la scala

⁶ Joseph-Louis Gay-Lussac (1778-1850) chimico e fisico francese.

⁷ In onore di William Thomson, lord Kelvin, (1824-1907) fisico matematico irlandese.

assoluta utilizzano lo stesso grado, differendo solo per la posizione dello zero.

Le leggi di Gay-Lussac, in termini della temperatura assoluta si scrivono nella semplice forma

$$V = \alpha V_0 T \quad , \quad p = \alpha p_0 T \quad . \quad (12.18)$$

12.8 LEGGE DI BOYLE. EQUAZIONE DEI GAS PERFETTI.

Altro risultato sperimentale, noto col nome di **legge di Boyle**⁸, è che se un gas compie una trasformazione isoterma, il prodotto di pressione e volume si mantiene costante

$$p_f V_f = p_i V_i \quad (12.19)$$

ove p_i e V_i sono la pressione ed il volume dello stato di equilibrio iniziale e p_f e V_f sono la pressione ed il volume dello stato di equilibrio finale. Questi fatti sperimentali ci conducono alla seguente definizione.

*Si dice **gas perfetto** o **ideale** un fluido che segue le leggi di Gay-Lussac e di Boyle per ogni valore di temperatura e di pressione.*

Questa idealizzazione si rivela molto valida. In effetti

- l'intervallo di temperature e pressioni per il quale le leggi di Gay-Lussac e di Boyle rispecchiano con precisione il comportamento di molti gas *reali* (ad esempio i gas nobili) è ampio e comprende le condizioni normali (pressione atmosferica e temperatura di 20 °C=293.15 K);
- le correzioni principali da apportare per valori di temperatura e pressione al di fuori di quest'intervallo sono giustificabili in modo elementare e di semplice espressione analitica (si veda più sotto la sezione 13.2).

Dalle leggi di Gay-Lussac e di Boyle si ricava l'**equazione di stato** di un gas perfetto

$$pV = nRT \quad . \quad (12.20)$$

Nell'equazione precedente n è il numero di moli del gas ed è una delle grandezze fondamentali del Sistema Internazionale; misura la quantità di sostanza e la sua unità di misura è il mol. R è una costante, detta **costante universale dei gas**.

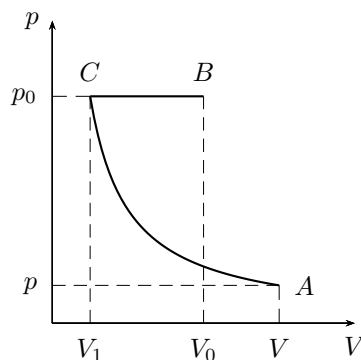


Figura 12.2: Collegamento mediante un'isoterma seguita da un'isobara.

⁸ Robert Boyle (1626-1691), fisico e chimico inglese.

Dall'analisi dimensionale della (12.20) risulta che R ha le dimensioni di energia fratto temperatura e quantità di sostanza, vale cioè $[R] = [t]^{-2}[l][m][T]^{-1}[n]^{-1}$; la sua unità di misura è quindi $\text{J K}^{-1} \text{mol}^{-1}$. Il valore di R , considerato esatto è

$$R = 8.314\,462\,618 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1} . \quad (12.21)$$

Per dimostrare la (12.20) si consideri una massa di gas perfetto che si trovi in uno stato di equilibrio A , caratterizzato dai valori p, V, T . Si consideri sullo stesso piano delle fasi pV un punto *fisso* di riferimento B , caratterizzato dai valori $p_0 = 1 \text{ atm}$, $T_0 = 273.15 \text{ K}$, V_0 , per la stessa massa di gas. È facile mostrare che è sempre possibile raggiungere lo stato in esame, a partire dallo stato di riferimento, effettuando una trasformazione composta da una isobara seguita da una isoterma (si veda la figura 12.2).

Siano p_1, T_1, V_1 i valori assunti dalle variabili nello stato di equilibrio C raggiunto al termine della trasformazione isobara. Le leggi di Gay-Lussac applicate a questa isobara ci dicono che

$$V_1 = \alpha V_0 T \quad \text{e} \quad p_1 = p_0 . \quad (12.22)$$

La legge di Boyle applicata alla isoterma stabilisce che

$$pV = p_1 V_1 . \quad (12.23)$$

Combinando queste due equazioni si ottiene

$$pV = p_1 V_1 = p_0 V_1 = p_0 V_0 \alpha T . \quad (12.24)$$

Dato che lo stato di riferimento è fissato una volta per tutte, la quantità $p_0 V_0 \alpha$ che compare nell'ultima equazione assume un valore fisso, per la particolare massa di gas in esame. Occorre ora richiamare la **legge di Avogadro**⁹.

Ogni mole di qualunque gas, alla temperatura di 0 °C e alla pressione atmosferica occupa il volume di 22.41 litri.

Quindi $p_0 V_0 \alpha$ è proporzionale al numero di moli n del sistema; chiamando R la costante di proporzionalità si ottiene

$$p_0 V_0 \alpha = Rn . \quad (12.25)$$

Questa equazione, posto $V_0 = 22.41 \times 10^{-3} \text{ m}^3$ e $n = 1 \text{ mol}$, fornisce una determinazione teorica del valore di R . La (12.25), sostituita nella (12.24), fornisce immediatamente l'equazione (12.20). Un *gas perfetto* non può raggiungere la temperatura di 0 K: in questo limite volume e pressione si ridurrebbero, secondo le leggi di Gay-Lussac, a valori nulli e quindi privi di senso. A maggior ragione non sono raggiungibili temperature $T < 0 \text{ K}$. Si noti comunque che temperature così basse sono di gran lunga fuori dal limite di validità sperimentale delle leggi di Gay-Lussac che quindi *non* sono estrapolabili sino a zero kelvin. Nonostante ciò, il fatto che $T = 0 \text{ K}$ sia per la temperatura un valore limite inattuabile risulta sperimentalmente stabilito con grande precisione.

Le leggi di Boyle e Gay-Lussac utilizzano nella stessa equazione variabili dinamiche correlate a stati di equilibrio *differenti*, mentre nella (12.20) compaiono soltanto variabili relative ad *un solo* stato del sistema (questo è, per inciso, il motivo per cui la (12.20) si chiama equazione di *stato*). Se il sistema esegue una trasformazione quasistatica, l'equazione (12.20) continua a valere per *ognuno* degli stati di equilibrio per cui passa il sistema, con lo *stesso* valore di n . I valori di p, V, T possono variare, ma sempre in modo tale che in ogni punto della trasformazione valga fra di essi la relazione $pV = nRT$. Si supponga che un gas perfetto compia una trasformazione isoterma a temperatura T_0 . Dato che durante la trasformazione, il membro di destra dell'equazione di stato si mantiene costantemente uguale a nRT_0 , i valori di p e V variano in modo tale che sia

$$pV = nRT_0 = \text{costante} . \quad (12.26)$$

Sul piano pV questa è l'equazione di un'iperbole equilatera (di cui, ovviamente, si prende solo il ramo situato nel primo quadrante): una trasformazione isoterma è quindi rappresentata sul piano delle fasi da un tratto di iperbole equilatera. Si lascia al lettore studioso la verifica che maggiore è la temperatura maggiore è la distanza del ramo di iperbole dall'origine e che per ogni punto sul piano delle fasi passa una ed una sola isoterma.

⁹ Amedeo Avogadro (1776-1856), giurista e fisico matematico italiano.

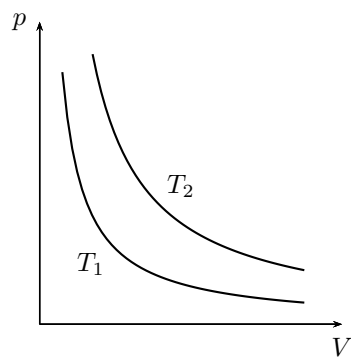


Figura 12.3: Due isoterme con $T_2 > T_1$.

13

MODELLO MOLECOLARE DEI GAS.

La **teoria cinetica dei gas** si propone l'obiettivo di interpretare le variabili dinamiche usate in ambito termodinamico in termini di variabili introdotte in meccanica newtoniana. A questo scopo essa propone un **modello molecolare** dei gas introducendo alcune assunzioni semplificative sulla natura delle molecole componenti il gas e delle interazioni fra di esse.

- A. *Natura delle molecole.* Una massa gassosa in condizioni normali contiene un numero enorme di unità elementari (molecole), che sono distribuite *uniformemente* all'interno del volume del gas. Le molecole sono rappresentate come sfere rigide indistinguibili di massa m ed il volume occupato da esse è trascurabile rispetto al volume del gas. A tutti gli effetti le molecole possono quindi essere considerate puntiformi.
- B. *Natura delle interazioni fra molecole.* Le molecole interagiscono solo mediante urti elastici. Le forze intermolecolari sono trascurabili: ne consegue che nell'intervallo tra due urti il moto delle molecole rettilineo ed uniforme. Anche gli urti con le pareti del recipiente contenente il gas sono elastici.
- C. *Principio del caos molecolare.* Tutte le direzioni del moto sono ugualmente probabili e *ogni* possibile moto è effettivamente realizzato.

13.1 ANALISI DEL MODELLO: RELAZIONE DI JOULE-CLAUSIUS.

L'assunzione C e l'ipotesi di uniformità della distribuzione delle molecole del gas formalizzano la richiesta che il gas si trovi in uno stato di equilibrio. Queste assunzioni hanno le seguenti conseguenze.

1. L'energia totale \mathcal{U} posseduta dal gas (**energia interna**) è data dalla somma delle energie cinetiche delle singole molecole

$$\mathcal{U} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m v_i^2 = \frac{1}{2} m \sum_{i=1}^N v_i^2, \quad (13.1)$$

dove N è il numero totale delle molecole e v_i è l'intensità del vettore velocità della i -esima molecola. A rigore, questa formula è valida solo per i gas **monoatomici**, la cui molecola sia cioè composta da un solo atomo. Nel caso di gas poliatomici l'espressione per l'energia cinetica di ogni singola molecola non ha questa forma semplice (si veda sotto il *principio di equipartizione dell'energia*).

2. Come conseguenza dell'assunzione B è possibile capire, almeno qualitativamente, perché il coefficiente di dilatazione cubica è lo stesso per tutti i gas perfetti, mentre nel caso dei solidi e dei liquidi varia a seconda della sostanza. Una sostanza solida o liquida aumenta di volume all'aumentare della temperatura e quindi allorché le venga fornita energia; tale energia si ritrova come energia cinetica di vibrazione delle molecole della sostanza attorno alle posizioni di equilibrio nel reticolo cristallino per i solidi e di traslazione nel caso dei liquidi. Tale accentuata mobilità appare macroscopicamente come un aumento di volume. Naturalmente la maggiore mobilità delle molecole dipende anche dall'intensità dei legami intermolecolari i quali, evidentemente, variano da sostanza a sostanza. Pertanto la dilatazione (e quindi il coefficiente di dilatazione cubica) dipende, oltre che dall'aumento di temperatura, anche dalle forze di coesione e quindi varia al variare della sostanza in esame. Nel caso dei gas perfetti, invece, non c'è interazione intermolecolare e quindi la dilatazione dipende solo dall'aumento di temperatura, quindi tutti i gas hanno lo stesso coefficiente di dilatazione. Si può concludere che α ha lo stesso valore per tutti i gas perfetti perché sono assenti le forze intermolecolari.

3. Un gas perfetto, costituito da N molecole di massa m , contenuto in un recipiente di volume V esercita sulle pareti del recipiente una pressione p data da

$$p = \frac{m}{3V} \sum_{i=1}^N v_i^2 \quad (13.2)$$

ove v_i è il modulo della velocità della i -esima molecola del gas in questione. La (13.2) è detta **relazione di Joule-Clausius**¹

È importante notare che l'equazione (13.2) realizza il programma di esprimere le variabili *macroscopiche* pressione e volume (membro di sinistra) in termini di grandezze fisiche *microscopiche* quali la massa ed il modulo della velocità delle molecole costituenti il gas (membro di destra). Dalle equazioni (13.1) e (13.2) segue che

$$\mathcal{U} = \frac{1}{2} m \sum_{i=1}^N v_i^2 = \frac{3}{2} \frac{m}{3} \sum_{i=1}^N v_i^2 = \frac{3}{2} pV . \quad (13.3)$$

Si supponga ora che il nostro modello molecolare sia utilizzato per descrivere un gas perfetto. È possibile allora usare l'equazione di stato $pV = nRT$ e combinarla con l'equazione appena ottenuta. Ne segue

$$\mathcal{U} = \frac{3}{2} nRT . \quad (13.4)$$

La formula, molto importante, appena ricavata è, per un intervallo sufficientemente ampio di temperature, in buon accordo con i dati sperimentali. Essa ha la stessa forma per *tutti* i gas ideali monoatomici, indipendentemente dalla specie chimica.

Il fatto che per l'energia interna sia utilizzato lo stesso simbolo, \mathcal{U} , utilizzato per l'energia potenziale di un sistema meccanico, non è casuale; la ragione sarà chiara nella sezione 15.1.

Ricordando che il numero di particelle in una mole è uguale al numero di Avogadro

$$N_A = 6.022\,140\,76 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1} \quad (13.5)$$

il numero totale N delle particelle può essere scritto nella forma $N = nN_A$ e quindi, dalla (13.4), si ha

$$\mathcal{U} = \frac{3}{2} \frac{N}{N_A} RT \quad (13.6)$$

Il rapporto fra la costante universale dei gas e il numero di Avogadro è detto *costante di Boltzmann*² k_B :

$$k_B = \frac{R}{N_A} = 1.380\,649 \times 10^{-23} \text{ J K}^{-1} , \quad (13.7)$$

è quindi possibile riscrivere l'equazione (13.4), che esprime l'energia interna di un gas monoatomico, nella forma

$$\mathcal{U} = \frac{3}{2} N k_B T , \quad (13.8)$$

da cui si può scrivere l'energia (cinetica) media di ciascuna particella del gas nella forma $u = \mathcal{U}/N$ con

$$u = \frac{3}{2} k_B T . \quad (13.9)$$

¹ Rudolf Julius Emanuel Clausius (1822-1888), fisico matematico tedesco.

² Ludwig Boltzmann (1844-1906), fisico matematico austriaco.

Dalle equazioni (13.2), (13.3) e (13.4) si ricava

$$T = \frac{m}{3nR} \sum_{i=1}^N v_i^2 . \quad (13.10)$$

La (13.10) può essere riscritta nel modo seguente

$$T = \frac{mN}{3nR} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N v_i^2 = \frac{mN_A}{3R} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N v_i^2 , \quad (13.11)$$

Nella precedente equazione compare la media dei quadrati delle velocità delle molecole

$$\boxed{v_{qm}^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N v_i^2 .} \quad (13.12)$$

ed è detta **velocità quadratica media** dell'insieme di molecole in esame; inserendo questa definizione nella precedente equazione scritta si ricava

$$T = \frac{mN_A}{3R} v_{qm}^2 = \frac{M}{3R} v_{qm}^2 . \quad (13.13)$$

dove M è la massa molare del gas.

È importante notare che le velocità v_i delle singole molecole non sono né osservabili né misurabili sperimentalmente. Lo status di queste variabili dinamiche è quello di *entità teoriche* funzionali allo sviluppo dei calcoli all'interno del modello. Esse figurano, prese singolarmente, nei calcoli intermedi ma non nelle equazioni *finali*, suscettibili di controllo sperimentale. In effetti, esse compaiono in *ogni* formula scritta soltanto a formare la grandezza *macroscopica* v_{qm} .

È da notare che v_{qm} dipende solo dalla temperatura T del gas e non da altri parametri macroscopici come pressione o volume. In effetti, dalla formula precedente si ottiene

$$\boxed{v_{qm} = \sqrt{\frac{3RT}{M}} .} \quad (13.14)$$

Ad esempio, nel caso dell'elio ($M = 4.002\,602 \times 10^{-3} \text{ kg mol}^{-1}$) ad una temperatura $T = 300 \text{ K}$, si ottiene

$$v_{qm} \simeq 1367 \text{ m s}^{-1} . \quad (13.15)$$

Questa relazione fra la temperatura e la velocità delle molecole viene detta **interpretazione cinetica della temperatura**; la temperatura è quindi un parametro adeguato per misurare il grado di agitazione molecolare.

Il quadrato della velocità quadratica media è definito come la media dei quadrati delle velocità molecolari. Trattandosi di una media, ci si potrebbe chiedere perché non utilizzare la definizione più usuale di media, cioè

$$v_{qm} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N v_i . \quad (13.16)$$

Questa non sarebbe una definizione utile poiché, come conseguenza dell'assunzione C, risulta che una tale media è nulla. Si pensi ad esempio all'aria contenuta in una stanza; essa è percepita come ferma poiché, nonostante le velocità delle singole molecole siano diverse da zero esse, in media, sono ferme; cioè la somma dei vettori velocità è nulla.

DIMOSTRAZIONE DELLA RELAZIONE DI JOULE-CLAUSIUS.

Si consideri una massa di gas racchiusa in un recipiente cubico, il cui spigolo abbia lunghezza l . Si denoti con S l'area della superficie di ogni faccia e con V il volume del cubo. Si supponga che il gas sia composto da molecole che verificano le assunzioni A, B, C sopra enunciate. Si vuole

calcolare la pressione che il gas esercita sulle pareti del recipiente. Essa è dovuta alla forza che le molecole esercitano in virtù degli urti (assunzione B). Si consideri una singola molecola nel momento dell'urto con la parete, supponendo per semplicità che la parete sia perpendicolare all'asse x . Dato che le molecole sono puntiformi e gli urti con la parete sono elastici (assunzioni A e B), ad ogni urto viene trasferito un impulso (variazione della quantità di moto) $2mv_x$ alla parete.

Il numero di urti, nell'intervallo di tempo Δt , di ciascuna molecola contro la parete è uguale a $v_x \Delta t / 2l$ e quindi l'impulso trasferito, nel intervallo di tempo Δt , da ogni molecola alla parete è dato da

$$2mv_x \frac{v_x \Delta t}{2l} = \frac{mv_x^2 \Delta t}{l} . \quad (13.17)$$

L'impulso totale trasferito dal moto molecolare alla parete si ottiene sommando i contributi di

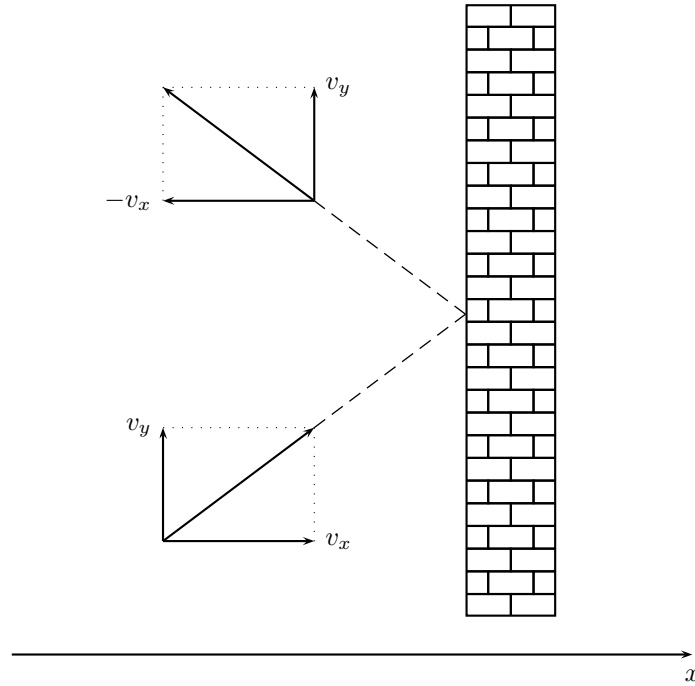


Figura 13.1: Urto di una molecola contro una parete.

ogni singola molecola:

$$I = \sum_{i=1}^N \frac{mv_{ix}^2 \Delta t}{l} . \quad (13.18)$$

Il suo valore diviso per il tempo Δt , è per definizione uguale al modulo della forza F_x esercitata dal gas su una parete ortogonale all'asse x :

$$F_x = \frac{I}{\Delta t} = \sum_{i=1}^N \frac{mv_{ix}^2 \Delta t}{l \Delta t} = \sum_{i=1}^N \frac{mv_{ix}^2}{l} = \frac{m}{l} \sum_{i=1}^N v_{ix}^2 . \quad (13.19)$$

Data la definizione di pressione $p = F/S$ ed il fatto che per la scatola cubica in questione si ha $V = lS$, si determina la pressione p_x esercitata dal gas su una parete ortogonale all'asse x ,

$$p_x = \frac{F_x}{S} = \frac{m}{Sl} \sum_{i=1}^N v_{ix}^2 = \frac{m}{V} \sum_{i=1}^N v_{ix}^2 . \quad (13.20)$$

In definitiva si ottiene che

$$p_x V = m \sum_{i=1}^N v_{ix}^2 . \quad (13.21)$$

Ora, per l'assunzione C, le somme delle componenti x, y, z dei quadrati delle velocità sono fra loro uguali; vale cioè:

$$\sum_{i=1}^N v_{ix}^2 = \sum_{i=1}^N v_{iy}^2 = \sum_{i=1}^N v_{iz}^2 . \quad (13.22)$$

Ricordando che il modulo della velocità si ottiene in termini delle sue componenti secondo la formula $v_i^2 = v_{ix}^2 + v_{iy}^2 + v_{iz}^2$, si ricava facilmente che

$$\frac{1}{3} \sum_{i=1}^N v_i^2 = \sum_{i=1}^N v_{ix}^2 = \sum_{i=1}^N v_{iy}^2 = \sum_{i=1}^N v_{iz}^2 . \quad (13.23)$$

D'altra parte se si fosse condotta la dimostrazione utilizzando una parete perpendicolare all'asse y oppure z , si sarebbero ricavate le analoghe formule

$$p_y V = m \sum_{i=1}^N v_{iy}^2 , \quad p_z V = m \sum_{i=1}^N v_{iz}^2 . \quad (13.24)$$

Usando l'equazione (13.22) si vede subito che ne risulta $p_x = p_y = p_z \equiv p$ in accordo con la (10.14).

Confrontando le equazioni (13.21) e (13.23) si ottiene

$$pV = \frac{m}{3} \sum_{i=1}^N v_i^2 , \quad (13.25)$$

che è la relazione di Joule-Clausius.

13.2 EQUAZIONE DI VAN DER WAALS.

L'equazione di van der Waals³ costituisce una modifica all'equazione di stato dei gas perfetti $pV = nRT$ tale da renderla più idonea a descrivere il comportamento di un gas reale. La logica che conduce a scrivere questa equazione è la seguente. Assumendo come valide le assunzioni alla base del modello molecolare di un gas si determina come loro conseguenza l'equazione $pV = nRT$. Opportune modifiche nelle assunzioni comportano modifiche corrispondenti nell'equazione di stato.

Le modifiche si ottengono considerando non trascurabili

- a) il volume occupato dalle molecole (assunzione A);
- b) le forze intermolecolari (assunzione B).

Si vedano in dettaglio.

a) Si supponga che ogni molecola occupi un volume finito, per quanto piccolo. La totalità delle molecole contenute in una mole di gas occupa pertanto un volume finito, che viene di solito indicato con b . Il valore della costante b dipende dalle 'dimensioni' delle molecole e quindi dal gas. Se ho a disposizione n moli di gas ne risulta un volume nb . Questa porzione di volume del gas non può essere utilizzata dalle molecole per i loro movimenti. Il volume effettivamente disponibile è non più V , ma $V - nb$. La prima modifica all'equazione di stato si ottiene dunque sostituendo V con $V - nb$:

$$p(V - nb) = nRT . \quad (13.26)$$

b) La presenza di forze intermolecolari altera il valore della *pressione* presente nell'equazione di stato. In effetti, scrivendo l'equazione (13.26) appena ricavata nella forma

$$p = \frac{nRT}{V - nb} . \quad (13.27)$$

Questo valore della pressione è quello che si misurerebbe se le forze intermolecolari fossero trascurabili; in caso contrario si ragiona come segue.

³ Johannes Diderik van der Waals (1837-1923), fisico olandese.

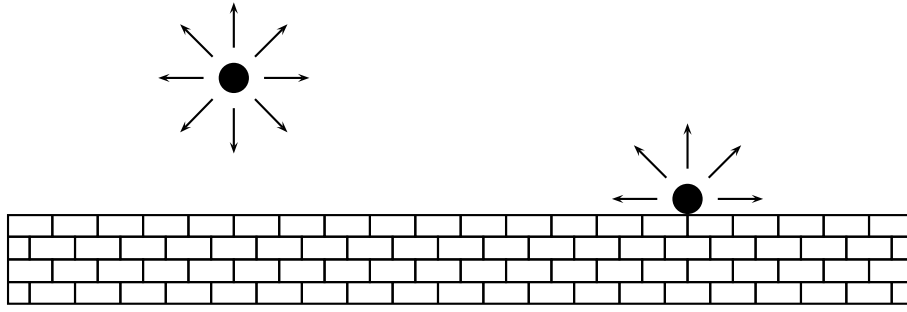


Figura 13.2: Forze intermolecolari in prossimità di una parete ed all'interno.

Le forze intermolecolari non hanno effetto su una molecola *all'interno* del volume di gas: esse si annullano reciprocamente (è una conseguenza dell'assunzione A: le molecole sono distribuite uniformemente).

Se una molecola si trova invece in prossimità di una parete, essa risente di forze (non equilibrate) che la attraggono verso l'interno (si veda la figura 13.2). Ne risulta che la pressione *misurata* è minore di quella [data dall'equazione (13.26)] che si misurerebbe in assenza di forze. L'espressione analitica di questa riduzione si calcola considerando che

- i. ogni singola molecola nei pressi della parete risente di una forza proporzionale al numero di molecole che si trovano nelle vicinanze; questo numero è proporzionale alla concentrazione del gas n/V ;
- ii. per ottenere la pressione sulla parete è necessario considerare i contributi dovuti a *tutte* le molecole vicine alla parete; il loro numero è ancora proporzionale alla concentrazione n/V .

In definitiva, la riduzione della pressione è proporzionale a n^2/V^2 . Se si indica a la costante di proporzionalità che dipende dall'intensità delle forze intermolecolari e quindi dal gas, risulta

$$p = \frac{nRT}{V - nb} - a \frac{n^2}{V^2} . \quad (13.28)$$

Solitamente l'**equazione di van der Waals** si scrive nella forma:

$$\left(p + \frac{an^2}{V^2} \right) (V - nb) = nRT . \quad (13.29)$$

13.3 GRADI DI LIBERTÀ.

Si dice **grado di libertà** di un sistema fisico ognuna delle coordinate indipendenti necessarie per specificarne completamente posizione ed orientazione nello spazio. Il numero di gradi di libertà di un sistema fisico si indica con la lettera greca ν ; si tratta, evidentemente, di una grandezza adimensionale.

Esempi:

- a) Corpo puntiforme vincolato a muoversi su di una retta: $\nu = 1$.
Infatti scelta un'origine, la distanza da essa costituisce l'unica coordinata necessaria. Lo stesso risultato vale nel caso la linea sia curva.
- b) Corpo puntiforme vincolato a muoversi sulla superficie di una sfera: $\nu = 2$.
Infatti scelto convenzionalmente un 'polo', si possono usare latitudine e longitudine; questo è esattamente il procedimento che si utilizza per identificare un punto sulla superficie terrestre.

- c) Corpo puntiforme libero nello spazio: $\nu = 3$.
 Ad esempio le tre coordinate cartesiane. Per l'assunzione A della teoria cinetica, $\nu = 3$ è anche il numero di gradi di libertà di ogni molecola di un gas perfetto *monoatomico*.
- d) Molecola biatomica nello spazio, schematizzabile come una coppia di molecole puntiformi collegate rigidamente: $\nu = 5$.
 Infatti, per specificarne completamente posizione ed orientazione si procede come segue: si fissa la posizione di una delle due molecole; per far questo occorrono tre coordinate e quindi tre gradi di libertà (si veda sopra). L'altra molecola è vincolata a muoversi sulla superficie sferica avente come centro la prima essendo collegata rigidamente ad essa; la sua posizione è univocamente determinata da due coordinate (si veda sopra). Ne risulta che occorrono 5 coordinate.
- e) Molecola poliatomica: $\nu = 6$.
 Il lettore studioso cerchi di capire perché.

13.4 PRINCIPIO DI EQUIPARTIZIONE DELL'ENERGIA.

L'esperienza mostra che l'equazione (13.4) è in buon accordo con i dati sperimentali solo per i gas monoatomici. Questa espressione per l'energia interna si ricava dal modello molecolare, che schematizza le molecole come sfere rigide. Tale schematizzazione è inadeguata per i gas poliatomici (ad esempio CO_2). Una regola (la cui dimostrazione, non elementare, è possibile all'interno del formalismo della teoria cinetica) per ricavare un'espressione per l'energia interna di un gas ideale poliatomico è il seguente **principio di equipartizione dell'energia**.

L'energia interna di una mole di gas perfetto si ottiene attribuendo ad ogni grado di libertà un'energia $RT/2$.

Si noti: l'ipotesi che l'energia attribuibile sia la stessa per ogni grado di libertà deriva dall'assunzione A della teoria cinetica. Quindi, per n moli di gas vale:

$$\mathcal{U} = \begin{cases} \frac{3}{2} nRT & \text{gas monoatomico: } \nu = 3, \\ \frac{5}{2} nRT & \text{gas biatomico: } \nu = 5, \\ 3nRT & \text{gas poliatomico: } \nu = 6. \end{cases} \quad (13.30)$$

Questi valori sono, per temperature non troppo alte, in buon accordo con i dati sperimentali.

INTERMEZZO. SUL CONCETTO DI MODELLO.

Per chiarire quanto detto sopra circa la differenza fra entità teoriche di un modello e grandezze osservabili, è opportuna qualche riflessione sull'uso (e quindi sul significato) dei modelli in ambito fisico. Un modello intende dare una 'spiegazione' di una serie di fenomeni (dati sperimentali) deducendoli come conseguenze di una teoria fisica affermata. La struttura di un modello è dunque data dai punti seguenti.

- i. Una serie di ipotesi. Le ipotesi devono avere un significato ben determinato ed univoco all'interno di una teoria fisica nota (ciò che Kuhn⁴ chiama *paradigma*, si veda [15]). Nel caso presente, le ipotesi sono le assunzioni A, B, C e il paradigma cui fanno riferimento è la meccanica newtoniana. Ognuna delle affermazioni fatte nelle ipotesi deve quindi essere traducibile nel linguaggio matematico tipico del paradigma di riferimento. Ad esempio, l'affermazione che le molecole siano distribuite uniformemente viene formalizzata introducendo il concetto matematico di densità; l'interagire delle molecole solo tramite urti

⁴ Thomas Samuel Kuhn (1922-1996), filosofo della scienza statunitense.

elastici si traduce nell'utilizzo dei concetti (matematici) di quantità di moto e di energia cinetica e nel postulare i relativi principi di conservazione. Le ipotesi, però, seppur dotate di contenuto fisico, *non* sono espressione esatta di una realtà fisica sottostante, ma ne costituiscono una immagine drasticamente semplificata (le molecole sono assimilate a sferette rigide). Questa scelta radicalmente semplificativa può essere causata da ragioni oggettive (mancanza di un modello dettagliato della struttura molecolare) oppure di convenienza (semplificazione dei calcoli). Ne risulta in ogni caso il carattere prettamente matematico delle ipotesi alla base di un modello fisico: esse sono ipotesi nel senso etimologico di fondamenti sulla cui base sviluppare il formalismo matematico necessario. Questo fatto comporta l'introduzione di variabili dinamiche (ad esempio le velocità v_i delle singole molecole) funzionali allo sviluppo dei calcoli *all'interno del modello*, cioè di enti teorici privi di contenuto fisico effettivo: su di essi non è possibile esercitare un controllo sperimentale.

- ii. Un apparato matematico con cui manipolare le variabili dinamiche messe in gioco dalle ipotesi. Le manipolazioni servono ad istituire delle relazioni matematiche (sotto forma di equazioni o formule) tra variabili dinamiche misurabili da sottoporre al vaglio della verifica sperimentale. Il giudizio sulla bontà di un modello fisico, cioè delle sue ipotesi, si esprime dunque al livello del *controllo sperimentale delle conseguenze dedotte dalle ipotesi*, oltre che dalla coerenza interna della struttura matematica.

Da quanto detto emergono due conseguenze fondamentali:

- a) Se due modelli in conflitto sono nel medesimo accordo con gli stessi risultati sperimentali, ma “*se uno lo lasciamo sussistere e l'altro che ugualmente si accorda con il fenomeno lo rigettiamo, allora è chiaro che scadiamo da ogni ricerca naturalistica e piombiamo nel mito*” [Epicuro⁵, *Lettera a Pitocle* in [16], X, 87], introducendo dei pregiudizi di natura metafisica estranei al campo di ricerca.
- b) Si può parlare di bontà di un modello, ma non ha senso dire che sia *vero*: esso può essere *falsificato* se predice fatti non conformi alla realtà sperimentale, ma il suo accordo con essa non lo rende *vero*. Nel nostro caso, per esempio, il modello molecolare dei gas ha permesso di dedurre l'importante formula (13.4) per l'energia interna di un gas perfetto monoatomico, relazione in buon accordo con i dati sperimentali e di cui il paradigma della termodinamica macroscopica era incapace di rendere conto teoricamente.

⁵ Epicuro (341-270 a.C.), filosofo di Samo.

14

CALORE E LAVORO.

Si è visto nel principio zero della termodinamica che due gas, che si trovino inizialmente a temperature diverse, se posti a contatto raggiungono, dopo un tempo sufficientemente lungo, l'equilibrio termico e quindi la stessa temperatura. Ora dal modello molecolare dei gas si trova che la temperatura è una misura dell'energia di un gas; si deve quindi riconoscere che nel processo alla fine del quale i due gas hanno raggiunto la stessa temperatura avviene uno scambio di energia fra i gas. A tale energia scambiata viene convenzionalmente dato il nome di **calore**.

14.1 CAPACITÀ TERMICA.

Si esaminino ora alcuni fatti sperimentali. Si supponga di disporre di due corpi della *stessa sostanza* aventi masse diverse m_1 ed m_2 e temperature t_1 e t_2 con $t_1 < t_2$. Per il principio 'zero' della termodinamica, i due corpi, se messi a contatto e isolati dall'ambiente esterno, raggiungono, dopo un certo tempo, la stessa temperatura di equilibrio t . L'esperienza mostra che il valore di t è compreso fra t_1 e t_2 ed è tale che valga la relazione

$$m_1(t - t_1) = m_2(t_2 - t) . \quad (14.1)$$

Si supponga ora di mettere a contatto due corpi di *sostanze diverse* aventi masse m_1 ed m_2 e temperature t_1 e t_2 con $t_1 < t_2$; per il principio 'zero' della termodinamica i due corpi, se isolati dall'ambiente esterno, raggiungono ancora la stessa temperatura. In questo caso però l'equazione (14.1) non è più valida, ma deve essere sostituita dalla:

$$m_1 c_1 (t - t_1) = m_2 c_2 (t_2 - t) . \quad (14.2)$$

Questa equazione è la definizione di **calore specifico**, cioè: se due corpi all'equilibrio hanno entrambi la temperatura t che verifica l'equazione (14.2), i due corpi hanno rispettivamente calore specifico c_1 e c_2 . Data la (14.2) rimane definito, per confronto, il calore specifico di qualunque sostanza una volta che sia stata scelta arbitrariamente una sostanza di riferimento cui assegnare il calore specifico unitario. Come sostanza di riferimento viene scelta l'acqua alla pressione di una atmosfera e alla temperatura di 14.5°C . In questo modo il calore specifico di ogni altro corpo è determinato dall'equazione (14.2) ponendo il corpo in questione a contatto con l'acqua e misurando le masse e variazioni di temperatura.

Si osservi che il calore specifico di una sostanza è indipendente dalla massa. Il prodotto del calore specifico di un corpo per la sua massa viene detto **capacità termica** e viene indicata con il simbolo C ; vale quindi:

$$C = mc . \quad (14.3)$$

Con riferimento all'equazione (14.2), si *definiscono* **quantità di calore assorbita** dal corpo a temperatura minore t_1 e **quantità di calore ceduta** dal corpo a temperatura maggiore t_2 rispettivamente le espressioni

$$Q_1 = m_1 c_1 (t - t_1) \quad \text{e} \quad Q_2 = m_2 c_2 (t_2 - t) . \quad (14.4)$$

Si osservi che, dato che $t_1 < t < t_2$, risulta $Q_1 > 0$ e $Q_2 < 0$; questa convenzione verrà adottata anche nel seguito: si considera *positiva* la quantità di calore *assorbita* dal sistema e *negativa* la quantità di calore *ceduta* dal sistema. Così il corpo di massa m_1 assorbe la quantità di calore Q_1 , che quindi è positiva, mentre il corpo di massa m_2 cede la quantità di calore Q_2 , che quindi è negativa.

Con queste definizioni si può riscrivere l'equazione (14.2) nella forma

$$Q_1 + Q_2 = 0 , \quad (14.5)$$

si può quindi affermare che

se due corpi raggiungono l'equilibrio termico la somma algebrica delle quantità di calore scambiate è nulla.

L'unità di misura per la quantità di calore è definita nel modo seguente. Si dice **chilocaloria**, simbolo kcal, la quantità di calore necessaria per aumentare da 14.5 °C a 15.5 °C la temperatura di 1 kg di acqua alla pressione di una atmosfera.

Data l'unità di misura per la quantità di calore, rimangono definite le unità di misura per il calore specifico e per la capacità termica. Le dimensioni del calore specifico sono $[c] = [t]^{-2}[l][T]^{-1}$ e quelle della capacità termica sono $[C] = [t]^{-2}[l][m][T]^{-1}$; le rispettive unità di misura sono rispettivamente kcal kg⁻¹ °C⁻¹ e kcal °C⁻¹.

Il calore, come osservato sopra, è una forma di energia e come tale può essere misurato in joule; si rimanda alla sezione 15.1 la discussione della relazione fra kcal e J.

14.2 CAMBIAMENTI DI STATO: CALORI LATENTI.

Esistono delle situazioni particolari in natura in cui è possibile cedere o sottrarre una quantità di calore ad un corpo senza che esso vari la temperatura. Questo si verifica quando la sostanza che scambia la quantità di calore ha un **cambiamento di stato**. Una sostanza allo stato liquido può, sotto opportune condizioni di temperatura e di pressione, passare allo stato solido o allo stato aeriforme. Si dice **vaporizzazione** il cambiamento dallo stato liquido allo stato aeriforme, **solidificazione** il cambiamento dallo stato liquido allo stato solido. Si dicono, inoltre **liquefazione** o **condensazione** e **fusione** i cambiamenti di stato opposti (cioè da aeriforme a liquido e da solido a liquido).

In casi particolari una sostanza solida può passare direttamente allo stato aeriforme o viceversa senza passare attraverso lo stato liquido intermedio: tale cambiamento di stato, presente in ogni sostanza ma molto evidente in alcune sostanze come lo iodio, la canfora e la naftalina è detto **sublimazione**. Come è già stato detto, è un fatto sperimentale che

durante un cambiamento di stato la temperatura si mantiene costante.

Quindi, per ogni sostanza, si ha una *temperatura di vaporizzazione* t_e (uguale alla temperatura di liquefazione) e una *temperatura di fusione* t_f (uguale alla temperatura di solidificazione). queste temperature non sono costanti, ma dipendono, come si vedrà, dalla pressione. Il fatto che la temperatura di fusione del ghiaccio e la temperatura di vaporizzazione dell'acqua siano costanti, e facilmente riproducibili, giustifica la scelta fatta nella sezione 12.4 dei due punti fissi per la taratura del termometro a mercurio.

Sperimentalmente si verifica che la quantità di calore ceduta o assorbita dal corpo durante il cambiamento di stato è proporzionale alla massa del corpo in questione, vale cioè la relazione:

$$Q = m\lambda , \quad (14.6)$$

λ è detto **calore latente** del cambiamento di stato considerato.

Dall'analisi dimensionale della (14.6) si trova che il calore latente ha le dimensioni energia fratto massa, cioè $[\lambda] = [t]^{-1}[l]$; la sua unità di misura è, quindi, J kg⁻¹.

Il calore latente di fusione non viene utilizzato per innalzare la temperatura ma per rompere i forti legami che tengono insieme le molecole di una sostanza in fase solida. Questo è il motivo per cui la temperatura rimane costante. Viceversa, il processo di formazione dei legami molecolari è un processo esotermico, pertanto, quando una sostanza in fase liquida solidifica, cede una quantità di calore uguale a quella assorbita nel processo di fusione.

14.3 MISURA DEI CALORI SPECIFICI.

Per la misurazione del calore specifico di un corpo si usa uno strumento detto **calorimetro**. Un calorimetro dal semplice funzionamento è quello detto **delle mescolanze** o **di Regnault**¹.

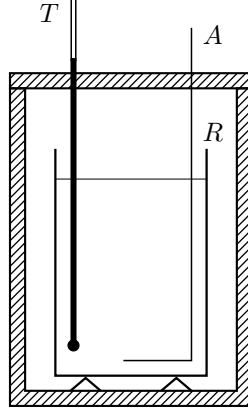


Figura 14.1: Calorimetro di Regnault.

Questo è un cilindro isolato termicamente dall'esterno ove è collocato un recipiente R contenente una quantità d'acqua di massa m_{H_2O} nota; nell'acqua sono immersi il bulbo di un termometro a mercurio T ed un agitatore A .

Si abbia quindi un corpo di massa m nota di cui si vuole determinare il calore specifico c . Si porti il corpo ad una temperatura nota t_1 (per esempio immergendolo per un tempo sufficiente in acqua bollente, cosicché $t_1 = 100^\circ\text{C}$) si immerge il corpo nell'acqua e si chiude velocemente il coperchio del calorimetro. Si muove l'agitatore per garantire l'uniformità della temperatura dell'acqua. Dopo un tempo sufficientemente lungo l'interno del calorimetro raggiunge l'equilibrio termico a temperatura t_{eq} che viene letta sul termometro T . Il corpo, più caldo, ha ceduto calore all'acqua e tutte le altre parti del calorimetro: il recipiente R , l'agitatore A e il termometro T . Deve quindi valere la relazione

$$mc(t_1 - t_{eq}) = (m_{H_2O} + m^*)c_{H_2O}(t_{eq} - t_0) \quad (14.7)$$

da cui si ottiene

$$c = \frac{(m_{H_2O} + m^*)c_{H_2O}(t_{eq} - t_0)}{m(t_1 - t_{eq})}. \quad (14.8)$$

La quantità m^* è detta **equivalente in acqua del calorimetro** e rappresenta la massa d'acqua che ha la stessa capacità termica del calorimetro. Nei calorimetri in commercio il valore di m^* è fornito dal costruttore; in mancanza di tale dato, m^* può essere misurata inserendo nel calorimetro, al posto del corpo di calore specifico ignoto, una quantità d'acqua di massa m_1 e temperatura t_1 note. In questo caso la (14.7) diventa

$$m_1c_{H_2O}(t_1 - t_{eq}) = (m_{H_2O} + m^*)c_{H_2O}(t_{eq} - t_0) \quad (14.9)$$

da cui

$$m^* = \frac{m_1(t_1 - t_{eq}) - m_{H_2O}(t_{eq} - t_0)}{t_{eq} - t_0}. \quad (14.10)$$

Un altro calorimetro utilizzato è il **calorimetro a ghiaccio di Bunsen**². Una provetta di vetro è inserita in un grosso bulbo, pure di vetro, collegato sul fondo ad un tubo riempito di mercurio, come rappresentato in figura 14.2. Lo spazio fra la provetta ed il bulbo sia riempito d'acqua ed il tutto sia inserito in un recipiente pieno di ghiaccio fondente, e quindi a temperatura di 0°C . Introducendo nella provetta un po' di etere, a causa della sottrazione di calore necessario

¹ Henri-Victor Regnault (1810-1878), chimico e fisico francese.

² Robert Wilhelm von Bunsen (1811-1899), chimico e fisico tedesco.

all'evaporazione, si forma uno strato di ghiaccio intorno alla provetta. A questo punto si introduce nella provetta un corpo di temperatura $T > 0$. Il ghiaccio cede calore al corpo fino a che esso non raggiunge la temperatura di equilibrio di 0°C .

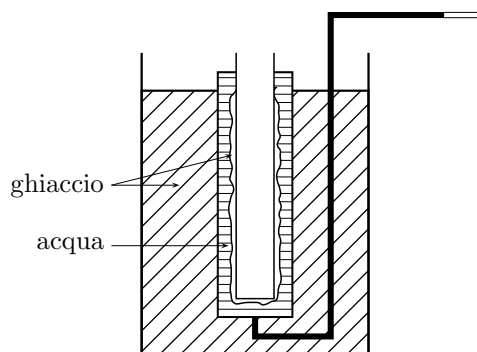


Figura 14.2: Calorimetro di Bunsen.

Questo determina la fusione di una certa quantità di ghiaccio e quindi un arretramento del mercurio nel tubo, a causa della riduzione di volume. Tarando e graduando opportunamente la parte finale del tubo, si può leggere la quantità di calore ceduta dal corpo al ghiaccio. Dalla misura del calore scambiato, conoscendo la temperatura iniziale (e quindi la variazione di temperatura) è possibile determinare il calore specifico del corpo, che ha ceduto calore al ghiaccio.

14.4 EVAPORAZIONE, VAPORIZZAZIONE E CONDENSAZIONE.

Si affronta in questo paragrafo, con un certo dettaglio, l'esame di un particolare cambiamento di stato particolarmente importante per la ricchezza della sua fenomenologia e per la sua importanza nella vita quotidiana. Si tratta del cambiamento di stato *da liquido a vapore*. L'analisi dettagliata del processo porta a mettere a fuoco la distinzione fra vapore e gas e come tale distinzione dipenda dalla temperatura e dalla pressione della sostanza in questione.

Si consideri inizialmente dell'acqua, sia per esempio a temperatura ambiente, contenuta in un recipiente scoperto. Le molecole del liquido possiedono una certa velocità media che dipende dalla temperatura in modo analogo (sebbene non così semplice) a come avviene per i gas. Sebbene la velocità media sia fissata dalla temperatura, esistono molecole con velocità maggiore della media come ne esistono con velocità minore. Le più veloci, quando si trovano in prossimità della superficie del liquido, tendono a staccarsi ed a muoversi liberamente nell'atmosfera. È questo il fenomeno dell'**evaporazione**. Esso si distingue dalla vaporizzazione poiché interessa solo alcune delle molecole che si trovano sulla superficie del liquido ed, inoltre, avviene a qualsiasi temperatura minore della temperatura di ebollizione; viceversa la vaporizzazione interessa tutto il volume del liquido ed avviene solo alla temperatura di ebollizione che, peraltro, come si vedrà, dipende dalla pressione esterna.

Ora si collochi un coperchio al recipiente e si faccia il vuoto nello spazio fra la superficie del liquido ed il coperchio. Ancora le molecole del liquido tendono progressivamente ad evaporare ma ora non sono più libere di andarsene: si muovono nello spazio vuoto racchiuso dal coperchio ed alcune di esse tendono a ricadere nel liquido. Dopo un tempo sufficientemente lungo si viene a creare una situazione di equilibrio fra le molecole che evaporano e quelle che ricadono nel liquido. In tale situazione è massima la quantità di vapore presente nello spazio racchiuso dal coperchio a quella data temperatura. Si dice allora che il volume disponibile tra la superficie del liquido ed il coperchio è *saturo* di vapore: non è possibile aumentare la quantità di vapore presente. La pressione del vapore in questa situazione è detta **pressione del vapore saturo**. Se si aumenta la temperatura del liquido aumenta la velocità media delle molecole e quindi aumenta il numero delle molecole che evaporano. In questo modo la situazione di equilibrio si sposta verso una maggiore presenza di molecole di vapore. In altre parole all'aumentare della temperatura aumenta la pressione del vapore saturo.

Se il liquido non evapora nel vuoto ma in presenza di altri gas, per esempio l'aria, la pressione

del vapore saturo è solo una parte della pressione totale. A questo proposito si definisce **umidità relativa** dell'aria il rapporto, solitamente espresso in percentuale, fra la pressione del vapore d'acqua che si trova in quel momento nell'atmosfera e la pressione del vapore saturo alla temperatura dell'atmosfera, cioè, in altre parole, il rapporto fra la quantità di vapore presente e la massima quantità di vapore possibile a quella temperatura. Al diminuire della temperatura la pressione di vapore saturo diminuisce e può eguagliare la pressione del vapore presente nell'aria, si dice, in tal caso, che l'aria è satura di vapore e che vi è un'umidità del 100%; un'ulteriore diminuzione della temperatura porta alla condensazione di parte del vapore in modo che la sua pressione non ecceda quella del vapore saturo. Per questo motivo, di notte, campi e strade si bagnano di quella che viene comunemente chiamata *rugiada*: essi sono più freddi dell'aria circostante e quindi il vapore d'aria a contatto con il suolo condensa. D'inverno, se la temperatura scende sotto lo zero il vapore solidifica e si forma la *brina*. Se la temperatura dell'aria satura di vapore d'acqua scende, il vapore condensa in goccioline detta, com'è noto, *nebbia*.

Resta ancora da capire, in questo schema concettuale, perché l'acqua alla temperatura di 100 °C vaporizza ed entra in ebollizione. Il motivo è che a 100 °C la pressione del vapore saturo eguaglia la pressione atmosferica e quindi le microscopiche bollicine di vapore presenti nel liquido hanno una pressione interna uguale a quella del liquido esterno, quindi cominciano ad espandersi; in questo modo riducono la loro densità e, a causa della legge di Archimede, sono spinti verso l'alto. Quindi un liquido bolle quando la pressione del suo vapore saturo raggiunge la pressione esterna. Ecco perché in alta montagna, ove la pressione esterna è minore di quella a valle, l'acqua bolle a temperatura minore di 100 °C.

14.5 TEMPERATURA CRITICA E DIAGRAMMA DI FASE.

La transizione di fase fra un liquido ed il suo vapore quindi dipende dalla pressione e dalla temperatura. In particolare, volendo condensare un dato vapore si deve portare la sua pressione al di sopra della pressione del vapore saturo. A tale scopo si può diminuire la temperatura a pressione costante in modo da diminuire la pressione del vapore saturo mantenendo costante la pressione del vapore; oppure si può aumentare la pressione del vapore a temperatura costante in modo da aumentare la pressione del vapore saturo mantenendo costante la pressione del vapore. Questo processo ha però delle limitazioni. Infatti al di sopra di una certa temperatura T_c , detta **temperatura critica**, che cambia da sostanza a sostanza, non c'è modo di ottenere la condensazione del vapore mediante compressione. In tale caso si abbandona il nome di vapore per adottare quello di **gas**. Quindi si dice gas una sostanza aeriforme al di sopra della temperatura critica, e vapore una sostanza aeriforme al di sotto della temperatura critica.

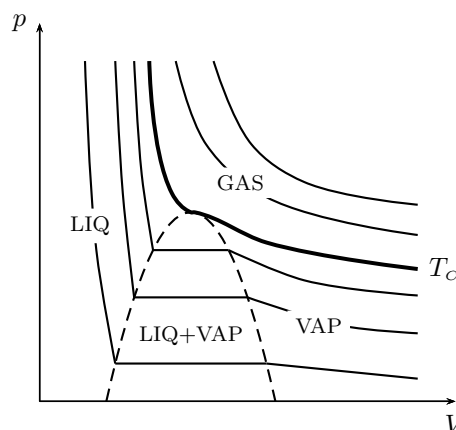


Figura 14.3: Isoterme vicino alla temperatura critica.

Questa distinzione può essere qualitativamente spiegata affermando che al di sopra della temperatura critica l'energia cinetica delle molecole è troppo alta perché le forze intermolecolari possano tenerle legate e quindi non c'è pressione che valga a formare i legami molecolari necessari alla condensazione. Tale situazione è ben illustrata dalla seguente figura 14.3 in cui sono disegnate

alcune curve isoterme a varie temperature sopra e sotto la temperatura critica. Per capire che cosa accade, si supponga di avere una sostanza aeriforme al di sotto della temperatura critica. Se il vapore viene compresso isotermicamente la pressione aumenta ed il volume diminuisce fino a che la pressione non raggiunge il valore della pressione del vapore saturo a quella data temperatura: ciò avviene quando l'isoterma comincia il tratto orizzontale. Allora il vapore comincia a condensare mantenendo costante la sua pressione (che, essendo quella del vapore saturo, è la massima pressione cui può trovarsi il vapore a quella temperatura).

Quando la condensazione è completata, e tutto il vapore è diventato liquido, l'isoterma diventa quasi verticale: i liquidi infatti, essendo sostanzialmente incompressibili, hanno piccole variazioni di volume anche per grandi variazioni di pressione. Oltre la temperatura critica non è più possibile la condensazione e l'isoterma assume la familiare forma di iperbole equilatera tipica dei gas perfetti. È evidente quindi che un gas reale approssima bene un gas perfetto solo per temperature ben maggiori della temperatura critica.

14.6 DIAGRAMMA pt E PUNTO TRIPLO.

È conveniente rappresentare le curve del cambiamento di stato in un diagramma ove si abbia la pressione in ordinata e la temperatura in ascissa.

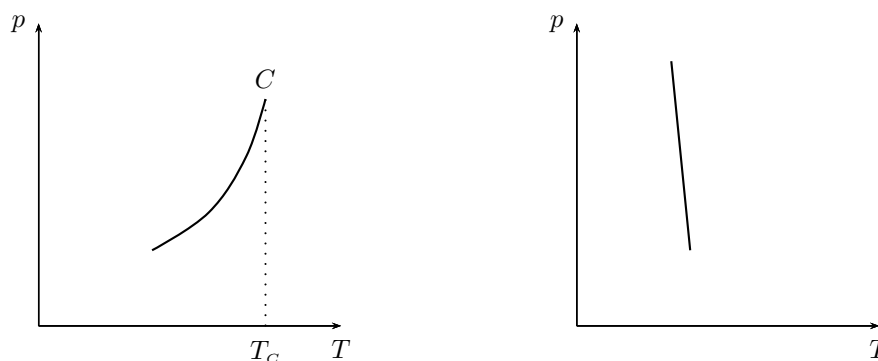


Figura 14.4: Curve di vaporizzazione e di solidificazione.

Ad esempio la curva che separa lo stato di vapore dallo stato liquido è data dalla curva mostrata nel primo grafico della figura 14.4. I punti sulla curva rappresentano gli stati di equilibrio fra liquido e vapore, cioè la curva mostra come varia la pressione del vapore saturo al variare della temperatura. Il punto C rappresenta lo stato corrispondente alla temperatura critica oltre il quale non c'è più lo stato di vapore ma vi è lo stato di gas.

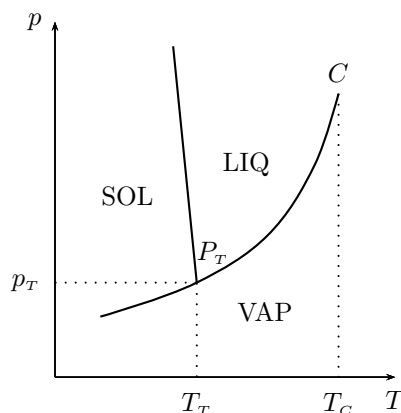


Figura 14.5: Punto triplo.

L'altra figura mostra la curva di fusione i cui punti rappresentano gli stati di equilibrio fra liquido e solido, la curva quindi mostra l'andamento della temperatura di fusione al variare della

pressione. Nel secondo grafico della figura 14.4 è rappresentata la curva di fusione dell'acqua: si vede che la temperatura di fusione diminuisce all'aumentare della pressione; questo fatto può essere qualitativamente compreso come segue. Durante la solidificazione dell'acqua si ha un aumento di volume, quindi una diminuzione di pressione facilita la solidificazione dell'acqua cioè al diminuire della pressione la solidificazione avviene a temperature più alte, come rappresentato nel grafico.

La situazione ovviamente si capovolge per le sostanze che diminuiscono di volume solidificandosi; per esse la pendenza della curva è positiva, cioè la curva pende verso il lato destro. Tracciando simultaneamente la curva della pressione del vapore saturo e la curva di fusione (si veda la figura 14.5) si vede che esse si incontrano in un punto P_T detto **punto triplo**. Nello stato corrispondente al punto P_T vi è equilibrio di tutte e tre le fasi: solido, liquido e vapore. Nel caso dell'acqua il punto triplo si ha per $T = 0.0075^\circ\text{C} = 273.1575\text{ K}$ e $p_T = 611.657\text{ Pa}$: al di sotto della pressione del punto triplo esistono la fase solida e la fase di vapore separate dalla *curva di sublimazione*.

14.7 ANCORA SULLE TRASFORMAZIONI.

L'insieme di tutti i sistemi fisici che interagiscono o possono interagire con un sistema termodinamico è detto **ambiente esterno**. Fra le interazioni possibili, ci interessano in particolare le seguenti:

- i. Scambio di lavoro fra il sistema termodinamico e l'ambiente esterno (si veda il paragrafo successivo). Ciò può essere realizzato, ad esempio, se il sistema è contenuto in un recipiente a parete mobile, cui sia connesso un meccanismo che converta in lavoro meccanico eventuali espansioni e compressioni (e viceversa). Si vedrà tra poco come il lavoro effettuato da un sistema termodinamico sia determinato da variazioni del suo volume.
- ii. Scambio di quantità di calore fra il sistema termodinamico ed l'ambiente esterno. In questo caso si suppone che l'ambiente esterno si trovi ad una temperatura T *ben determinata ed invariabile* e che funga da *riserva inesauribile* di calore. In relazione a queste caratteristiche l'ambiente esterno viene spesso denominato **sorgente termica** o **serbatoio di calore**. Una sorgente termica a temperatura T serve a mantenere costante sul valore T la temperatura del sistema termodinamico con cui è a contatto (si usa qui il principio 'zero' della termodinamica): essa ha dunque una funzione di termostato. Questo dà un senso all'affermazione precedente che una sorgente è una riserva inesauribile di calore. In effetti, se il sistema termodinamico, a temperatura T_1 ed avente capacità termica C_1 , è posto a contatto con una sorgente a temperatura T ad avente capacità termica C , la temperatura di equilibrio è data da:

$$T_{eq} = \frac{C_1 T_1 + C T}{C_1 + C} . \quad (14.11)$$

Se la sorgente ha una capacità termica molto grande rispetto a quella del sistema termodinamico, cioè se $C \gg C_1$, si ha che $T_{eq} \simeq T$. Una sorgente termica è quindi capace di scambiare grandi quantità di calore senza che la sua temperatura vari apprezzabilmente. Ricordando che $C = mc$, dove c è il calore specifico, si deduce che, per avere sorgenti con capacità termiche molto elevate, è sufficiente prenderle di massa molto elevata (si rifletta su come questa considerazione si applichi a spiegare l'effetto mitigatore del mare).

Se l'ambiente esterno si riduce all'insieme vuoto, allora il sistema è **isolato**.

All'elenco fatto nel primo capitolo delle trasformazioni elementari è opportuno aggiungere qui la trasformazione in cui non ci sia scambio di calore con l'ambiente esterno; una tale trasformazione è detta **adiabatica**. Sul piano delle fasi è rappresentata da un tratto di curva simile ad un'iperbole equilatera, ma con una pendenza maggiore.

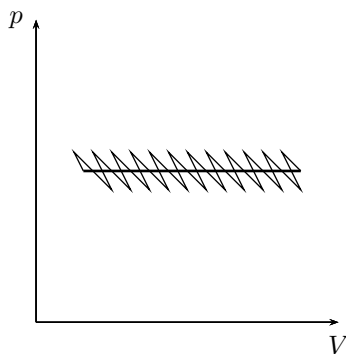


Figura 14.6: Approssimabilità di un'isobara per mezzo di isoterme ed adiabatich.

Si noti come, durante una trasformazione *isoterma*, il sistema resti a contatto con *una sola* sorgente termica. Durante una trasformazione *adiabatica* il sistema non scambia calore con l'esterno e quindi non è a contatto con *nessuna* sorgente termica. Per ogni altra trasformazione il sistema passa attraverso una serie di stati a temperatura differente. In *ognuno* di questi stati, occorre pensare il sistema in contatto con una sorgente termica differente. Infatti *ogni* trasformazione quasistatica di un fluido semplice è approssimabile, con un grado di precisione arbitrario, mediante una successione di un numero *finito* di trasformazioni adiabetiche ed isoterme alternate (si veda la figura 14.6). La possibilità di questa approssimazione ha una formalizzazione matematica ed un significato fisico ben precisi; infatti un sistema che effettua una trasformazione adiabatica non ha scambi di calore con l'ambiente esterno, mentre nel corso di una trasformazione isoterma il calore viene scambiato con un'unica sorgente (alla stessa temperatura del sistema termodinamico). Le possibili cause di irreversibilità sono quindi ridotte ai casi chimico e meccanico, in linea di principio più facilmente controllabili. Isoterme ed adiabetiche si trovano per ciò su un piano concettuale ed empirico diverso rispetto a tutte le altre trasformazioni, su cui si dovrà tornerà nella sezione 16.2.

14.8 LAVORO DI UNA TRASFORMAZIONE.

In questa sezione si dimostra come, effettuando una trasformazione di un sistema termodinamico, sia possibile compiere lavoro sull'ambiente esterno e si determina una formula elementare per calcolare il lavoro compiuto.

Si consideri a questo scopo un modello semplice: una quantità di gas racchiusa in un recipiente cilindrico di volume V . Il recipiente è rigido, eccettuata una parte mobile (o pistone) di area S , a tenuta stagna e perfettamente scorrevole.

Si supponga che il gas si trovi in uno stato di equilibrio: la sua pressione uguaglia la pressione esterna, $p = p_{\text{ext}}$, ed il pistone si trova in quiete. Se il gas viene forzato ad espandersi (ad esempio perché riscaldato) la parete mobile si sposta sino a che non venga raggiunta una nuova situazione di equilibrio. Si indichi con Δx il modulo dello spostamento della parete (si veda la figura 14.7): esso si compie in verso opposto alla forza di pressione esterna \mathbf{F}_{ext} , il cui modulo è legato alla pressione esterna dalla relazione $F_{\text{ext}} = p_{\text{ext}}S$. Il lavoro \mathcal{L}_{ext} compiuto dalla forza esterna \mathbf{F}_{ext}

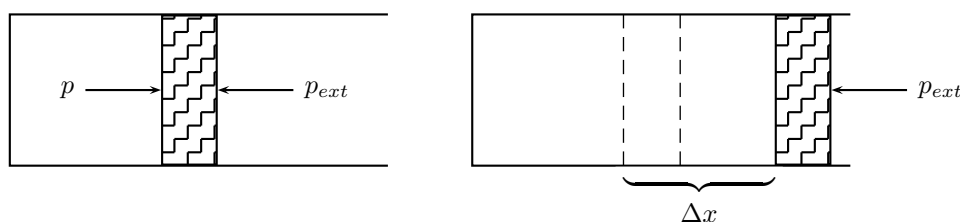


Figura 14.7: Lavoro di una trasformazione.

è dato da $\mathcal{L}_{\text{ext}} = \mathbf{F}_{\text{ext}} \cdot \Delta \mathbf{x}$. Si noti ora che i vettori \mathbf{F}_{ext} e $\Delta \mathbf{x}$ sono paralleli ma hanno versi opposti. Ne risulta

$$\mathcal{L}_{\text{ext}} = -F_{\text{ext}} \Delta x = -p_{\text{ext}} S \Delta x = -p_{\text{ext}} \Delta V < 0, \quad (14.12)$$

dove ΔV è la variazione di volume del recipiente. Il lavoro compiuto *dalla* forza esterna *sul* sistema è quindi *negativo*, ed è in realtà il sistema a compiere lavoro sull'esterno. Poiché la parete scorre senza attrito, e non vi è variazione di energia cinetica, il lavoro \mathcal{L} compiuto *dal* sistema risulta uguale ed opposto a quello compiuto *contro* la forza esterna: $\mathcal{L} = -\mathcal{L}_{\text{ext}}$. Perciò

$$\mathcal{L} = p_{\text{ext}} \Delta V. \quad (14.13)$$

Questa equazione, ricavata nel caso semplice di un recipiente cilindrico, risulta vera *qualunque* sia la forma del recipiente.

Si assume la seguente convenzione: $\mathcal{L} > 0$ se il lavoro è compiuto *dal* sistema termodinamico *sull'*ambiente esterno; $\mathcal{L} < 0$ in caso contrario, cioè se il lavoro viene compiuto *dall'*ambiente esterno *sul* sistema. In particolare, risulta $\mathcal{L} > 0$ se si verifica un incremento $\Delta V > 0$ del volume del sistema, inversamente $\mathcal{L} < 0$ se $\Delta V < 0$.

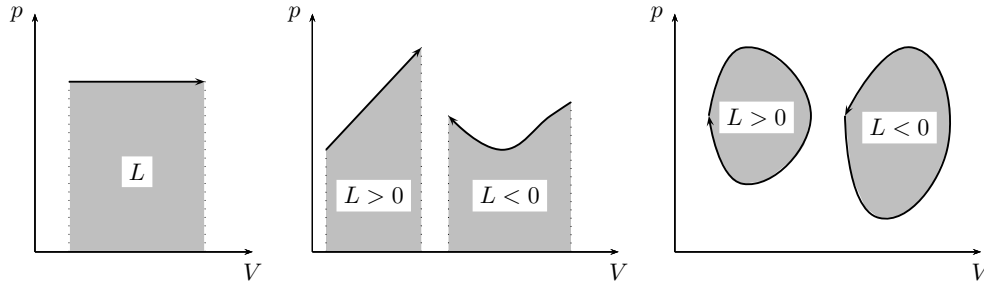


Figura 14.8: Interpretazione geometrica del lavoro.

Il pregio della formula (14.13) consiste nella sua applicabilità a qualsiasi trasformazione, anche quelle che non siano quasistatiche (ad esempio un'espansione causata dall'esplosione del gas). Il suo difetto è quello di contenere la grandezza p_{ext} , che *non* è una variabile di stato del gas. Nel caso la trasformazione compiuta dal gas sia *quasistatica* ed *isobara*, questo difetto può essere eliminato in modo immediato. In effetti, la trasformazione compendosi attraverso una successione di stati di equilibrio, p_{ext} è *in ogni istante*, e non solo agli istanti iniziale e finale, equilibrata da p : ne risulta $p = p_{\text{ext}}$. Per un'*isobara* quasistatica vale quindi

$$\mathcal{L} = p \Delta V. \quad (14.14)$$

Nel caso di un fluido semplice, l'esame del grafico di una trasformazione isobara quasistatica sul piano pV fornisce una semplice interpretazione geometrica per il lavoro compiuto (si veda la prima delle figure 14.8).

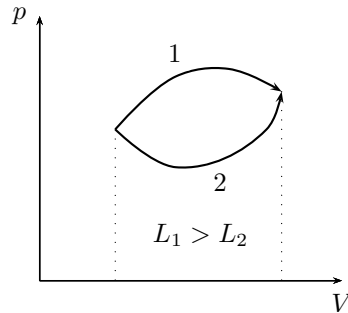


Figura 14.9: Il lavoro dipende dalla trasformazione.

Il suo valore coincide con l'area della porzione di piano compresa fra il grafico della trasformazione e l'asse delle ascisse. L'area è presa con il segno positivo se la trasformazione ha luogo nel verso dei volumi crescenti, con segno negativo in caso contrario. Il risultato trovato sopra ha validità generale, infatti data una qualsiasi trasformazione quasistatica, si può dimostrare che il valore del lavoro compiuto coincide con l'area della porzione di piano pV compresa fra il grafico della trasformazione e l'asse delle ascisse. (si veda la seconda delle figure 14.8). È questo il motivo per cui si è soliti scegliere il piano pV per rappresentare stati di equilibrio e trasformazioni. Si noti come questa interpretazione geometrica vada perduta nel caso di trasformazioni che non siano quasistatiche, dato che esse non sono rappresentabili sul piano pV . Se la trasformazione è ciclica il valore del lavoro compiuto coincide con l'area della porzione di piano racchiusa dalla trasformazione. Esso è positivo se il ciclo è percorso in senso orario, negativo se è percorso in senso antiorario (si veda la terza delle figure 14.8). È molto importante notare come il lavoro compiuto durante una trasformazione non dipenda soltanto dallo stato iniziale e finale, ma anche alla particolare trasformazione che li connette (si veda la figura 14.9). Per una trasformazione **isocora** non vi è alcuna variazione di volume, quindi dalla (14.13) si ottiene

$$\mathcal{L} = 0 . \quad (14.15)$$

in accordo con il fatto l'area compresa fra il grafico di una isocora e l'asse delle ascisse è nulla. È possibile inoltre dimostrare che per una trasformazione **isoterma** quasistatica nella quale il gas passa da uno stato iniziale A di volume V_A ad uno finale B di volume V_B è

$$\mathcal{L} = nRT \log \frac{V_B}{V_A} . \quad (14.16)$$

Ricordando le proprietà del logaritmo, si vede che questo lavoro è positivo quando il gas si espande ($V_B > V_A$) ed è negativo quando il gas subisce una compressione ($V_B < V_A$), in accordo con le convenzioni scelte per il segno del lavoro.

INTERMEZZO 1. SUDORE QUOTIDIANO.

Si studia qui, effettuando delle stime ragionevoli, il bilancio energetico quotidiano di un essere umano.

Attraverso l'attività metabolica un essere umano medio a riposo produce circa l'energia $Q = 2400 \text{ kcal} \simeq 10^7 \text{ J}$. Se il corpo umano fosse un sistema termodinamico isolato, questa energia prodotta farebbe aumentare la temperatura corporea. Il principale meccanismo di termoregolazione è la sudorazione. Si vuole qui determinare, in modo approssimato, la massa d'acqua che evapora ogni giorno dal corpo per mantenere costante la temperatura.

Si supponga quindi che il calore specifico del corpo umano sia uguale a quello dell'acqua, e quindi $c = 4.184 \text{ kcal kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$. Se non vi fosse la sudorazione l'aumento della temperatura corporea di un uomo di massa $m = 75 \text{ kg}$ sarebbe quindi

$$\Delta T = \frac{Q}{mc} = 7.65 \text{ K} \quad (14.17)$$

Quindi per mantenere costante la temperatura il calore Q deve essere utilizzato per far evaporare l'acqua; ricordando che il calore latente di vaporizzazione dell'acqua è $\lambda_e = 2.26 \times 10^3 \text{ kJ kg}^{-1}$ si trova che la massa d'acqua che evapora in un giorno è

$$m = \frac{Q}{\lambda_e} = 4.44 \text{ kg} \quad (14.18)$$

cioè circa quattro litri e mezzo d'acqua.

INTERMEZZO 2. CAPACITÀ TERMICA DEL SISTEMA SOLARE.

Si consideri un pianeta del sistema solare di massa m che si muova attorno al Sole di moto circolare uniforme con raggio r . La velocità di rivoluzione con cui il pianeta percorre la sua orbita è data dalla (4.22):

$$v = \sqrt{\frac{GM_{\odot}}{r}}. \quad (14.19)$$

Si supponga di fornire energia al pianeta; esso quindi aumenta la propria velocità e, utilizzando l'interpretazione cinetica della temperatura, si può affermare che la temperatura del pianeta aumenta. Tuttavia, l'energia meccanica del pianeta è data dalla (5.63):

$$\mathcal{E} = -\frac{GM_{\odot}m}{2r}; \quad (14.20)$$

essendo negativa, un aumento di r corrisponde ad una diminuzione di \mathcal{E} .

Estendendo questa analisi a tutti i pianeti del sistema solare, si può dedurre che un aumento di temperatura del sistema solare corrisponde ad una sua diminuzione di energia. Questa situazione consente di affermare che la capacità termica del sistema solare, e più in generale di ogni sistema fisico in cui sia coinvolta la gravità, ha capacità termica negativa.

INTERMEZZO 3. CALORE SPECIFICO NEGATIVO ED EQUILIBRIO.

Si vuole qui esplorare, da un punto di vista puramente teorico, che cosa comporta l'esistenza di un sistema termodinamico con capacità termica negativa. Dalla relazione $Q = mc\Delta T$ si vede che se il sistema termodinamico assorbe calore, e quindi Q è positivo, un calore specifico negativo ha come conseguenza una variazione negativa della temperatura e quindi una diminuzione di temperatura. Questo fatto ha importanti conseguenze sulla possibilità di realizzare l'equilibrio termico.

Si considerino infatti due corpi A e B ; il primo avente capacità termica positiva e il secondo con capacità termica negativa e si supponga che fra essi vi sia una differenza di temperatura, anche molto piccola; sia per esempio $T_A > T_B$; questa differenza causa un passaggio di calore dal corpo A al corpo B ; quindi A , che ha calore specifico positivo, perdendo calore diminuisce la sua temperatura, e B , che ha capacità termica negativa, assorbendo calore anch'esso diminuisce la sua temperatura quindi il sistema non evolve verso una situazione di equilibrio termico come previsto dal principio zero.

Simmetricamente, se inizialmente si ha $T_A < T_B$, il calore viene assorbito da A che aumenta la propria temperatura e ceduto da B che anch'esso aumenta ulteriormente la propria temperatura; nuovamente, quindi, il sistema non evolve verso una situazione di equilibrio termico.

Quindi l'esistenza di corpi con capacità termica negativa ostacola l'equilibrio termico e va contro il principio zero della termodinamica. Per questo motivo in queste lezioni si considerano solamente sistemi fisici con capacità termica positiva.

15

PRIMO PRINCIPIO DELLA TERMODINAMICA.

15.1 ENERGIA INTERNA.

È un dato di esperienza comune come durante una trasformazione un sistema termodinamico possa scambiare calore e lavoro con l'ambiente esterno. È un risultato sperimentale che nel caso di trasformazioni cicliche questi sono legati dalla relazione,

$$\boxed{Q = \mathcal{L}} \quad (15.1)$$

esprimente il seguente **principio di equivalenza**.

Se un sistema materiale esegue una trasformazione ciclica durante la quale vengano scambiati con l'esterno il calore Q ed il lavoro \mathcal{L} , questi coincidono, qualunque sia il sistema considerato o la trasformazione cui è stato sottoposto.

Questo, chiaramente, è numericamente vero solo se Q ed \mathcal{L} vengono misurati con la stessa unità di misura; viceversa misurando il lavoro in joule ed il calore in calorie vale la relazione

$$\frac{\mathcal{L}}{Q} = 4.184 \text{ J cal}^{-1} . \quad (15.2)$$

La determinazione di questo numero, detto *equivalente meccanico della caloria*, viene fatta sperimentalmente.

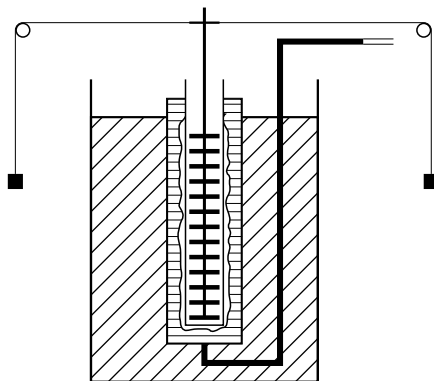


Figura 15.1: L'esperienza di Joule.

Il primo a fare tale misura è stato Joule mediante l'esperimento di seguito schematicamente illustrato. Si consideri una provetta di un calorimetro di Bunsen. Dentro l'acqua si trovino delle palette libere di ruotare attorno ad un asse verticale alla sommità del quale si trova una carrucola; sulla carrucola è avvolto del filo in modo che i suoi due capi pendano ai lati del recipiente e vi siano appesi due pesetti di massa uguale e nota m (si veda la figura 15.1). Lasciandoli liberi di scendere, i due pesetti si muovono, dopo una breve fase transitoria, di moto uniforme ad una velocità v , facilmente misurabile. Quando i due pesetti sono scesi di un tratto h , il filo si sgancia dalla carrucola e le palette, non più soggette a forze, rallentano e in breve si fermano. Si consideri il moto dei due pesetti. Il lavoro fatto su di essi (dalla forza peso e dalle tensioni ai due capi del filo) va in parte in energia cinetica dei pesetti stessi, in parte, che si indica con \mathcal{L} , viene ceduto al

sistema costituito dalle palette e dell'acqua; \mathcal{L} può essere facilmente calcolato quindi misurando v e h , infatti

$$\mathcal{L} = 2mgh - 2 \cdot \frac{1}{2}mv^2 . \quad (15.3)$$

Quando il filo si sgancia l'acqua ha una temperatura maggiore di 0°C come si vede dal fatto che parte del ghiaccio si è sciolto e il mercurio si è ritirato; dopo qualche minuto si ristabilisce l'equilibrio termico e il sistema costituito dall'acqua e dalle palette torna alla temperatura di 0°C . Quindi il sistema acqua-palette ha subito una trasformazione ciclica nella quale ha compiuto il lavoro dato dalla (15.3), e ha scambiato con il calorimetro il calore Q che viene misurato direttamente dal calorimetro. Ripetendo questo esperimento variando le condizioni sperimentali, quali la massa dei pesi, la quantità d'acqua presente nella provetta o il tratto h della discesa, si trova per il rapporto di \mathcal{L} e Q sempre il valore dato dalla (15.2).

Si ricordino le convenzioni sui segni: $Q > 0$ se il sistema assorbe una quantità di calore dall'ambiente esterno, $\mathcal{L} > 0$ se il sistema compie lavoro sull'ambiente esterno.

Nel caso di trasformazioni non cicliche si dimostra (si veda oltre) che esiste una funzione \mathcal{U} dello stato del sistema termodinamico, detta **energia del sistema termodinamico**, per la quale vale la seguente relazione, che esprime il **primo principio della termodinamica**:

$$Q = \Delta\mathcal{U} + \mathcal{L} . \quad (15.4)$$

ove $\Delta\mathcal{U}$ è la variazione della funzione \mathcal{U} .

Il primo principio della termodinamica è una generalizzazione del principio di conservazione dell'energia valido solo per i sistemi sui quali agiscano solo forze conservative (discusso nella sezione 5.1.7). In effetti, l'azione di forze dissipative eventualmente presenti, è quello di produrre una quantità di calore di cui il primo membro della (15.4) tiene debito conto. Più in generale nella \mathcal{U} rientrano tutte le forme di energia del sistema fisico in questione: potenziale, cinetica, elettromagnetica, luminosa eccetera; vi rientrano inoltre anche tutte le forze legate ai processi molecolari, e quindi l'energia chimica, nucleare. In particolare, il fatto che questa definizione di energia contenga l'energia potenziale giustifica l'uso dello stesso simbolo \mathcal{U} .

In generale si usa chiamare **energia interna** la differenza fra l'energia \mathcal{U} e le forme di energia *macroscopiche* di un sistema fisico, come l'energia potenziale e cinetica di un corpo, o l'energia cinetica di una massa di gas che si sta spostando nello spazio con un moto collettivo ordinato, come nel caso del vento.

Nel caso del sistema fisico studiato in queste pagine, il gas perfetto, l'energia \mathcal{U} si riduce all'energia interna incontrata nel capitolo precedente, che dipende solo dall'energia cinetica delle molecole del gas.

Per un gas reale che si discosti dal modello di gas perfetto perché le interazioni fra le molecole non sono trascurabili, l'energia interna comprende, oltre alla parte cinetica anche una parte potenziale dovuta al lavoro delle forze molecolari, che compaiono nel termine \mathcal{L} al secondo membro della (15.4).

Nel seguito si farà astrazione da tutte le forme di energia macroscopiche del sistema; si identificherà quindi \mathcal{U} con l'energia interna.

Il primo principio trova applicazione quando si abbia una *trasformazione* di un sistema termodinamico. Q ed \mathcal{L} non dipendono soltanto dallo stato iniziale e finale del sistema, ma anche dalla particolare trasformazione che li connette. La funzione \mathcal{U} è invece una **funzione di stato**: essa dipende dallo stato iniziale e finale del sistema ma *non* dalla particolare trasformazione che li connette. È importante notare come \mathcal{U} sia una funzione matematica, di significato fisico non immediatamente esperibile.

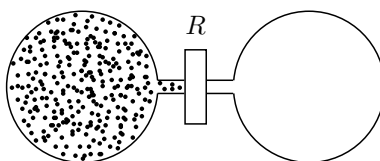


Figura 15.2: L'espansione libera.

Nel caso di un gas perfetto, l'identificazione fra l'energia \mathcal{U} definita dalla (13.4) e che quindi dipende solo dalla temperatura del gas e dell'energia interna definita dal primo principio della termodinamica (15.4), può essere verificato mediante il seguente esperimento, rappresentato nella figura 15.2. Si prendano due recipienti uguali accuratamente isolati termicamente dall'esterno, comunicanti mediante un rubinetto R . Nel primo recipiente si trovi un gas in uno stato di equilibrio alla temperatura T , nell'altro si faccia un vuoto spinto. Quindi si apra bruscamente il rubinetto. Si chiede come cambi la temperatura del gas in seguito a questa espansione. Se il modello finora sviluppato è corretto, la temperatura deve rimanere costante; infatti il gas non può ricevere né cedere energia in quanto non può scambiare calore né compie lavoro espandendosi nel vuoto. Questo esperimento di espansione libera di un gas è stato condotto per la prima volta da Gay-Lussac e perfezionato da Joule i risultati furono in buon accordo con le previsioni della teoria.

L'esperimento ora descritto rappresenta una verifica sperimentale del seguente fatto, ricavato teoricamente a partire dal modello di gas perfetto.

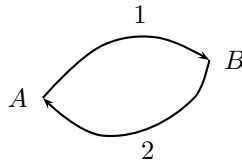
L'energia interna di un gas perfetto dipende solo dalla sua temperatura.

È importante notare che questo risultato sperimentale non è *esatto* (né potrebbe esserlo, dato che un gas ideale è solo un concetto teorico). L'affermazione precedente deve essere più opportunamente considerata come assunzione ulteriore che definisce in modo più completo il concetto di gas perfetto.

DIMOSTRAZIONE CHE ESISTE UNA FUNZIONE DI STATO \mathcal{U} TALE CHE $\mathcal{Q} = \Delta\mathcal{U} + \mathcal{L}$.

Si dimostra ora che per *qualsiasi* sistema termodinamico, e non solo per un gas perfetto, sottoposto ad una trasformazione, l'*esistenza* di una funzione di stato \mathcal{U} tale che valga la (15.4), senza che sia possibile fornire ulteriori informazioni sulla forma effettiva di \mathcal{U} . Nel caso in cui il sistema termodinamico in questione sia un fluido semplice, tali informazioni sono desumibili solo a partire da un determinato modello microscopico del fluido, come è stato fatto sopra nella sezione 13.1. In linea di principio, quindi, modelli microscopici diversi forniscono funzioni \mathcal{U} differenti. Viceversa, esistono sistemi termodinamici particolarmente complessi per i quali non è nota la forma esplicita della funzione \mathcal{U} .

La dimostrazione che segue, peraltro, è formalmente identica a quella presentata per l'esistenza della funzione energia potenziale vista nella sezione 5.1.4; è inoltre uguale a quella (si veda la sezione 17.1) che dimostra l'esistenza dell'entropia. Questo è dovuto all'identità formale dei tre problemi fisici.

**Figura 15.3:** Ciclo composto dalle trasformazioni 1 e 2.

Si venga ora alla dimostrazione. Si consideri un ciclo composto da due trasformazioni (si veda la figura 15.3) che connettono fra loro due stati di equilibrio A e B in modo da costituire un ciclo. Si indichino le due trasformazioni con 1 e 2. Il principio di equivalenza applicato all'intero ciclo (trasformazione $1 + 2$) dice che

$$(\mathcal{Q} - \mathcal{L})_{1+2} = 0 . \quad (15.5)$$

Dato che il lavoro e la quantità di calore scambiati durante un ciclo sono la somma del lavoro e della quantità di calore scambiati nel corso delle trasformazioni componenti, ne consegue che

$$(\mathcal{Q} - \mathcal{L})_{1+2} = (\mathcal{Q} - \mathcal{L})_1 + (\mathcal{Q} - \mathcal{L})_2 = 0 , \quad (15.6)$$

e quindi

$$(\mathcal{Q} - \mathcal{L})_1 = -(\mathcal{Q} - \mathcal{L})_2 . \quad (15.7)$$

Si connettano ora i due stati A e B con una diversa trasformazione, chiamata 3, che sostituisca la trasformazione 1 (si veda la figura 15.4).

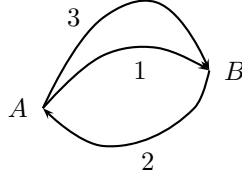


Figura 15.4: La trasformazione 3 sostituisce la 1.

Il ragionamento che appena fatto porta a concludere, in questo caso, che

$$(\mathcal{Q} - \mathcal{L})_3 = -(\mathcal{Q} - \mathcal{L})_2 . \quad (15.8)$$

Confrontando le equazioni (15.7) e (15.8) si ottiene

$$(\mathcal{Q} - \mathcal{L})_1 = (\mathcal{Q} - \mathcal{L})_3 . \quad (15.9)$$

Si noti ora che le trasformazioni 1, 2, 3 sono arbitrarie, e che l'ultima relazione scritta non contiene alcun riferimento alla trasformazione 2. Potremmo ripetere questo argomento per qualsiasi trasformazione (*anche non quasistatica*) che connetta gli stati A e B , arrivando alla conclusione che il valore della quantità $\mathcal{Q} - \mathcal{L}$ è *indipendente* da quale trasformazione sia stata effettuata per passare dallo stato A allo stato B , restando inteso che questi due stati estremali vengano mantenuti *fissi*. Si noti inoltre come questo valore non sia identicamente uguale a zero (è un dato sperimentale). Se ne conclude che, fissati gli stati A e B , il valore di $\mathcal{Q} - \mathcal{L}$ calcolato per qualsiasi trasformazione $A \rightarrow B$ che li connetta è una *funzione* dei soli stati A e B e non della trasformazione che li connette. Conviene denotare questo stato di cose nel modo seguente:

$$(\mathcal{Q} - \mathcal{L})_{A \rightarrow B} = \mathcal{U}(A, B) , \quad (15.10)$$

dove $\mathcal{U}(A, B)$ è una funzione da determinare. Allo scopo di ottenere qualche ulteriore informazione sulla funzione $\mathcal{U}(A, B)$, si supponga di connettere A e B mediante una trasformazione, che viene indicata con il simbolo $A \rightarrow B$, e che la trasformazione $B \rightarrow A$ riporti il sistema allo stato iniziale (si veda la figura 15.5).

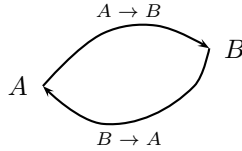


Figura 15.5: Le trasformazioni $A \rightarrow B$ e $B \rightarrow A$.

Eseguendo le due trasformazioni in successione si ottiene un ciclo, per il quale vale il principio di equivalenza: $\mathcal{Q} - \mathcal{L} = 0$. Usando l'argomento esposto sopra si trova

$$(\mathcal{Q} - \mathcal{L})_{A \rightarrow B + B \rightarrow A} = (\mathcal{Q} - \mathcal{L})_{A \rightarrow B} + (\mathcal{Q} - \mathcal{L})_{B \rightarrow A} = 0 , \quad (15.11)$$

e quindi

$$(\mathcal{Q} - \mathcal{L})_{A \rightarrow B} = -(\mathcal{Q} - \mathcal{L})_{B \rightarrow A} \quad (15.12)$$

ovvero, usando l'equazione (15.10),

$$\mathcal{U}(A, B) = -\mathcal{U}(B, A) . \quad (15.13)$$

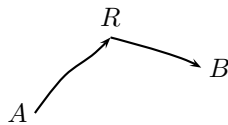


Figura 15.6: Lo stato di riferimento R .

Si supponga ora di far evolvere il sistema termodinamico dallo stato A allo stato B passando attraverso uno stato di riferimento intermedio, detto R , il cui significato fisico è discusso sotto. Tenendo presente l'equazione (15.10), si ottiene

$$\mathcal{U}(A, B) = (\mathcal{Q} - \mathcal{L})_{A \rightarrow B} = (\mathcal{Q} - \mathcal{L})_{A \rightarrow R} + (\mathcal{Q} - \mathcal{L})_{R \rightarrow B} = \mathcal{U}(A, R) + \mathcal{U}(R, B) . \quad (15.14)$$

Applicando ora l'equazione (15.13) alla trasformazione $A \rightarrow R$ si ricava

$$\mathcal{U}(A, R) = -\mathcal{U}(R, A) . \quad (15.15)$$

Quest'ultima formula, sostituita nell'equazione (15.14), dà infine la relazione

$$\mathcal{U}(A, B) = -\mathcal{U}(R, A) + \mathcal{U}(R, B) = \mathcal{U}(R, B) - \mathcal{U}(R, A) . \quad (15.16)$$

Fissando lo stato di riferimento R una volta per tutte, è possibile omettere di indicarlo ogni volta nella funzione \mathcal{U} e scrivere ad esempio $\mathcal{U}(R, A) \equiv \mathcal{U}(A)$. Quindi

$$\mathcal{U}(A, B) = \mathcal{U}(B) - \mathcal{U}(A) . \quad (15.17)$$

Si confrontino le equazioni (15.10) e (15.17); si può dedurre che facendo evolvere uno stato di equilibrio A di un sistema termodinamico in uno stato di equilibrio B per mezzo di una trasformazione arbitraria $A \rightarrow B$, è possibile determinare una funzione \mathcal{U} dello stato del sistema tale che, posto $\Delta\mathcal{U} \equiv \mathcal{U}(B) - \mathcal{U}(A)$, valga la relazione

$$(\mathcal{Q} - \mathcal{L})_{A \rightarrow B} = \Delta\mathcal{U} \quad (15.18)$$

e quindi

$$\mathcal{Q} = \Delta\mathcal{U} + \mathcal{L} \quad (15.19)$$

che è quanto si doveva dimostrare; alla luce di tutto ciò si enuncia il primo principio della termodinamica nella forma seguente.

La quantità di calore scambiata durante una trasformazione è uguale alla somma della variazione di energia interna e del lavoro compiuto nel corso della trasformazione.

Per capire che cosa sia fisicamente lo stato di riferimento arbitrario R , si osservi che vale

$$\mathcal{U}(A) = \mathcal{U}(R, A) = \mathcal{U}(A) - \mathcal{U}(R) \quad \implies \quad \mathcal{U}(R) = 0 \quad (15.20)$$

Quindi R è lo stato termodinamico cui corrisponde energia interna nulla. Come vale per l'energia potenziale in meccanica, anche l'energia interna \mathcal{U} è definita a meno di una costante additiva che viene fissata scegliendo arbitrariamente lo stato di energia nulla.

Nel caso particolare di trasformazioni *isobare* quasistatiche l'equazione (15.4), esprime il primo principio si può scrivere, si veda l'equazione (14.14):

$\mathcal{Q} = \Delta\mathcal{U} + p\Delta V .$

(15.21)

15.1.1 MOTO PERPETUO DI PRIMA SPECIE

Si dice moto *perpetuo di prima specie* quello prodotto da una macchina che produce più energia di quanta ne consuma; in tal moto, dopo essersi auto-alimentata, garantendo quindi la perpetuità del proprio funzionamento, è anche in grado di fornire l'energia rimasta inutilizzata.

Una tale macchina è impossibile poiché viola il principio di conservazione dell'energia nella forma del primo principio della termodinamica.

15.2 CAPACITÀ TERMICHE DI UN GAS PERFETTO

Si ricordi la definizione di **capacità termica** di una sostanza solida o liquida: essa è il coefficiente di proporzionalità fra la quantità di calore Q scambiata e la variazione di temperatura conseguentemente prodotta nella sostanza:

$$Q = C \Delta T . \quad (15.22)$$

La capacità termica C è quindi data dal rapporto

$$C = \frac{Q}{\Delta T} . \quad (15.23)$$

In stretta analogia si definiscono le capacità termiche di un gas. Si supponga in effetti di sottoporre un gas ad una trasformazione durante la quale risulti scambiata con l'ambiente esterno una certa quantità di calore Q . A seguito della trasformazione, la temperatura del gas subisce, in generale, una variazione ΔT . Si noti però come, a parità di stato iniziale e finale, il valore di Q dipenda dalla trasformazione concretamente effettuata per connetterli. Ne consegue che, nel caso di un gas, esiste una pluralità di capacità termiche: fissati gli stati iniziale e finale, il valore della capacità termica dipende dalla trasformazione effettuata per connetterli.

È consuetudine utilizzare due capacità termiche per unità di mole di base nello studio dei gas: la **capacità termica a pressione costante** C_p , legata all'effettuazione di una trasformazione isobara e definita da

$$C_p \equiv \left(\frac{Q}{n \Delta T} \right)_{p=\text{cost}} , \quad (15.24)$$

e la **capacità termica a volume costante** C_V , legata all'effettuazione di una trasformazione isocora e definita da

$$C_V \equiv \left(\frac{Q}{n \Delta T} \right)_{V=\text{cost}} . \quad (15.25)$$

Dall'analisi dimensionale delle equazioni (15.24) e (15.25), si vede che C_p e C_V hanno le dimensioni di energia diviso per quantità di sostanza e temperatura, vale cioè $[C_p] = [C_V] = [t]^{-2}[l][m][T]^{-1}[n]^{-1}$; pertanto la loro unità di misura è joule/mol/K. Si noti che le dimensioni di C_p e C_V sono le stesse della costante universale dei gas R ; si vedrà fra poche righe che la relazione fra queste tre grandezze non è solo dimensionale.

Si ricordi che, nel caso di una trasformazione isocora vale la relazione $\mathcal{L} = 0$. In questo caso, dal primo principio della termodinamica segue immediatamente che $Q = \Delta \mathcal{U}$ e quindi che

$$C_V \equiv \left(\frac{Q}{n \Delta T} \right)_{V=\text{cost}} = \frac{\Delta \mathcal{U}}{n \Delta T} . \quad (15.26)$$

A questo punto è possibile calcolare il valore di C_V per un gas perfetto usando il principio di equipartizione dell'energia, e in particolare l'equazione (13.30), ottenendo

$$C_V = \frac{\Delta \mathcal{U}}{n \Delta T} = \begin{cases} \frac{3}{2} R & \text{gas monoatomico,} \\ \frac{5}{2} R & \text{gas biatomico,} \\ 3R & \text{gas poliatomico.} \end{cases} \quad (15.27)$$

Confrontando ancora queste relazioni con le (13.30), si ottiene l'importante formula per l'energia interna di un gas perfetto

$$\mathcal{U} = n C_V T . \quad (15.28)$$

Il calcolo di C_p per un gas perfetto è agevolato dal sussistere della relazione di Mayer¹:

¹ Robert Mayer (1814-1878), medico tedesco.

$$\boxed{C_p = C_V + R .} \quad (15.29)$$

La dimostrazione dell'equazione (15.29) è la seguente:

$$\begin{aligned} C_p &\equiv \left(\frac{\mathcal{Q}}{n\Delta T} \right)_{p=\text{cost}} = \left(\frac{\Delta\mathcal{U} + \mathcal{L}}{n\Delta T} \right)_{p=\text{cost}} = \left(\frac{nC_V\Delta T + p\Delta V}{n\Delta T} \right)_{p=\text{cost}} = \\ &= \left(\frac{nC_V\Delta T + nR\Delta T}{n\Delta T} \right)_{p=\text{cost}} = \left(\frac{(C_V + R)n\Delta T}{n\Delta T} \right)_{p=\text{cost}} = C_V + R . \end{aligned} \quad (15.30)$$

Ove è stato utilizzato il primo principio della termodinamica, la (15.21) ed il fatto che in una trasformazione isobara una variazione di volume del gas è proporzionale ad una variazione di temperatura data dalla formula $p\Delta V = nR\Delta T$.

Ne conseguono immediatamente i seguenti valori di C_p per un gas perfetto

$$C_p = \begin{cases} \frac{5}{2}R & \text{gas monoatomico,} \\ \frac{7}{2}R & \text{gas biatomico,} \\ 4R & \text{gas poliatomico.} \end{cases} \quad (15.31)$$

Conviene riassumere il calcolo di $\Delta\mathcal{U}$, \mathcal{L} e \mathcal{Q} per le trasformazioni termodinamiche elementari.

Trasformazione isocora ($\Delta V = 0$):

$$\Delta\mathcal{U} = nC_V\Delta T \quad (15.32)$$

$$\mathcal{L} = 0 \quad (15.33)$$

$$\mathcal{Q} = nC_V\Delta T \quad (15.34)$$

Trasformazione isobara ($\Delta p = 0$):

$$\Delta\mathcal{U} = nC_V\Delta T \quad (15.35)$$

$$\mathcal{L} = p\Delta V = nR\Delta T \quad (15.36)$$

$$\mathcal{Q} = nC_p\Delta T \quad (15.37)$$

Trasformazione isoterma ($\Delta T = 0$):

$$\Delta\mathcal{U} = 0 \quad (15.38)$$

$$\mathcal{L} = nRT \log \frac{V_f}{V_i} = nRT \log \frac{p_i}{p_f} \quad (15.39)$$

$$\mathcal{Q} = \mathcal{L} = nRT \log \frac{V_f}{V_i} = nRT \log \frac{p_i}{p_f} \quad (15.40)$$

Trasformazione adiabatica ($\mathcal{Q} = 0$):

$$\Delta\mathcal{U} = nC_V\Delta T \quad (15.41)$$

$$\mathcal{L} = -\Delta\mathcal{U} = -nC_V\Delta T \quad (15.42)$$

$$\mathcal{Q} = 0 \quad (15.43)$$

15.3 EQUAZIONE DELLE TRASFORMAZIONI ADIABATICHE.

Dato uno stato termodinamico A si consideri una trasformazione adiabatica quasistatica che colleghi A con lo stato B ; allora è possibile dimostrare, purtroppo in maniera non elementare, che sussiste la seguente equazione

$$\boxed{p_A V_A^\gamma = p_B V_B^\gamma} \quad (15.44)$$

dove il parametro adimensionale γ è definito da

$$\gamma \equiv \frac{C_p}{C_V} = \frac{C_V + R}{C_V} = 1 + \frac{R}{C_V} , \quad (15.45)$$

si osservi che $\gamma > 1$. Poiché per A e B vale l'equazione di stato (12.20), si può scrivere

$$p_A = \frac{nRT_A}{V_A} \quad \text{e} \quad p_B = \frac{nRT_B}{V_B} \quad (15.46)$$

che, sostituita nella precedente equazione fornisce un'equazione equivalente alla (15.44):

$$\frac{nRT_A}{V_A} V_A^\gamma = \frac{nRT_B}{V_B} V_B^\gamma \quad \Rightarrow \quad T_A V_A^{\gamma-1} = T_B V_B^{\gamma-1} . \quad (15.47)$$

Analogamente, osservando che valgono

$$V_A = \frac{nRT_A}{p_A} \quad \text{e} \quad V_B = \frac{nRT_B}{p_B} , \quad (15.48)$$

si trova

$$p_A \left(\frac{nRT_A}{p_A} \right)^\gamma = p_B \left(\frac{nRT_B}{p_B} \right)^\gamma \quad \Rightarrow \quad p_A^{1-\gamma} T_A^\gamma = p_B^{1-\gamma} T_B^\gamma . \quad (15.49)$$

La (15.44) è l'equazione del grafico che rappresenta una trasformazione adiabatica sul piano delle fasi pV . Questo grafico è una curva di andamento simile a quello di un'isoterma (che, si ricordi, è un'iperbole equilatera), ma ha pendenza maggiore. Tale maggiore pendenza è dovuta al fatto che $\gamma > 1$; confrontando infatti le equazioni dell'isoterma e dell'adiabatica

$$pV = \text{cost} \quad , \quad pV^\gamma = \text{cost} \quad (15.50)$$

si vede che nella prima p è inversamente proporzionale a V , mentre nella seconda è inversamente proporzionale a V^γ ; pertanto per lo stesso aumento di volume nel secondo caso si ha una maggiore diminuzione di pressione.

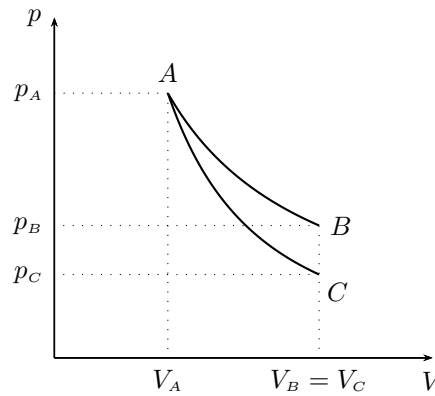


Figura 15.7: Confronto fra adiabatica e isoterma.

La questione è chiarita dal seguente esempio numerico. Si consideri un gas monoatomico, per il quale $\gamma = 5/3$, che si trovi inizialmente nello stato A con $p_A = 10^5$ Pa e $V_A = 10^{-3}$ m³ e si supponga che il gas subisca un'espansione in cui il suo volume raddoppi (si veda la figura 15.7); se l'espansione è isoterma il gas raggiunge lo stato B con

$$V_B = 2V_A \quad , \quad p_B = \frac{1}{2} p_A ; \quad (15.51)$$

se l'espansione è adiabatica il gas raggiunge lo stato C con

$$V_B = 2V_A \quad , \quad p_B = \left(\frac{V_A}{V_B}\right)^\gamma = \left(\frac{1}{2}\right)^{5/3} p_A \simeq 0.3 p_A . \quad (15.52)$$

Si vede così che la diminuzione di pressione nel caso adiabatico è maggiore che nel caso isoterma, per uguali incrementi del volume, quindi il grafico della trasformazione adiabatica ha una pendenza maggiore.

INTERMEZZO. LA TEMPERATURA DELL'UNIVERSO.

Un sistema la cui evoluzione è sicuramente adiabatica è l'intero universo; questo, in una approssimazione un po' grezza ma ragionevole per quel che riguarda la presente questione, può essere considerato come un gas poliatomico e quindi con $\gamma = 4/3$; applicando all'espansione dell'universo la legge delle trasformazioni adiabatiche nella forma (15.47), si trova

$$TV^{1/3} = \text{cost} , \quad (15.53)$$

quindi durante l'espansione dell'universo la temperatura varia in modo inversamente proporzionale a $V^{1/3}$ cioè alla dimensione lineare dell'universo. In altre parole se il raggio dell'universo raddoppia la sua temperatura dimezza. Poiché l'universo primordiale era molto caldo e da allora si è molto espanso, è ragionevole ritenere che la temperatura sia molto diminuita, ma, in linea di principio, misurabile.

Il primo a capire che deve essere possibile misurare la temperatura dell'universo è stato George Gamow insieme ai suoi collaboratori nel 1946. Si è dovuto però attendere fino al 1965 perché Penzias e Wilson² riuscirono a stabilire che l'universo è pieno di un'onda elettromagnetica di lunghezza d'onda $\lambda = 7.5$ cm cui corrisponde una temperatura $T = 3.5$ K. La misura attuale è³:

$$T = 2.725\,48(57) \text{ K} \quad (15.54)$$

² Arno Allan Penzias (1933–), fisico statunitense; Robert Woodrow Wilson (1936–), astronomo e fisico statunitense.

³ Si veda [17].

16

SECONDO PRINCIPIO DELLA TERMODINAMICA.

16.1 RENDIMENTO DI UN CICLO TERMODINAMICO.

Si consideri un sistema termodinamico che compia una trasformazione ciclica, composta da un numero finito di trasformazioni elementari, nel corso della quale viene compiuto un lavoro meccanico \mathcal{L} a spese del calore \mathcal{Q} scambiato con l'ambiente esterno. Un simile dispositivo prende il nome di **macchina termica**. Sia \mathcal{Q}_a la quantità di calore complessivamente assorbita dal sistema e \mathcal{Q}_c quella ceduta. Si ricordi che, secondo le convenzioni adottate, vale $\mathcal{Q}_a > 0$ e $\mathcal{Q}_c < 0$. Per definizione la quantità di calore scambiata dal sistema durante il ciclo è data da $\mathcal{Q} = \mathcal{Q}_a + \mathcal{Q}_c$. Per misurare l'efficacia della trasformazione nel convertire in lavoro il calore fornito al sistema si introduce il parametro η (eta) detto **rendimento** di un ciclo termodinamico (ovvero di una macchina termica):

$$\boxed{\eta = \frac{\mathcal{L}}{\mathcal{Q}_a}} . \quad (16.1)$$

Ricordando principio di equivalenza per il quale, per una trasformazione ciclica vale $\mathcal{Q} = \mathcal{L}$, si trova

$$\eta = \frac{\mathcal{L}}{\mathcal{Q}_a} = \frac{\mathcal{Q}}{\mathcal{Q}_a} = \frac{\mathcal{Q}_a + \mathcal{Q}_c}{\mathcal{Q}_a} = 1 + \frac{\mathcal{Q}_c}{\mathcal{Q}_a} . \quad (16.2)$$

Il rendimento è il rapporto di due grandezze omogenee: è quindi adimensionale.

\mathcal{L} e \mathcal{Q} sono quantità positive, il loro rapporto è pertanto un numero positivo, quindi $\eta \geq 0$. Inoltre \mathcal{Q}_c e \mathcal{Q}_a hanno segno discorde pertanto il loro rapporto è negativo: quindi $\eta \leq 1$. Combinando questi due fatti si ottiene:

$$0 \leq \eta \leq 1 . \quad (16.3)$$

Quindi una macchina termica ha rendimento 1 quando tutto il calore assorbito viene trasformato in lavoro; ha invece rendimento zero quando tutto il calore assorbito viene ceduto senza ottenere alcun lavoro. È importante osservare che per ottenere la (16.3) è stato usato soltanto il principio di equivalenza.

Quanto detto sinora vale per qualunque ciclo composto da trasformazioni quasistatiche, cioè sia per cicli reversibili che per cicli irreversibili.

16.2 RENDIMENTO DI UN CICLO DI CARNOT.

Si consideri un sistema termodinamico costituito da n moli di un gas perfetto che compia un ciclo di trasformazioni scambiando calore *soltanto* con due sorgenti termiche, a temperature T_1 e T_2 con $T_1 < T_2$. L'evoluzione del sistema è dunque descritta da due trasformazioni isoterme. Durante le fasi intermedie, di passaggio da un'isoterma all'altra, il sistema non deve scambiare calore con altre sorgenti; quindi la sua evoluzione è descritta da due trasformazioni adiabatiche. Un ciclo termodinamico così definito prende il nome di **ciclo di Carnot**¹ operante fra le temperature T_1 e T_2 (si veda la figura 16.1). Se le trasformazioni del ciclo sono reversibili il ciclo è detto *ciclo di Carnot reversibile*.

Si osservi, che, fissate le temperature T_1 e T_2 , vi è un numero illimitato di cicli di Carnot operanti fra di esse: basta connettere le due isoterme con delle adiabatiche differenti.

Si calcoli dunque il rendimento per un ciclo di Carnot operante fra le temperature T_1 e T_2 : esso

¹ Sadi Carnot (1796-1832), matematico e fisico francese.

è composto da quattro trasformazioni elementari (figura 16.1), per ognuna delle quali è facile calcolare il lavoro compiuto ed il calore scambiato.

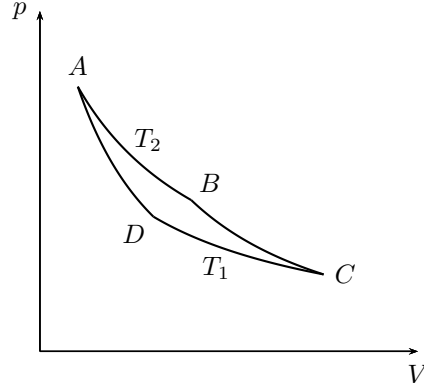


Figura 16.1: Il ciclo di Carnot.

Se il ciclo è percorso in senso orario il lavoro è fatto sull'esterno ed è quindi positivo.
 $A \rightarrow B$ espansione isoterma.

$$\mathcal{L}_{A \rightarrow B} = \mathcal{Q}_{A \rightarrow B} = nRT_2 \log \frac{V_B}{V_A} > 0, \quad (16.4)$$

ove la disuguaglianza deriva dal fatto che $V_B > V_A$.

$B \rightarrow C$ espansione adiabatica.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{B \rightarrow C} &= -nC_V \Delta T = -nC_V(T_1 - T_2) = nC_V(T_2 - T_1) > 0 \\ \mathcal{Q}_{B \rightarrow C} &= 0, \end{aligned} \quad (16.5)$$

dove la disuguaglianza deriva dal fatto che $T_2 > T_1$.

$C \rightarrow D$ compressione isoterma.

$$\mathcal{L}_{C \rightarrow D} = \mathcal{Q}_{C \rightarrow D} = nRT_1 \log \frac{V_D}{V_C} < 0 \quad (16.6)$$

dove la disuguaglianza deriva dal fatto che $V_D < V_C$.

$D \rightarrow A$ compressione adiabatica.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{D \rightarrow A} &= -nC_V \Delta T = -nC_V(T_2 - T_1) = -\mathcal{L}_{B \rightarrow C} < 0 \\ \mathcal{Q}_{D \rightarrow A} &= 0, \end{aligned} \quad (16.7)$$

dove la disuguaglianza deriva dal fatto che $T_2 > T_1$.

Quindi, osservando che $\mathcal{L}_{D \rightarrow A} = -\mathcal{L}_{B \rightarrow C}$, si trova

$$\mathcal{Q}_a = \mathcal{Q}_{A \rightarrow B} = nRT_2 \log \frac{V_B}{V_A}, \quad (16.8)$$

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{A \rightarrow B} + \mathcal{L}_{B \rightarrow C} + \mathcal{L}_{C \rightarrow D} + \mathcal{L}_{D \rightarrow A} = nRT_2 \log \frac{V_B}{V_A} + nRT_1 \log \frac{V_D}{V_C}, \quad (16.9)$$

L'ultima relazione può essere resa più semplice e maneggevole utilizzando la seguente proprietà la cui dimostrazione viene lasciata al lettore studioso, che si gioverà dell'equazione (15.47):

$$\frac{V_D}{V_C} = \frac{V_A}{V_B}. \quad (16.10)$$

Sostituendo la (16.10) nella (16.9), si ottiene:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= nRT_2 \log \frac{V_B}{V_A} + nRT_1 \log \frac{V_A}{V_B} = nRT_2 \log \frac{V_B}{V_A} - nRT_1 \log \frac{V_B}{V_A} = \\ &= nR(T_2 - T_1) \log \frac{V_B}{V_A}. \end{aligned} \quad (16.11)$$

Confrontando questa equazione con la (16.8), si trova:

$$\eta = \frac{\mathcal{L}}{\mathcal{Q}_a} = \frac{nR(T_2 - T_1) \log \frac{V_B}{V_A}}{nRT_2 \log \frac{V_B}{V_A}} = \frac{T_2 - T_1}{T_2} = 1 - \frac{T_1}{T_2}. \quad (16.12)$$

In conclusione si ottiene

$$\boxed{\eta = 1 - \frac{T_1}{T_2}}. \quad (16.13)$$

Il rendimento di un ciclo di Carnot, quindi, dipende solo dalle temperature T_1 e T_2 alle quali avvengono le trasformazioni isoterme e non da quali siano le trasformazioni adiabatiche che le collegano.

Inoltre si noti che in nessun punto del calcolo del rendimento si è usato il concetto di trasformazione reversibile. Pertanto l'equazione (16.13) vale *sia* per un ciclo di Carnot reversibile *sia* per un ciclo di Carnot irreversibile.

16.3 MACCHINE FRIGORIFERE.

Una macchina frigorifera può essere schematizzata come un sistema termodinamico che compie una trasformazione ciclica con le seguenti caratteristiche:

- i. viene compiuto lavoro dall'esterno *sul* sistema;
- ii. una quantità di calore \mathcal{Q}_1 viene assorbita da una sorgente a temperatura T_1 e una quantità di calore \mathcal{Q}_2 viene ceduta ad una sorgente a temperatura T_2 e vale $T_2 > T_1$.

Si definisce **efficienza** ζ di una macchina frigorifera il rapporto $-\mathcal{Q}_1/\mathcal{L}$. Il segno meno viene introdotto per ottenere una quantità positiva, dato che $\mathcal{Q}_1 > 0$ ed $\mathcal{L} < 0$. Nel caso particolare di un ciclo di Carnot reversibile percorso in senso inverso, tale rapporto dipende solo da T_1 e da T_2 . Infatti

$$\zeta = -\frac{\mathcal{Q}_1}{\mathcal{L}} = \frac{\mathcal{Q}_2}{\mathcal{L}} \left(-\frac{\mathcal{Q}_1}{\mathcal{Q}_2} \right) = \frac{T_2}{T_2 - T_1} \cdot \frac{T_1}{T_2} = \frac{T_1}{T_2 - T_1}, \quad (16.14)$$

dove, nel terzo passaggio, è stato usato il fatto che, per un ciclo di Carnot valgono:

$$\frac{\mathcal{L}}{\mathcal{Q}_2} = 1 - \frac{T_1}{T_2} \quad \text{e} \quad -\frac{\mathcal{Q}_1}{\mathcal{Q}_2} = \frac{T_1}{T_2}. \quad (16.15)$$

16.4 SECONDO PRINCIPIO DELLA TERMODINAMICA.

Il secondo principio della termodinamica esprime l'*irreversibilità dei fenomeni termici*: è una formalizzazione di fatti sperimentali di cui si trova riscontro anche nella nostra esperienza comune. Tradizionalmente, viene presentato in due forme (enunciati), ognuna delle quali è correlata a due insiemi di fatti ben distinto dall'altro.

Il primo fa riferimento allo storico problema (diventato fondamentale nel corso della Rivoluzione Industriale) di determinare il rendimento delle macchine termiche e alla riconosciuta impossibilità di avere macchine con rendimento pari a 1. Questo tipo di dati sperimentali può essere riportato alla seguente affermazione.

Non esiste alcuna macchina termica tale da convertire in lavoro tutto il calore assorbito da un'unica sorgente.

Il secondo si riferisce alla esperienza molto più quotidiana secondo cui il calore passa da corpi più caldi a corpi più freddi, mentre non accade mai il contrario: una tazza di caffè si raffredda disperdendo il proprio calore nell'aria circostante che, sebbene di poco, aumenta la propria temperatura; non accade che mai che l'aria si raffreddi per scaldare ulteriormente il caffè nella tazza. Questo tipo di fenomeni può essere riportato alla seguente affermazione.

Il passaggio di calore da un corpo 'freddo' ad un corpo 'caldo', non è un processo spontaneo.

Questi fatti attestano un carattere di *irreversibilità* dei fenomeni termici; è una loro caratteristica peculiare: un tale carattere non compare nel quadro teorico della meccanica newtoniana, le cui leggi del moto sono esplicitamente indipendenti dal verso in cui i processi si svolgono, né all'interno della fenomenologia cui la meccanica sia applicabile. È naturale chiedersi quindi se non sia desumibile da essi un unico 'principio' fisico. A questo scopo, è opportuno riformulare entrambe le osservazioni riferite sopra usando un linguaggio comune, in modo da poter confrontare il loro contenuto.

Il primo insieme di dati sperimentali è formalizzato dall'**enunciato di Kelvin**.

Un sistema termodinamico non può compiere una trasformazione ciclica in cui il calore assorbito da un'unica sorgente sia interamente convertito in lavoro compiuto sull'ambiente esterno.

Il secondo insieme di dati sperimentali è formalizzato dall'**enunciato di Clausius**

Un sistema termodinamico non può compiere una trasformazione ciclica in cui il calore assorbito da un'unica sorgente a temperatura T_1 sia interamente ceduto ad una sorgente a temperatura $T_2 > T_1$.

16.5 EQUIVALENZA DEGLI ENUNCIATI DI CLAUSIUS E KELVIN.

L'equivalenza viene stabilita mostrando che gli enunciati si implicano reciprocamente. Ognuna di queste dimostrazioni procede per contrapposizione.

Clausius \Rightarrow Kelvin. Si supponga che sia falso l'enunciato di Kelvin e che quindi esista una macchina termica M_1 in grado di compiere una trasformazione ciclica in cui tutto il calore assorbito da un'unica sorgente a temperatura T_1 sia interamente convertibile in lavoro meccanico \mathcal{L} . Tale lavoro può essere utilizzato per far funzionare una macchina frigorifera M_2 che operi fra le temperature T_1 e T_2 con $T_2 > T_1$ (si veda la figura 16.2). L'insieme delle due macchine $M_1 + M_2$ compie quindi una trasformazione ciclica in cui tutto il calore $Q + Q'$ assorbito dalla sorgente a temperatura T_1 è *interamente* ceduto ad una sorgente a temperatura $T_2 > T_1$ in violazione dell'enunciato di Clausius.

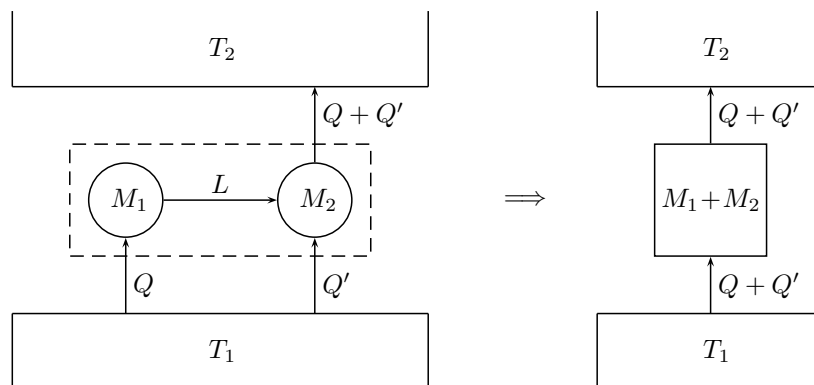


Figura 16.2: L'enunciato di Clausius implica l'enunciato di Kelvin.

Kelvin \Rightarrow Clausius. Si supponga che sia falso l'enunciato di Clausius e che quindi esista una macchina M_1 in grado di compiere una trasformazione ciclica in cui tutto il calore Q assorbito da un'unica sorgente a temperatura T_1 sia interamente ceduto ad una sorgente a temperatura $T_2 > T_1$. Si consideri poi una macchina termica M_2 che lavori fra le temperature T_1 e T_2 , assorbendo il calore Q' tale che il calore ceduto alla sorgente alla temperatura inferiore sia esattamente uguale a Q (si veda la figura 16.3). L'insieme delle due trasformazioni $M_1 + M_2$ quindi compie una trasformazione ciclica tale che tutto il calore $Q + Q'$ assorbito dalla sorgente a temperatura

T_2 viene convertito in lavoro: infatti la quantità di calore netta scambiata con la sorgente T_1 è zero. Questo viola l'enunciato di Kelvin. I due enunciati di Kelvin e Clausius, benché equivalenti, sono diversi; è quindi necessario esaminare quale sia il contenuto fisico comune che va sotto il nome di **secondo principio della termodinamica**.

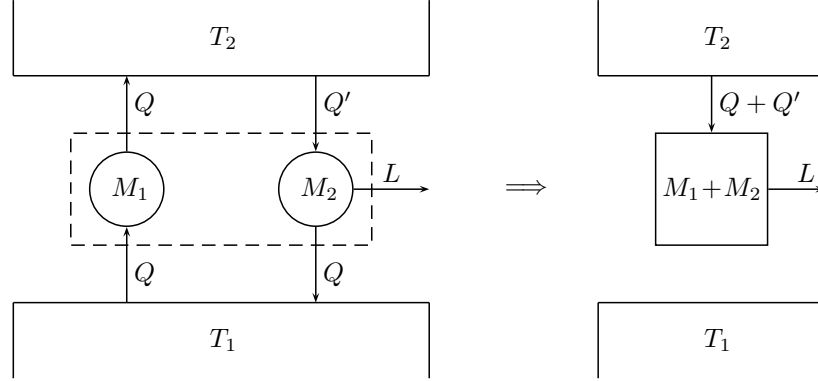


Figura 16.3: L'enunciato di Kelvin implica l'enunciato di Clausius.

Entrambi gli enunciati sono di tipo negativo, dicono cioè che un certo processo non può avvenire; mentre i processi opposti sono perfettamente leciti: è possibile trasformare interamente il lavoro in calore (per esempio per attrito) ed è possibile che una certa quantità di calore fluisca da un corpo più caldo a uno più freddo. Il secondo principio quindi si può enunciare nel modo seguente.

I processi fisici non sono reversibili, ma avvengono spontaneamente in un solo verso.

Il concetto di entropia, che verrà trattato fra qualche pagina, formalizza anche quantitativamente quanto qui è solo abbozzato.

16.5.1 MOTO PERPETUO DI SECONDA SPECIE

Si dice moto *perpetuo di seconda specie* quello prodotto da una macchina in grado di convertire in lavoro tutto il calore assorbito ed utilizzare tale lavoro per il proprio funzionamento.

Una tale macchina è impossibile poiché viola il secondo principio della termodinamica nell'enunciato di Kelvin.

16.6 TEOREMA DI CARNOT.

Enunciato.

Siano M ed R due macchine cicliche che scambino calore soltanto con due sorgenti a temperatura T_1 e T_2 con $T_1 < T_2$. Sia R reversibile. Allora $\eta_M \leq \eta_R$; se anche M è reversibile vale l'uguaglianza $\eta_M = \eta_R$.

Dimostrazione.

Si inverte la macchina reversibile R e si regolino le due macchine in modo che tutto il lavoro prodotto da M sia utilizzato da R (si veda il primo grafico in figura).

Durante il ciclo, la macchina M scambia una quantità di calore Q_1^M con la sorgente a temperatura T_1 ed una quantità di calore Q_2^M con la sorgente a temperatura T_2 mentre il sistema R scambia una quantità di calore Q_1^R con la sorgente a temperatura T_1 ed una quantità di calore Q_2^R con la sorgente a temperatura T_2 . L'unione delle due macchine cicliche è una macchina ciclica che ha come unico effetto quello di trasferire calore fra le sorgenti 1 e 2 (si veda il secondo grafico della figura 16.4).

Per l'enunciato di Clausius del secondo principio della termodinamica, applicato alla macchina ciclica $M + R$, la sorgente 2, che ha una temperatura maggiore della sorgente 1, non può assorbire calore e quindi deve essere

$$Q_2^M + Q_2^R \geq 0, \quad (16.16)$$

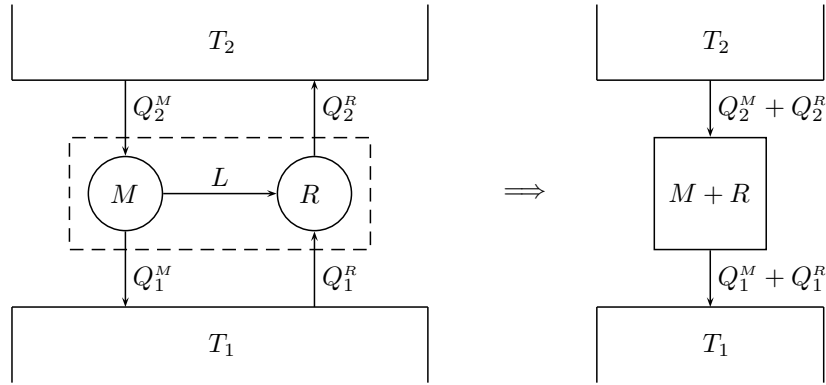


Figura 16.4: Il teorema di Carnot.

cioè

$$Q_2^M \geq -Q_2^R \quad (16.17)$$

che si può anche scrivere

$$\frac{1}{Q_2^M} \leq \frac{1}{-Q_2^R} . \quad (16.18)$$

Si osservi inoltre che vale

$$\mathcal{L}^M = -\mathcal{L}^R \geq 0 , \quad (16.19)$$

Moltiplicando (16.18) per (16.19) membro a membro (si noti che il verso della disuguaglianza non cambia e che i due segni meno nel membro di destra si semplificano) si ottiene

$$\frac{\mathcal{L}^M}{Q_2^M} \leq \frac{\mathcal{L}^R}{Q_2^R} , \quad (16.20)$$

quindi

$$\eta_M = \frac{\mathcal{L}^M}{Q_2^M} \leq \frac{\mathcal{L}^R}{Q_2^R} = \eta_R , \quad (16.21)$$

da cui segue

$$\boxed{\eta_M \leq \eta_R} \quad (16.22)$$

che è ciò che si doveva dimostrare.

Se anche M è reversibile, si usa lo stesso argomento invertendo la macchina M ottenendo $\eta_R \leq \eta_R$ che, unita alla (16.22), dà

$$\boxed{\eta_M = \eta_R} . \quad (16.23)$$

Dall'equazione (16.23) segue immediatamente che tutti i cicli reversibili hanno lo stesso rendimento η_R .

Si noti inoltre che un ciclo di Carnot reversibile, operante fra due sorgenti a temperature T_1 e T_2 tali che $T_1 < T_2$, scambia calore *soltanto* con queste due sorgenti. Esso è quindi un esempio del tipo di cicli che, nel teorema del paragrafo precedente, sono stati identificati con la lettera R . Quindi visto che il rendimento di un ciclo di Carnot reversibile è dato dall'equazione (16.13), si può concludere, vista la precedente osservazione, che il rendimento di *qualunque* macchina termica reversibile operante fra le temperature T_1 e $T_2 > T_1$ è dato da

$$\boxed{\eta_R = 1 - \frac{T_1}{T_2}} . \quad (16.24)$$

Infine si osservi che il teorema di Carnot afferma che il rendimento di un ciclo irreversibile, operante fra le temperature T_1 e T_2 , non può essere maggiore di η_R . Questo non significa affatto che non possa essere uguale. Ad esempio si è dimostrato che il rendimento di un ciclo di Carnot è η_R anche nel caso irreversibile. Esiste quindi la possibilità teorica di costruire cicli irreversibili il cui rendimento sia η_R .

16.7 DISUGUAGLIANZA DI CLAUSIUS.

Sia data una macchina termica M , operante *soltanto* con due sorgenti a temperature T_1 e T_2 con $T_2 > T_1$. Durante il ciclo, il sistema scambia una quantità di calore Q_1 con la sorgente a temperatura T_1 ed una quantità di calore Q_2 con la sorgente a temperatura T_2 . Sia poi R un ciclo reversibile operante con le stesse sorgenti: come vista sopra, il suo rendimento è:

$$\eta_R = 1 - \frac{T_1}{T_2} . \quad (16.25)$$

Il teorema di Carnot stabilisce che

$$\eta_M = 1 + \frac{Q_1}{Q_2} \leq \eta_R = 1 - \frac{T_1}{T_2} . \quad (16.26)$$

Confrontando il secondo e l'ultimo membro di questa equazione si ottiene

$$\frac{Q_1}{Q_2} \leq -\frac{T_1}{T_2} , \quad (16.27)$$

Da cui segue la **disuguaglianza di Clausius** (si noti che $T_1 > 0$ e $Q_2 > 0$):

$$\boxed{\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} \leq 0} . \quad (16.28)$$

In particolare, se la macchina termica M è reversibile, nelle tre disequazioni precedenti vale il segno di uguaglianza e quindi

$$\boxed{\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} = 0} . \quad (16.29)$$

L'espressione che si trova a primo membro della disuguaglianza di Clausius si dice **somma di Clausius**.

La disuguaglianza di Clausius vale per qualsiasi ciclo termodinamico che scambi calore *soltanto* con *due* sorgenti termiche.

La disuguaglianza di Clausius fornisce una condizione *teorica* sufficiente per stabilire se un ciclo termodinamico sia irreversibile.

Se un ciclo termodinamico che scambi calore soltanto con due sorgenti termiche è reversibile la sua somma di Clausius è nulla. Equivalentemente, se la sua somma di Clausius è negativa allora è irreversibile.

Non è sempre vero il contrario: un ciclo irreversibile, operante soltanto fra due sorgenti di calore a temperature T_1 e T_2 , può avere somma di Clausius nulla; per esempio il ciclo di Carnot irreversibile, il cui rendimento è dato dall'equazione (16.25), ha somma di Clausius nulla.

16.8 DEFINIZIONE OPERATIVA DELLA TEMPERATURA ASSOLUTA.

Si supponga di avere una macchina termica reversibile R che lavori fra le temperature T_0 e T ; dal teorema di Carnot è noto che il rendimento di R è dato da

$$\eta = 1 + \frac{Q_0}{Q} = 1 - \frac{T_0}{T} , \quad (16.30)$$

da cui si ricava facilmente

$$\frac{T_0}{T} = -\frac{Q_0}{Q} \quad \Longrightarrow \quad T = -\frac{Q}{Q_0} T_0 ; \quad (16.31)$$

quest'ultima relazione può essere interpretata come una definizione operativa della temperatura assoluta. Data infatti una sorgente termica alla temperatura di riferimento T_0 , per esempio quella del ghiaccio fondente alla pressione di una atmosfera, la temperatura T di una sorgente termica incognita si può misurare per mezzo di una macchina reversibile che lavori fra le due sorgenti scambiando il calore Q_0 con la sorgente a temperatura T_0 ed il calore Q con la sorgente a temperatura T . La misura di tali calori fornisce, tramite la (16.31), la misura della temperatura incognita T .

La rilevanza teorica di tale definizione sta nel fatto che la sua determinazione è indipendente dalla sostanza termometrica usata nella macchina termica.

16.8.1 INACCESSIBILITÀ DELLO ZERO ASSOLUTO

Non è possibile raffreddare un corpo di capacità termica C da una temperatura iniziale T_1 fino alla temperatura $T = 0$. Per convincersi di questo fatto si consideri una macchina frigorifera reversibile che lavori tra il corpo in questione e l'ambiente esterno supposto di capacità termica infinita e quindi a temperatura costante T_0 .

Allora durante il primo ciclo la macchina frigorifera assorbe dal corpo la quantità di calore² $Q^{[1]}$ e cede all'ambiente esterno la quantità di calore $Q_0^{[1]}$ e vale la relazione

$$Q^{[1]} = \frac{T_1}{T_0} Q_0^{[1]} ; \quad (16.32)$$

il corpo quindi passa alla nuova temperatura

$$T_2 = T_1 - \frac{Q^{[1]}}{C} = T_1 - \frac{T_1}{T_0} \frac{Q_0^{[1]}}{C} = \left(1 - \frac{Q_0^{[1]}}{CT_0}\right) T_1 . \quad (16.33)$$

Nel secondo ciclo la macchina lavora fra il corpo a temperatura T_2 e l'esterno a temperatura T_0 ; assorbe il calore $Q^{[2]}$ dal corpo e cede all'esterno il calore $Q_0^{[2]}$ e vale la relazione

$$Q^{[2]} = \frac{T_2}{T_0} Q_0^{[2]} ; \quad (16.34)$$

la nuova temperatura del corpo quindi è

$$T_3 = T_2 - \frac{Q^{[2]}}{C} = T_2 - \frac{T_2}{T_0} \frac{Q_0^{[2]}}{C} = \left(1 - \frac{Q_0^{[2]}}{CT_0}\right) T_2 = \left(1 - \frac{Q_0^{[1]}}{CT_0}\right) \left(1 - \frac{Q_0^{[2]}}{CT_0}\right) T_1 . \quad (16.35)$$

Dopo n cicli la temperatura del corpo diventa

$$T_n = \left(1 - \frac{Q_0^{[1]}}{CT_0}\right) \cdots \left(1 - \frac{Q_0^{[n]}}{CT_0}\right) T_1 . \quad (16.36)$$

Evidentemente, la temperatura all'aumentare di n diventa sempre più piccola, ma non può annullarsi; non è infatti possibile ottenere zero moltiplicando per un numero finito di fattori non nulli. Quindi la temperatura dello zero assoluto non è raggiungibile mediante una macchina frigorifera reversibile.

16.9 FORMA GENERALE DELLA DISUGUAGLIANZA DI CLAUSIUS.

La disuguaglianza di Clausius può essere generalizzata a trasformazioni cicliche qualsiasi (cioè tali da scambiare calore con un numero arbitrario di sorgenti termiche). Questa generalizzazione

² Limitatamente a questa sezione, le quantità di calore sono considerate in valore assoluto e quindi positive.

permette di allargare il campo di validità della condizione di irreversibilità appena enunciata, e costituisce un passo fondamentale in vista dell'introduzione del concetto di *entropia*.

Nel caso in cui la trasformazione ciclica in esame scambi le quantità di calore indicate mediante Q_1, Q_2, \dots, Q_n con un numero finito n di sorgenti termiche a temperature T_1, T_2, \dots, T_n , la disuguaglianza di Clausius si scrive nella forma seguente

$$\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} + \dots + \frac{Q_n}{T_n} \equiv \sum_{i=1}^n \frac{Q_i}{T_i} \leq 0. \quad (16.37)$$

Dimostrazione.

Si consideri una trasformazione ciclica che scambi calore con un numero di sorgenti termiche finito ma maggiore di due. Come è stato osservato in precedenza, questo implica che il ciclo in questione composto soltanto da una successione di adiabatiche ed isoterme. Per dimostrare la relazione (16.37), si 'completi' (figura 16.6) il ciclo in esame sino ad ottenere un singolo ciclo di Carnot operante fra le temperature T_1 e T_n . Si utilizzano a questo scopo di una serie di cicli di Carnot *reversibili* ausiliari con le seguenti caratteristiche (qui e nel resto della dimostrazione si farà sempre riferimento, per semplicità, al caso schematizzato nelle figure 16.5 e 16.6, con $n = 4$; la dimostrazione si estende al caso generale senza nessuna variazione rilevante).

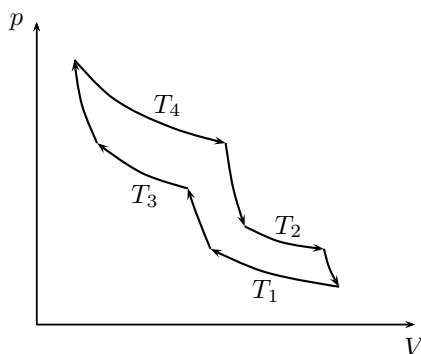


Figura 16.5: Dimostrazione della disuguaglianza di Clausius.

Il ciclo 2 opera fra le temperature T_2 e T_4 . Esso scambia con la sorgente a temperatura T_2 esattamente la quantità di calore $-Q_2$ e con la sorgente a temperatura T_4 una quantità di calore che viene indicata $Q_2^{[4]}$. Il ciclo 3 opera tra le temperature T_3 e T_1 . Esso scambia con la sorgente a temperatura T_3 esattamente la quantità di calore $-Q_3$ e con la sorgente a temperatura T_1 una quantità di calore che viene indicata $Q_3^{[1]}$.

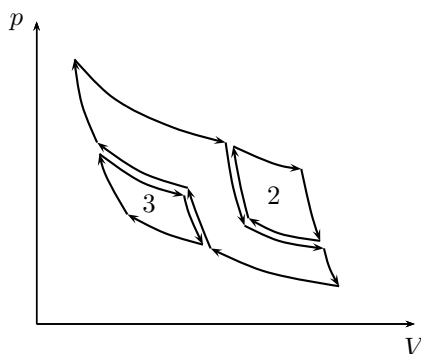


Figura 16.6: Introduzione dei due cicli ausiliari.

Si sottoponga ora il sistema alla trasformazione ciclica schematizzata in figura 16.6 che utilizza il ciclo di base ed i due cicli ausiliari. È fondamentale notare come ora il sistema scambi con la sorgente a temperatura T_2 la quantità di calore $Q_2(\text{ciclo di base}) - Q_2(\text{ciclo ausiliario}) = 0$. Similmente, esso scambia con la sorgente a temperatura T_3 la quantità di calore $Q_3(\text{ciclo di base}) - Q_3(\text{ciclo ausiliario}) = 0$. Il ciclo composto dal ciclo di base più i due cicli ausiliari dunque scambia calore *soltanto* con le sorgenti a temperatura T_1 e T_4 . In conclusione, si ottiene, utilizzando i cicli reversibili ausiliari, un singolo ciclo di

Carnot, compiendo il quale il sistema termodinamico scambia una quantità di calore $Q_1 + Q_3^{[1]}$ con la sorgente a temperatura T_1 ed una quantità di calore $Q_2^{[4]} + Q_4$ con la sorgente a temperatura T_4 . Per questo ciclo vale quindi la disuguaglianza di Clausius (16.28) nella forma

$$\frac{(Q_1 + Q_3^{[1]})}{T_1} + \frac{(Q_2^{[4]} + Q_4)}{T_4} \leq 0. \quad (16.38)$$

Si noti ora che i cicli ausiliari sono reversibili e quindi per ognuno di essi vale l'equazione (16.29):

$$\frac{Q_3^{[1]}}{T_1} - \frac{Q_3}{T_3} = 0, \quad \frac{Q_2^{[4]}}{T_4} - \frac{Q_2}{T_2} = 0, \quad (16.39)$$

(si noti il segno meno dovuto al fatto che i cicli ausiliari 2 e 3 scambiano le quantità di calore $-Q_2$ e $-Q_3$ con le rispettive sorgenti a temperature T_2 e T_3) e cioè

$$\frac{Q_3^{[1]}}{T_1} = \frac{Q_3}{T_3}, \quad \frac{Q_2^{[4]}}{T_4} = \frac{Q_2}{T_2}. \quad (16.40)$$

È ora possibile dimostrare che vale la disequazione (16.37), ristretta al caso $n = 4$, e cioè

$$\sum_{i=1}^4 \frac{Q_i}{T_i} \leq 0. \quad (16.41)$$

Si consideri a questo scopo la somma che si trova al primo membro:

$$\sum_{i=1}^4 \frac{Q_i}{T_i} = \frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} + \frac{Q_3}{T_3} + \frac{Q_4}{T_4}. \quad (16.42)$$

Utilizzando le equazioni (16.40) si ottiene

$$\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} + \frac{Q_3}{T_3} + \frac{Q_4}{T_4} = \frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2^{[4]}}{T_4} + \frac{Q_3^{[1]}}{T_1} + \frac{Q_4}{T_4} \quad (16.43)$$

che, raccogliendo i denominatori comuni, si può scrivere:

$$\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} + \frac{Q_3}{T_3} + \frac{Q_4}{T_4} = \frac{(Q_1 + Q_3^{[1]})}{T_1} + \frac{(Q_2^{[4]} + Q_4)}{T_4}. \quad (16.44)$$

E quindi, usando la disequazione (16.38),

$$\sum_{i=1}^4 \frac{Q_i}{T_i} = \frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} + \frac{Q_3}{T_3} + \frac{Q_4}{T_4} = \frac{(Q_1 + Q_3^{[1]})}{T_1} + \frac{(Q_2^{[4]} + Q_4)}{T_4} \leq 0, \quad (16.45)$$

cioè

$$\sum_{i=1}^4 \frac{Q_i}{T_i} \leq 0 \quad (16.46)$$

che è quanto si voleva dimostrare. La dimostrazione ora effettuata si estende al caso $n > 4$ sulle stesse linee argomentative, aumentando il numero di trasformazioni ausiliarie necessarie.

È possibile dimostrare in tutta generalità che la relazione (16.37) è valida per qualsiasi trasformazione ciclica.

Il sussistere della disuguaglianza di Clausius per un ciclo arbitrario permette di estendere la condizione *teorica* di irreversibilità, visto alla sezione 16.7 per cicli operanti soltanto fra due sorgenti termiche a temperature T_1 e T_2 , ad un ciclo arbitrario.

Se un ciclo termodinamico che scambi calore con un numero arbitrario di sorgenti termiche è reversibile la sua somma di Clausius è nulla. Equivalentemente, se la sua somma di Clausius è negativa, il ciclo è irreversibile.

16.10 UNA CONSEGUENZA DELLA DISUGUAGLIANZA DI CLAUSIUS.

Come conseguenza della forma generale della disuguaglianza di Clausius (16.37) si dimostra la seguente proposizione, che estende a cicli termodinamici arbitrari il risultato del teorema di Carnot.

Sia M una macchina ciclica che scambi calore con un numero arbitrario di sorgenti termiche. Sia T_1 la minima fra le temperature delle sorgenti con cui la macchina ciclica viene in contatto e $T_n > T_1$ la massima fra queste temperature. Allora

$$\eta_M < 1 - \frac{T_1}{T_n} . \quad (16.47)$$

Si consideri un ciclo termodinamico qualsiasi (per semplicità ci si riferisce ad un ciclo composto da isoterme ed adiabatiche, utilizzando il risultato di approssimabilità più volte menzionato). Per esso vale la disuguaglianza di Clausius

$$\sum_{i=1}^n \frac{Q_i}{T_i} \leq 0 , \quad (16.48)$$

dove n è, il numero di isoterme presenti nel ciclo. Si scomponga la somma in due parti, la prima contenente addendi il cui numeratore sia positivo (quelli cioè associati a trasformazioni che *assorbono* una quantità di calore Q_i^a dalle rispettive sorgenti), la seconda contenente addendi il cui numeratore sia negativo (quelli cioè associati a trasformazioni che *cedono* una quantità di calore Q_i^c alle rispettive sorgenti):

$$\sum_{i=1}^n \frac{Q_i}{T_i} \equiv \sum \frac{Q_i^a}{T_i} + \sum \frac{Q_i^c}{T_i} \leq 0 . \quad (16.49)$$

La prima somma è interamente composta di addendi positivi, la seconda di addendi negativi. Per ipotesi, tutte le temperature T_i che compaiono a denominatore in ogni addendo sono:

i. minori di T_n , cioè: $T_i < T_n$, e quindi, per ogni $i \neq n$, vale

$$\frac{1}{T_i} > \frac{1}{T_n} ; \quad (16.50)$$

ii. maggiori di T_1 , cioè $T_i > T_1$, e quindi, per ogni $i \neq 1$, vale

$$\frac{1}{T_i} < \frac{1}{T_1} . \quad (16.51)$$

La condizione (16.50) implica immediatamente che

$$\sum \frac{Q_i^a}{T_i} > \sum \frac{Q_i^a}{T_n} , \quad (16.52)$$

mentre la condizione (16.51) implica che

$$\sum \frac{Q_i^c}{T_i} > \sum \frac{Q_i^c}{T_1} . \quad (16.53)$$

Sommando membro a membro le disuguaglianze (16.52) e (16.53) e usando la (16.49), si ottiene

$$\sum \frac{Q_i^a}{T_n} + \sum \frac{Q_i^c}{T_1} < \sum \frac{Q_i^a}{T_i} + \sum \frac{Q_i^c}{T_i} \leq 0 , \quad (16.54)$$

e quindi

$$\frac{\sum \mathcal{Q}_i^a}{T_n} + \frac{\sum \mathcal{Q}_i^c}{T_1} < 0 . \quad (16.55)$$

Da cui si ottiene immediatamente

$$\frac{\sum \mathcal{Q}_i^c}{T_1} < -\frac{\sum \mathcal{Q}_i^a}{T_n} . \quad (16.56)$$

Questa può essere riscritta nella forma

$$\frac{\sum \mathcal{Q}_i^c}{\sum \mathcal{Q}_i^a} < -\frac{T_1}{T_n} , \quad (16.57)$$

e di conseguenza, sommando 1 a entrambi i termini,

$$1 + \frac{\sum \mathcal{Q}_i^c}{\sum \mathcal{Q}_i^a} < 1 - \frac{T_1}{T_n} , \quad (16.58)$$

che può essere riscritta

$$1 + \frac{\sum \mathcal{Q}_i^c}{\sum \mathcal{Q}_i^a} = \frac{\sum \mathcal{Q}_i^a + \sum \mathcal{Q}_i^c}{\sum \mathcal{Q}_i^a} = \frac{\mathcal{L}}{\sum \mathcal{Q}_i^a} < 1 - \frac{T_1}{T_n} . \quad (16.59)$$

Il membro di sinistra della disuguaglianza è per definizione il rendimento η_M del ciclo M , e ne risulta ciò che si voleva dimostrare:

$$\eta_M < 1 - \frac{T_1}{T_n} = \eta_C . \quad (16.60)$$

Questo risultato vale indipendentemente dal fatto che M sia reversibile o irreversibile.

Si ricordi che il risultato, stabilito sopra, per cui, la somma di Clausius dà una condizione *teorica* all'irreversibilità di un ciclo: *se un ciclo termodinamico che scambi calore con un numero arbitrario di sorgenti termiche è reversibile la sua somma di Clausius è nulla*. È naturale chiedersi se, a partire da questo fatto, sia possibile una analoga caratterizzazione per trasformazioni reversibili *non cicliche*. In effetti ciò è possibile: in aggiunta, uno dei risultati intermedi di questa analisi mostra come la somma di Clausius associata ad una qualsiasi trasformazione *reversibile* sia una *funzione di stato*, dipenda cioè solo dallo stato iniziale e finale del sistema e non dalla trasformazione reversibile concretamente effettuata dal sistema per passare da uno stato all'altro. Questa osservazione, formalizzata e dimostrata nel seguente teorema, permette di introdurre il concetto di **entropia**, funzione dello stato del sistema le cui variazioni 'misurano' il grado di irreversibilità di una trasformazione: è fondamentale tener sempre presente il fatto che l'entropia è una funzione *matematica*, un ente teorico interno al formalismo termodinamico.

La dimostrazione seguente quindi mostra, per *qualsiasi* sistema termodinamico sottoposto ad una trasformazione *reversibile* dallo stato A allo stato B , l'*esistenza* di una funzione di stato S , senza che sia possibile fornire ulteriori informazioni sulla forma effettiva di S . Nel caso che il sistema termodinamico in questione sia un fluido semplice, tali informazioni sono desumibili, come si vedrà subito dopo, a partire dalla conoscenza della forma esplicita dell'equazione di stato e dell'equazione delle adiabatiche. Per ogni sistema termodinamico è calcolabile, a partire da un modello concreto, la funzione entropia corrispondente.

17.1 ESISTENZA DELLA FUNZIONE DI STATO s .

Vale il seguente teorema

Sia $A \rightarrow B$ una trasformazione reversibile arbitraria di un sistema termodinamico dallo stato A allo stato B . Allora esiste una funzione di stato S tale che

$$\boxed{\sum_{A \rightarrow B} \frac{Q}{T} = \Delta S}, \quad (17.1)$$

dove al primo membro figura la somma di Clausius della trasformazione e si definisca $\Delta S \equiv S(B) - S(A)$.

È opportuno premettere un'osservazione. La dimostrazione di questo teorema *molto importante* è identica a quella sviluppata per dimostrare l'esistenza dell'energia potenziale e della funzione di stato energia interna (si vedano le sezioni 5.1.4 e 15.1). Nondimeno si ripete qui la dimostrazione, adattata a questo caso, per mettere in evidenza l'unità di tecniche e metodi di analisi che caratterizza l'indagine nella fisica teorica.

Dimostrazione.

Si considerino un ciclo composto da due trasformazioni *reversibili* (si veda la figura 17.1) che connettano fra loro due stati di equilibrio A e B . Siano 1 e 2 le due trasformazioni e sia

$$\sum_1 \frac{Q}{T} \quad \text{e} \quad \sum_2 \frac{Q}{T} \quad (17.2)$$

le somme di Clausius relative alle due trasformazioni. L'intero ciclo (trasformazione 1 + 2) è reversibile e quindi la sua somma di Clausius è nulla:

$$\sum_{1+2} \frac{Q}{T} = 0 . \quad (17.3)$$

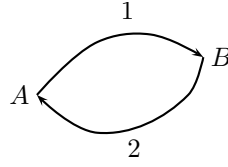


Figura 17.1: Le trasformazioni reversibili 1 e 2.

Si scomponga la somma di Clausius relativa al ciclo in due somme parziali: la prima relativa alla trasformazione $A \rightarrow B$ e la seconda relativa alla trasformazione $B \rightarrow A$:

$$\sum_{1+2} \frac{Q}{T} = \sum_1 \frac{Q}{T} + \sum_2 \frac{Q}{T} = 0 \quad (17.4)$$

e quindi

$$\sum_1 \frac{Q}{T} = - \sum_2 \frac{Q}{T} . \quad (17.5)$$

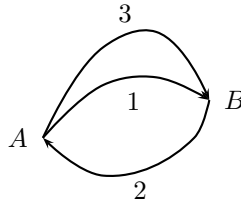


Figura 17.2: La trasformazione reversibile 3.

Si connettano ora i due stati A e B con una diversa trasformazione *reversibile*, indicata con 3, che sostituisca la trasformazione 1. Il ragionamento appena fatto porta a concludere, in questo caso, che

$$\sum_3 \frac{Q}{T} = - \sum_2 \frac{Q}{T} . \quad (17.6)$$

Confrontando le equazioni (17.5) ed (17.6), si ottiene

$$\sum_1 \frac{Q}{T} = \sum_3 \frac{Q}{T} . \quad (17.7)$$

Si noti ora che le trasformazioni utilizzate sono arbitrarie, e che l'ultima relazione scritta non contiene alcun riferimento alla trasformazione $B \rightarrow A$. Si potrebbe ripetere questo argomento per *qualsiasi* trasformazione *reversibile* che connetta gli stati A e B , arrivando alla conclusione che il valore della somma di Clausius per la trasformazione in questione è lo stesso che nel caso della trasformazione *reversibile* $A \rightarrow B$. Dunque il valore della somma di Clausius $\sum_{A \rightarrow B} Q/T$ è *indipendente* da quale trasformazione reversibile sia stata effettuata per passare dallo stato A allo stato B , restando inteso che questi due stati estremali vengano mantenuti *fissi*.

Se ne conclude che, fissati gli stati A e B , il valore della somma di Clausius calcolata per qualsiasi trasformazione *reversibile* che li connetta è una *funzione* dei soli stati A e B e non dalla trasformazione che li collega. Questo stato di cose si scrive formalmente nel modo seguente:

$$\sum_{A \rightarrow B} \frac{Q}{T} = S(A, B) , \quad (17.8)$$

dove $S(A, B)$ è una funzione da determinare.

Usando la (17.5), si ottiene

$$S(A, B) = -S(B, A) . \quad (17.9)$$

Si supponga ora di far evolvere in modo reversibile il sistema termodinamico dallo stato A allo stato B passando attraverso uno stato di riferimento intermedio R .

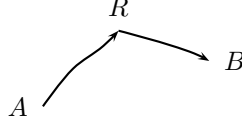


Figura 17.3: Lo stato R .

Tenendo presente l'equazione (17.8), si ottiene

$$\begin{aligned} S(A, B) &= \sum_{A \rightarrow R + R \rightarrow B} \frac{Q}{T} = \sum_{A \rightarrow R} \frac{Q}{T} + \sum_{R \rightarrow B} \frac{Q}{T} = \\ &= S(A, R) + S(R, B) . \end{aligned} \quad (17.10)$$

Applicando la (17.9) alla trasformazione $A \rightarrow R$ si ricava

$$S(A, R) = -S(R, A) . \quad (17.11)$$

Quest'ultima formula, sostituita nell'equazione (17.10), dà infine la relazione

$$S(A, B) = -S(R, A) + S(R, B) = S(R, B) - S(R, A) . \quad (17.12)$$

Fissando lo stato di riferimento R una volta per tutte si può omettere di indicarlo ogni volta nella funzione S e scrivere, ad esempio, $S(R, A) \equiv S(A)$. Quindi

$$S(A, B) = S(B) - S(A) . \quad (17.13)$$

Le equazioni (17.8) e (17.13) dicono: si faccia evolvere uno sistema termodinamico da uno stato di equilibrio A ad uno stato di equilibrio B per mezzo di una trasformazione *reversibile* arbitraria $A \rightarrow B$, allora esiste una funzione S (detta **entropia**) dello stato del sistema tale che, posto $\Delta S \equiv S(B) - S(A)$, valga la relazione

$$\sum_{A \rightarrow B} \frac{Q}{T} = \Delta S \quad (17.14)$$

che è ciò che si doveva dimostrare.

L'entropia ha le dimensioni di un'energia diviso una temperatura; quindi vale $[S] = [t]^{-1}[l][m][T]^{-1}$ e la sua unità di misura è J K^{-1} .

Come già osservato, S è una *funzione matematica*, e quindi *calcolabile* all'interno dell'apparato formale della teoria: è un *ente teorico* il cui valore numerico è dato in funzione del modello microscopico utilizzato. Questo fatto trova conferma in quel che segue. Si consideri l'equazione (17.13) appena scritta:

$$S(A, B) = S(B) - S(A) , \quad (17.15)$$

si è visto che $S(A, B)$ non dipende dalla particolare trasformazione che connette gli stati A e B e quindi neanche dallo stato di riferimento intermedio R . Le singole funzioni $S(A)$ ed $S(B)$, invece, dipendono dalla scelta di R . Solo fissandolo una volta per tutte è stato deciso di trascurarlo nell'espressione di $S(A)$ oppure di $S(B)$. Resta però il fatto che questa scelta è arbitraria, e non c'è nessun motivo per scegliere uno stato di riferimento R piuttosto che un altro. In altre parole, la scelta di R , e quindi il valore effettivo di S non sono *univocamente determinati* all'interno della teoria. Come già visto per l'energia interna, la funzione entropia è definita a meno di una costante additiva che può essere determinata fissando, arbitrariamente, l'entropia dello stato nullo.

La questione può essere analizzata più in dettaglio nel modo seguente. Si supponga di far evolvere il sistema termodinamico da A a B attraverso uno stato di riferimento intermedio R' , differente da R . Dunque si trova

$$S(A, B) = S(R, B) - S(R, A) = S(R', B) - S(R', A) \quad (17.16)$$

dato che $S(A, B)$ non dipende dalla scelta dello stato intermedio. Per calcolare la differenza tra $S(R, B)$ ed $S(R', B)$ si supponga di operare una trasformazione che porti il sistema dallo stato R allo stato B passando attraverso lo stato R' . Ripetendo lo stesso ragionamento visto sopra, si ottiene

$$S(R, B) = S(R, R') + S(R', B) \quad (17.17)$$

che si può scrivere, ponendo $S(R', B) \equiv S'(B)$, cioè chiamando S' la *differente* funzione S che abbia lo stato R' come stato intermedio di riferimento,

$$S(B) = S(R') + S'(B) \quad (17.18)$$

ovvero

$$S(B) - S'(B) = S(R') . \quad (17.19)$$

Una formula analoga vale per lo stato A :

$$S(A) - S'(A) = S(R') . \quad (17.20)$$

Se ne ricava che

$$S(B) - S'(B) = S(A) - S'(A) \quad \implies \quad S(B) - S(A) = S'(B) - S'(A) , \quad (17.21)$$

cioè utilizzando stati di riferimento diversi, i diversi valori dell'entropia che si ottengono differiscono fra di loro per la *stessa* quantità costante, nel nostro caso $S(R')$, il cui valore può essere scelto liberamente. Si è quindi giunti alla seguente proprietà.

L'entropia è definita a meno di una costante additiva.

La scelta di un determinato valore per la costante additiva, che la nostra analisi lascia indeterminata, è legata al modello microscopico utilizzato per il sistema in questione, ed in ultima analisi a questioni di comodità. Anche nel caso del fluido semplice il calcolo del valore della costante dell'entropia risulta molto complesso e non può essere sviluppato in questa sede. Nel seguito si considereranno *soltanto* al calcolo di *variazioni* di entropia, per il quale il valore della costante additiva risulta irrilevante.

Nel caso si voglia calcolare la variazione di entropia ΔS associata ad una trasformazione reversibile, è opportuno ricordare che S è una funzione di stato. La sua variazione è quindi indipendente dalla trasformazione *reversibile* che connette lo stato iniziale con quello finale. Ne consegue che, ai fini del calcolo di ΔS , sarà sufficiente utilizzare la trasformazione per la quale esso risulti più semplice.

17.2 ENTROPIA E IRREVERSIBILITÀ DI UNA TRASFORMAZIONE.

Si consideri una trasformazione $A \rightarrow B$ di un sistema termodinamico. La variazione $S(B) - S(A)$ di entropia è calcolabile ed è tale da uguagliare il valore della somma di Clausius della trasformazione, *nel caso che quest'ultima sia reversibile*.

È naturale chiedersi cosa accade se la trasformazione $A \rightarrow B$ è *irreversibile*.

- i. Il valore di $S(B) - S(A)$ resta invariato, dato che S è una funzione di stato, e dipende quindi solo dalla coppia di stati A e B e non dal fatto che la trasformazione che li congiunge sia, o meno, reversibile.
- ii. Il valore della somma di Clausius, invece, dipende in generale dalla trasformazione $A \rightarrow B$, dato che questa *non* è reversibile, e quindi non è possibile utilizzare la (17.1).

In effetti, si consideri un ciclo composto dalla trasformazione *irreversibile* $A \rightarrow B$ e dalla trasformazione *reversibile* $B \rightarrow A$. Il ciclo risulta complessivamente *irreversibile* e quindi la somma di Clausius ad esso associata non è più necessariamente uguale alla variazione di entropia ma vale la disuguaglianza di Clausius:

$$\sum_{A \rightarrow B + B \rightarrow A} \frac{Q}{T} \leq 0. \quad (17.22)$$

Ne risulta che

$$\sum_{A \rightarrow B} \frac{Q}{T} + \sum_{B \rightarrow A} \frac{Q}{T} \leq 0. \quad (17.23)$$

Poiché che la trasformazione $B \rightarrow A$ è reversibile per ipotesi, la sua somma di Clausius è uguale alla variazione di entropia:

$$\sum_{B \rightarrow A} \frac{Q}{T} = S(A) - S(B). \quad (17.24)$$

Utilizzando quest'equazione, la precedente disuguaglianza diviene

$$\sum_{A \rightarrow B} \frac{Q}{T} + S(A) - S(B) \leq 0 \quad (17.25)$$

e cioè

$$\boxed{\sum_{A \rightarrow B} \frac{Q}{T} \leq S(B) - S(A).} \quad (17.26)$$

Ne risulta quindi che la somma di Clausius di una trasformazione irreversibile che connetta uno stato A ad uno stato B di un sistema termodinamico è minore o uguale della differenza di entropia fra lo stato B e lo stato A . Si noti che, come trovato nel paragrafo precedente, la variazione di entropia uguaglia sempre la somma di Clausius nel caso di trasformazioni reversibili. Si ha quindi la seguente condizione di irreversibilità.

Se per una certa trasformazione la somma di Clausius è minore della variazione di entropia, la trasformazione in questione è certamente irreversibile.

Non è viceversa vero che per ogni trasformazione irreversibile la somma di Clausius è minore della variazione di entropia, valendo infatti il segno di minore od uguale.

Il risultato ora trovato ha la seguente immediata applicazione. Si consideri un sistema termodinamico *isolato*: per definizione, esso non scambia calore con l'ambiente esterno cioè $Q = 0$. Se il sistema compie una trasformazione, la sua somma di Clausius risulta dunque uguale a zero. Se la trasformazione è irreversibile si ricava allora dall'equazione (17.26) che

$$0 \leq S(B) - S(A) \quad (17.27)$$

e quindi

$$\boxed{S(A) \leq S(B).} \quad (17.28)$$

Se la trasformazione è reversibile, invece dall'equazione (17.14) si ricava che

$$0 = S(B) - S(A) \quad (17.29)$$

e quindi

$$\boxed{S(A) = S(B).} \quad (17.30)$$

Le relazioni (17.28) e (17.30) sono *fondamentali*: esse esprimono, in modo equivalente agli enunciati di Kelvin e Clausius, il **secondo principio della termodinamica** sotto la forma di **legge dell'aumento dell'entropia**.

L'entropia di un sistema isolato che compia una trasformazione fra due stati di equilibrio non può diminuire. Se la trasformazione compiuta è reversibile, la sua entropia si mantiene costante. Pertanto se l'entropia aumenta la trasformazione è certamente irreversibile.

Se la trasformazione che lega stato iniziale e finale di un sistema termodinamico è irreversibile per il calcolo della variazione dell'entropia non è possibile utilizzare la (17.1); tuttavia, poiché la variazione di entropia dipende solo dagli stati iniziale e finale, basta trovare una trasformazione reversibile che unisca i due stati e calcolare ΔS utilizzando la (17.1). Se ne vedranno degli esempi più sotto.

Le trasformazioni che avvengono in natura hanno un verso determinato e le trasformazioni inverse sono proibite; in altre parole le trasformazioni *reali* sono *tutte* irreversibili. Le trasformazioni reversibili sono un modello che è stato usato solo perché tramite di esse il concetto di entropia viene introdotto ed utilizzato in maniera molto semplice. Il verso nel quale avvengono le trasformazioni è quello dello scorrere del tempo (quello che in certa letteratura divulgativa è noto come “freccia del tempo”). Poiché lo svolgersi di una trasformazione è accompagnato da un aumento dell'entropia, si può concludere affermando che il tempo scorre nel verso in cui si svolgono i processi che implicano un aumento di entropia. Si osservi che solo per mezzo del secondo principio della termodinamica, e con del concetto di entropia che ne deriva, si ha una codificazione dello scorrere del tempo in una teoria fisica: nell'ambito della meccanica newtoniana, invece, tutti i processi sono reversibili.

17.3 ESEMPI.

GAS PERFETTO

Si supponga che un gas perfetto evolva da uno stato iniziale A ad uno stato finale B . Si vuole scrivere una formula che permetta di calcolare ΔS in tutti i casi possibili. Come visto sopra, la variazione di entropia ΔS è *indipendente* dalla trasformazione utilizzata per passare dallo stato iniziale a quello finale. Poiché per trasformazioni reversibili la variazione di entropia uguaglia la somma di Clausius, equazione (17.1), ai fini del calcolo dell'entropia è conveniente, come già osservato, collegare gli stati A e B mediante trasformazioni reversibili. Si sottolinea ancora una volta che il risultato finale *non* dipende dal carattere di reversibilità della trasformazione utilizzata nei calcoli, ma rimane valida nel caso generale dipendendo solo da A e B .

A e B si trovino su una stessa trasformazione adiabatica.

È il caso più semplice: la somma di Clausius è nulla perché una trasformazione adiabatica è definita dal fatto che $Q = 0$. Utilizzando una adiabatica reversibile, per cui la variazione di entropia uguaglia la somma di Clausius, si ottiene

$$\Delta S = 0 . \quad (17.31)$$

di conseguenza, l'entropia del sistema non varia; per questo motivo le trasformazioni adiabatiche sono anche dette *isoentropiche*.

A e B abbiano la stessa temperatura T .

Si osservi che è possibile collegare A e B mediante una trasformazione isoterma. Scegliendo una isoterma reversibile la variazione di entropia uguaglia la somma di Clausius. D'altra parte la somma di Clausius si riduce ad un solo addendo, Q/T , dove Q è il calore scambiato durante la trasformazione. Precedentemente è stato dimostrato che per una trasformazione isoterma, che sia o meno reversibile, vale

$$Q = \mathcal{L} = nRT \log \frac{V_B}{V_A} . \quad (17.32)$$

Dunque

$$\Delta S = \frac{Q}{T} = \frac{nRT \log \frac{V_B}{V_A}}{T} = nR \log \frac{V_B}{V_A} \quad (17.33)$$

e quindi

$$\Delta S = nR \log \frac{V_B}{V_A} . \quad (17.34)$$

A e B abbiano la stessa pressione. Si sfrutta il fatto che la variazione di entropia ΔS è indipendente dalla trasformazione che connette lo stato iniziale e lo stato finale: si connettano dunque *A* ed *B* mediante una trasformazione adiabatica $A \rightarrow R$ seguita da una isoterma $R \rightarrow B$.

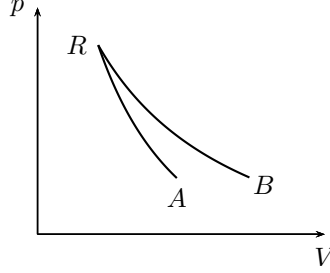


Figura 17.4: Le trasformazioni $A \rightarrow R$ e $R \rightarrow B$.

Dunque

$$\Delta S = (\Delta S)_{\text{adiab.}} + (\Delta S)_{\text{isot.}} = nR \log \frac{V_B}{V_R} , \quad (17.35)$$

dove V_R è il volume dello stato *R* identificato dal punto dove si intersecano la adiabatica e la isoterma. Nell'equazione (17.35) appare però lo stato *R* invece dello stato *A*. Si può ovviare a questo piccolo inconveniente con il seguente ragionamento. Gli stati *A* ed *B* si trovano sulla stessa isobara; quindi hanno la stessa pressione. Dall'equazione di stato segue pertanto che

$$\frac{T_B}{T_A} = \frac{V_B}{V_A} . \quad (17.36)$$

Gli stati *A* ed *R* si trovano sulla stessa adiabatica. L'equazione delle adiabatiche ci dice che

$$T_A V_A^{\gamma-1} = T_R V_R^{\gamma-1} , \quad (17.37)$$

che si può riscrivere come

$$\frac{T_R}{T_A} = \left(\frac{V_A}{V_R} \right)^{\gamma-1} . \quad (17.38)$$

Gli stati *B* ed *R* si trovano lungo la stessa isoterma; quindi $T_R = T_B$. Inserendo quest'ultima relazione nella precedente risulta

$$\frac{T_B}{T_A} = \left(\frac{V_A}{V_R} \right)^{\gamma-1} . \quad (17.39)$$

Sostituendo quest'espressione al posto del primo membro della (17.36) si ottiene

$$\left(\frac{V_A}{V_R} \right)^{\gamma-1} = \frac{V_B}{V_A} . \quad (17.40)$$

Da questa relazione si ottiene, dopo qualche calcolo lasciato alla cura del lettore studioso, il valore di V_R :

$$V_R = \frac{V_A^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}}{V_B^{\frac{1}{\gamma-1}}} . \quad (17.41)$$

Si torni quindi all'equazione (17.35): l'argomento del logaritmo vale V_B/V_R ; inserendo al posto di V_R l'espressione appena calcolata si ottiene:

$$\frac{V_B}{V_R} = \left(\frac{V_B}{V_A} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} . \quad (17.42)$$

Dunque, ricordando che

$$\frac{\gamma}{\gamma - 1} = \frac{\frac{C_p}{C_V}}{\frac{C_p}{C_V} - 1} = \frac{\frac{C_p}{C_V}}{\frac{C_p - C_V}{C_V}} = \frac{C_p}{R} , \quad (17.43)$$

si trova la seguente espressione per la variazione di entropia di una trasformazione isobara:

$$\Delta S = nR \log \left(\frac{V_B}{V_A} \right)^{\frac{C_p}{R}} = nR \frac{C_p}{R} \log \frac{V_B}{V_A} = nC_p \log \frac{V_B}{V_A} . \quad (17.44)$$

In definitiva

$$\Delta S = nC_p \log \frac{V_B}{V_A} = nC_p \log \frac{T_B}{T_A} \quad (17.45)$$

dove si è fatto uso della (17.36).

A e B abbiano lo stesso volume. Vale

$$\Delta S = nC_V \log \frac{T_B}{T_A} = nC_V \log \frac{p_B}{p_A} . \quad (17.46)$$

Il lettore studioso ne fornisca una dimostrazione lungo le linee della dimostrazione vista per la trasformazione isobara.

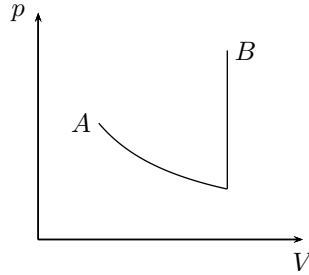


Figura 17.5: Le trasformazioni che collegano *A* e *B*.

A e B siano due stati qualsiasi. Si connettano lo stato iniziale e finale con una isoterma seguita da un'isocora, entrambe reversibili. La variazione di entropia è la somma della variazione di entropia nel corso dell'isoterma con la variazione di entropia nel corso dell'isocora: usando le equazioni (17.34) ed (17.46) si ottiene subito la formula generale,

$$\Delta S = nR \log \frac{V_B}{V_A} + nC_V \log \frac{T_B}{T_A} . \quad (17.47)$$

Si osservi che le equazioni (17.34), (17.45) e (17.46) si ottengono come casi particolari della precedente.

SOSTANZA SOLIDA O LIQUIDA

Si consideri una sostanza, solida o liquida, di massa m e calore specifico c , la cui temperatura varia da T_1 a T_2 :

$$\Delta S = mc \log \frac{T_2}{T_1} . \quad (17.48)$$

La dimostrazione di questa equazione non è elementare.

SCAMBI DI CALORE PER RAGGIUNGERE L'EQUILIBRIO TERMICO

La variazione di entropia totale di due sostanze, di ugual massa m e calore specifico c , inizialmente a temperature T_1 e T_2 che, poste a contatto raggiungono l'equilibrio termico è:

$$\Delta S = mc \log \frac{(T_1 + T_2)^2}{4T_1 T_2} . \quad (17.49)$$

Il lettore studioso dimostri che questa equazione deriva dalla precedente.

Si supponga che il sistema costituito dalle due sostanze sia isolato: la trasformazione è irreversibile ed infatti la variazione di entropia del sistema è positiva come si può facilmente dimostrare.

CAMBIAMENTO DI STATO

La variazione di entropia di una sostanza di massa m e calore latente λ che cambia il suo stato è:

$$\Delta S = \frac{Q}{T} = \frac{m\lambda}{T} . \quad (17.50)$$

SCAMBI DI CALORE FRA SORGENTI TERMICHE

Scambio di una quantità di calore Q fra due sorgenti termiche a temperature T_1 e $T_2 > T_1$. In questo esempio una quantità Q di calore fluisce spontaneamente per conduzione dal serbatoio T_2 al serbatoio T_1 , la trasformazione, per il secondo principio della termodinamica è chiaramente irreversibile. Per calcolare la variazione di entropia tra stato finale ed iniziale occorre trovare un'equivalente trasformazione reversibile. Si immagini di interporre tra i due serbatoi una macchina reversibile analoga alla macchina $M + R$ usata per dimostrare il teorema di Carnot (sezione 16.6); per ogni ciclo compiuto dalla macchina $M + R$ una certa quantità di calore passa dal serbatoio più caldo a quello più freddo; la variazione di entropia della macchina è nulla, essendo ciclica, la variazione totale di entropia è quindi la somma della variazione di entropia dei due serbatoi, che quindi è

$$\Delta S = \frac{Q}{T_1} - \frac{Q}{T_2} > 0. \quad (17.51)$$

ESPANSIONE LIBERA

Si consideri l'espansione libera di un gas perfetto, già analizzata nella sezione 15.1. Un gas che si trova inizialmente in uno stato di equilibrio A a temperatura T_A in un recipiente di volume V viene fatto espandere in un secondo recipiente, identico al primo ed inizialmente vuoto, fino a raggiungere un nuovo stato di equilibrio B . Il volume finale è evidentemente $2V$. Si supponga inoltre che le pareti dei due recipienti e del sottile tubo che li collega siano perfettamente isolanti. In questa circostanza il lavoro compiuto del gas è nullo e la temperatura finale T_B del gas è uguale a quella iniziale. Per calcolare la variazione di entropia del gas occorre innanzitutto trovare una trasformazione reversibile che li connetta. A tale scopo si può considerare una trasformazione isoterma reversibile in cui il gas si espande raddoppiando il proprio volume assorbendo calore da un serbatoio a temperatura $T = T_A = T_B$. Pertanto la variazione di entropia del gas, usando la (17.34), risulta

$$\Delta S_{GAS} = nR \log \frac{V_B}{V_A} = nR \log 2. \quad (17.52)$$

È immediato rendersi conto che il serbatoio fornisce, tramite un'isoterma reversibile a temperatura T , un calore Q , quindi la sua variazione di entropia è

$$\Delta S_{SERB} = -\frac{Q}{T} = -nR \log \frac{V_B}{V_A} = -nR \log 2 \quad (17.53)$$

La variazione totale dell'entropia è nulla, come ci si deve attendere da un sistema isolato che compie una trasformazione reversibile.¹

¹ Sono debitore di Fabio Maria Antoniali per i due esempi precedenti.

17.4 INTERPRETAZIONE MICROSCOPICA DELL'ENTROPIA.

In molta letteratura divulgativa si usa mettere in relazione l'entropia con il *disordine* dello stato di un sistema. Senza avere la pretesa di essere esaustivi su questo punto complesso, in quanto una trattazione completa dell'argomento richiede nozioni di Termodinamica Statistica che esulano dagli scopi di queste lezioni, si ritiene utile dare almeno qualche cenno che consenta il formarsi di un'idea, almeno vaga, di che cosa significhi *disordine* e perché sia in relazione con l'entropia. Per fissare le idee ci si riferisce al caso del gas perfetto già studiato in dettaglio. Si è visto che lo stato di equilibrio di un gas perfetto può essere descritto da alcune grandezze macroscopiche quali pressione, volume e temperatura, che rendono conto del comportamento *medio* delle molecole del gas. Si dice allora che il gas si trova in uno stato macroscopico descritto da certi valori di V , p e T .

Evidentemente tale stato macroscopico può essere realizzato da diverse configurazioni microscopiche cioè esiste una grande varietà (un numero decisamente enorme) di posizioni e velocità diverse che ciascuna molecola può assumere producendo lo stesso stato macroscopico. Uno stato macroscopico può cioè essere realizzato mediante molti stati microscopici.

Si dice che maggiore è il numero degli stati microscopici che realizzano uno stato macroscopico maggiore è il **disordine** di quest'ultimo.

Si consideri il seguente esempio. Si abbiano tre oggetti indicati dai numeri 1, 2, 3 e tre scatole. Si consideri lo stato in cui vi sia un oggetto in ogni scatola; è chiaro che questo stato può essere realizzato nei seguenti modi:

1	2	3	2	3	1	3	1	2
1	3	2	2	1	3	3	2	1

ci sono quindi sei modalità di realizzare lo stato richiesto.

Si consideri ora lo stato in cui si abbiano due oggetti nella prima scatola, uno nella seconda e nessuno nella terza. Questo stato può essere nei seguenti modi:

1 2	3		2 3	1		3 1	2	
-----	---	--	-----	---	--	-----	---	--

cioè vi sono tre modi di realizzare lo stesso stato.

Infine, si consideri lo stato in cui tutti gli oggetti stanno nella prima scatola. Chiaramente ciò è realizzato nell'unico modo

1 2 3		
-------	--	--

Si definisce, per quanto tale definizione sia impropria dal punto di vista matematico, **probabilità** di uno stato macroscopico il numero di stati microscopici che lo realizzano. Ciò sembra ragionevole e torna con l'intuizione: uno stato è tanto più probabile quanto maggiori sono le modalità con cui può realizzarsi. Con riferimento all'esempio sopra riportato dei tre oggetti nelle tre scatole, il primo stato, che può venir realizzato in sei modi diversi, è il più disordinato e quindi anche il più probabile, mentre l'ultimo è il più ordinato ed il meno probabile.

Se A è uno stato del sistema in esame si indica con il simbolo $\mathcal{W}(A)$ la sua probabilità secondo la definizione data sopra. Boltzmann nella seconda metà dell'Ottocento ha dimostrato che l'entropia $S(A)$ dello stato termodinamico A è legata alla sua probabilità mediante la relazione

$$S(A) = k_B \log \mathcal{W}(A) , \quad (17.54)$$

ove la costante k_B è la costante di Boltzmann. Il logaritmo che compare nella precedente equazione è un logaritmo naturale ed è una funzione crescente del suo argomento, cioè al crescere di x cresce anche $\log x$, evidentemente all'aumento dell'entropia S corrisponde un aumento della probabilità \mathcal{W} . Quindi, visto che l'evoluzione degli stati fisici avviene nel senso dell'aumento dell'entropia, è chiaro che un sistema fisico evolve in modo da aumentare il proprio disordine, nel senso sopra definito, e non viceversa. Il processo di diffusione di una goccia di inchiostro blu in un bicchiere

d'acqua è una vivida manifestazione di questa legge.

Eccone un altro esempio. Un sasso appoggiato sul pavimento è costituito da moltissime molecole che vibrano in ogni direzione in modo assolutamente *disordinato*. L'energia di vibrazione si manifesta macroscopicamente come temperatura del sasso, che come è noto, misura l'energia interna². Le vibrazioni di ogni molecola avvengono in direzione casuale ed indipendente dalle direzioni di vibrazione delle altre molecole, quindi, mediamente, la vibrazione totale del sasso è nulla e infatti il sasso non si muove. Se però le molecole in un certo istante vibrassero tutte nella stessa direzione, per esempio verso est, evidentemente il sasso si sposterebbe verso est poiché tutte le molecole da cui è composto hanno una velocità diretta in quella direzione. Ora, lo stato macroscopico in cui tutti gli atomi si muovono in una stessa direzione è evidentemente molto poco probabile, nel senso visto sopra, cioè sono molto pochi gli stati microscopici che lo realizzano. Ecco perché non capita di vedere sassi che, spontaneamente, si spostano verso qualche direzione. Questo esempio mostra quindi che la legge di aumento dell'entropia, e quindi del disordine ad essa collegato dalla (17.54), è vera solo in senso probabilistico. Ma la probabilità che avvenga un processo con diminuzione di disordine, e quindi di entropia, è così bassa che, se calcolata, mostra che per il suo verificarsi occorre aspettare un tempo maggiore dell'età dell'universo; il che è un altro modo di dire che non accade mai.

17.4.1 TERZO PRINCIPIO DELLA TERMODINAMICA.

Se lo stato microscopico che realizza un dato stato macroscopico A è uno solo, cioè se $\mathcal{W}(A) = 1$, vale $S(A) = k_B \log 1 = 0$. Questo si verifica, per esempio, in un gas perfetto quando la temperatura assoluta è nulla, cioè quando $T = 0\text{ K}$; in tal caso infatti l'energia cinetica media delle molecole è nulla, cosa che può avvenire solo se tutte le molecole del gas sono ferme e vi è un solo microstato che realizza un tale stato, quindi per questo stato vale $\mathcal{W}(A) = 1$. Resta così dimostrato che l'entropia di un gas perfetto alla temperatura $T = 0\text{ K}$ è nulla.

Questa osservazione può essere generalizzata per ogni sistema fisico e prende il nome di **terzo principio della termodinamica**, formulato per la prima volta da Nernst³ nel 1906:

L'entropia di un sistema fisico alla temperatura di zero kelvin è nulla.

Il nome principio, peraltro, benché consolidato dall'uso, non è corretto in quanto è possibile fornirne una dimostrazione a partire dagli altri principi.

Da questo principio si può giungere a dimostrare che non è possibile raffreddare un sistema fisico fino alla temperatura di zero kelvin, cosicché spesso il terzo principio viene enunciato in questa forma.

INTERMEZZO. VARIAZIONE DI ENTROPIA DI UN SASSO.

Si consideri una sasso di massa m che cade, da un'altezza h , in un recipiente, termicamente isolato, contenente dell'acqua. Il processo è evidentemente irreversibile; si vuole quindi fare il calcolo della variazione di entropia e verificare che l'entropia aumenta. Il sistema sasso più acqua è un sistema isolato che non scambia calore. Si ha tuttavia un aumento di energia interna a causa del lavoro della forza peso fatto sul sasso. Detto in un altro modo, l'energia potenziale iniziale del sasso si trasforma interamente in energia interna del sistema provocandone un aumento di temperatura; vale quindi

$$\Delta U = mgh . \quad (17.55)$$

Supponendo che l'acqua e il sasso si trovassero inizialmente alla stessa temperatura T_1 , dopo la caduta si ha una nuova temperatura di equilibrio T_2 . Per calcolare la variazione di entropia è necessario trovare una trasformazione reversibile che colleghi i due stati. Questa può essere

² La relazione fra temperatura ed energia interna, nel caso del sasso, è evidentemente più complicata che nel caso del gas perfetto studiato in precedenza.

³ Walter Hermann Nernst (1864-1941), chimico e fisico prussiano.

realizzata nel modo seguente.

Si faccia scendere il sasso in maniera quasistatica, cioè molto lentamente e con velocità costante, per mezzo di una fune; non appena il sasso entra in acqua il recipiente che contiene l'acqua viene posto a contatto con un serbatoio di calore la cui temperatura vari quasistaticamente dalla temperatura T_1 alla temperatura T_2 . Il processo può essere evidentemente invertito con pochissime modifiche dell'ambiente circostante e quindi può essere considerato con ottima approssimazione reversibile.

Il lavoro sul sasso, in questo caso è nullo poiché si è mosso con velocità costante; d'altra parte l'energia interna è una funzione di stato e quindi la sua variazione deve essere uguale a quella determinata nel caso della precedente trasformazione irreversibile; il calore fornito al sistema è quindi

$$Q = L + \Delta U = 0 + mgh = mgh . \quad (17.56)$$

Per il calcolo della variazione di entropia si può, a questo punto, utilizzare la (17.48) nella forma

$$\Delta S = C \log \frac{T_2}{T_1} , \quad (17.57)$$

ove C è la capacità termica del sistema acqua più sasso. Tale capacità termica si può trovare grazie alla relazione

$$Q = C\Delta T \quad \Rightarrow \quad C = \frac{mgh}{T_2 - T_1} . \quad (17.58)$$

In conclusione si ha

$$\Delta S = \frac{mgh}{T_2 - T_1} \log \frac{T_2}{T_1} . \quad (17.59)$$

che, come previsto, è una quantità positiva.

Si consideri ora il caso in cui un sasso di massa m utilizza parte della sua energia interna per salire dal pavimento al piano di un tavolo che si trova all'altezza h da terra. Evidentemente il processo non è spontaneo mentre lo è il processo inverso: un sasso spontaneamente cade sotto l'azione della forza peso non sale. Tuttavia, la salita del sasso non è contro le leggi della meccanica newtoniana, ma contro la legge dell'aumento dell'entropia. Le molecole di cui è composto il sasso potrebbero ridurre la propria energia cinetica di vibrazione, e quindi la loro temperatura, ed aumentare la propria energia potenziale gravitazionale salendo. La meccanica newtoniana non avrebbe alcuna obiezione se ciò avvenisse. Per calcolare la variazione di entropia occorre determinare una processo reversibile che connetta lo stato iniziale A (il sasso a terra) e lo stato finale B (il sasso sul tavolo).

È ragionevole assumere che l'energia cinetica media delle molecole del sasso sia proporzionale alla temperatura T_1 del sasso; determinare la costante di proporzionalità nel caso del sasso è più difficile che nel caso di un gas perfetto, ma qui non serve determinarla esattamente; si denoti tale costante con il simbolo α .

Nello stato iniziale pertanto i valori dell'altezza e dell'energia cinetica media delle molecole del sasso, sono

$$h_A = 0 \text{ m} \quad \mathcal{E}_c(A) = \alpha T_1 \quad (17.60)$$

Similmente, nello stato finale si ha

$$h_B = h \quad \mathcal{E}_c(B) = \alpha T_2 \quad (17.61)$$

D'altra parte la variazione di energia cinetica è uguale al lavoro fatto dalla forza peso; vale quindi

$$\mathcal{E}_c(B) = \mathcal{E}_c(A) - mgh \quad (17.62)$$

da cui si ottiene facilmente

$$\Delta T = -\frac{mgh}{\alpha} \quad (17.63)$$

Lo stato finale del sistema, quindi, è quello che si ottiene portando quasistaticamente il sasso sul tavolo e sottraendogli la quantità di calore necessaria alla variazione di temperatura ΔT . La

variazione di entropia dell'ambiente quindi è trascurabile. Detta C la capacità termica del sasso e utilizzando la (17.48), quindi, si trova

$$\Delta S = C \log \frac{T_2}{T_1} = C \log \frac{T_1 - \frac{mgh}{\alpha}}{T_1} = C \log \left(1 - \frac{mgh}{\alpha T_1} \right) \quad (17.64)$$

che è evidentemente minore di zero.

Quindi il sasso non può spontaneamente salire da terra al tavolo perché violerebbe la legge dell'aumento dell'entropia.

Parte V

APPENDICI.

A

UNITÀ DI MISURA E COSTANTI FISICHE.

In questa appendice si riuniscono, per comodità di consultazione, le unità di misura fondamentali e si elencano le principali grandezze fisiche utilizzate nel testo, fornendone le unità di misura.

A.1 GRANDEZZE FISICHE FONDAMENTALI.

Grandezza fisica	Simbolo della grandezza	Nome dell'unità	Simbolo dell'unità
tempo	t	secondo	s
lunghezza	l	metro	m
massa	m	chilogrammo	kg
temperatura	T	kelvin	K
intensità di corrente	i	ampere	A
quantità di sostanza	n	mole	mol
intensità luminosa	I	candela	cd

A.2 PREFISSI PER MULTIPLI E SOTTOMULTIPLI.

Prefisso	Simbolo	Nome	Potenza di dieci
tera	T	bilione	10^{12}
giga	G	miliardo	10^9
mega	M	milione	10^6
chilo	k	mille	10^3
etto	h	cento	10^2
deca	da	dieci	10^1
deci	d	decimo	10^{-1}
centi	c	centesimo	10^{-2}
milli	m	millesimo	10^{-3}
micro	μ	milionesimo	10^{-6}
nano	n	miliardesimo	10^{-9}
pico	p	bilionesimo	10^{-12}

A.3 GRANDEZZE DERIVATE.

Si elencano qui di seguito le grandezze fisiche derivate utilizzate nel presente volume, indicando la loro unità di misura e la relazione con le unità di misura con le grandezze fondamentali. Si

noti che alcune unità di misura non hanno nome.

Grandezza fisica	Simbolo della grandezza	Nome dell'unità	Simbolo dell'unità e dimensioni
velocità	\boldsymbol{v}		m s^{-1}
accelerazione	\boldsymbol{a}		m s^{-2}
periodo	T	secondo	s
frequenza	ν	hertz	$\text{Hz} = \text{s}^{-1}$
angolo	θ	radiante	rad
velocità angolare	$\boldsymbol{\omega}$		s^{-1}
pulsazione	ω		s^{-1}
forza	\boldsymbol{F}	newton	$\text{N} = \text{kg m s}^{-2}$
coefficiente di attrito	μ		adimensionale
costante elastica	k		$\text{N m}^{-1} = \text{kg s}^{-2}$
campo gravitazionale	\boldsymbol{g}		$\text{N kg}^{-1} = \text{m s}^{-2}$
lavoro, energia, calore	$\mathcal{L}, \mathcal{E}, \mathcal{Q}$	joule	$\text{J} = \text{kg m}^2 \text{s}^{-2}$
energia potenziale	\mathcal{U}	joule	$\text{J} = \text{kg m}^2 \text{s}^{-2}$
potenza	\mathcal{P}	watt	$\text{W} = \text{kg m}^2 \text{s}^{-3}$
impulso	\boldsymbol{I}		$\text{N s} = \text{kg m s}^{-1}$
quantità di moto	\boldsymbol{p}		$\text{N s} = \text{kg m s}^{-1}$
momento angolare	\boldsymbol{L}_o		$\text{kg m}^2 \text{s}^{-1}$
momento di una forza	\boldsymbol{M}_o		$\text{N m} = \text{kg m}^2 \text{s}^{-2}$
momento d'inerzia	I		kg m^2
densità	ρ		kg m^{-3}
peso specifico	P_s		$\text{kg m}^{-2} \text{s}^{-2}$
pressione	p	pascal	$\text{Pa} = \text{kg m}^{-1} \text{s}^{-2}$
tensione superficiale	τ		$\text{N m}^{-1} = \text{kg s}^{-2}$
portata	Q		$\text{m}^3 \text{s}^{-1}$
viscosità	η		$\text{kg m}^{-1} \text{s}^{-1}$
coefficiente di dilatazione	λ		K^{-1}
calore specifico	c		$\text{J kg}^{-1} \text{K}^{-1} = \text{m}^2 \text{s}^{-2} \text{K}^{-1}$
capacità termica	C		$\text{J K}^{-1} = \text{kg m}^2 \text{s}^{-2} \text{K}^{-1}$
calore latente	λ		$\text{J kg}^{-1} = \text{m}^2 \text{s}^{-2}$
rendimento	η		adimensionale
entropia	S		$\text{J K}^{-1} = \text{kg m}^{-2} \text{s}^{-2} \text{K}^{-1}$

A.4 ALCUNE COSTANTI FISICHE.

Si elencano qui di seguito le costanti fisiche citate nel testo.

Costante	Simbolo e valore
accelerazione di gravità	$g = 9.806\,65\,\text{m s}^{-2}$
costante di gravitazione universale	$G = 6.674\,28(67) \times 10^{-11}\,\text{m}^3\,\text{kg}^{-1}\,\text{s}^{-2}$
massa della Terra	$M_{\oplus} = 5.9722(6) \times 10^{24}\,\text{kg}$
raggio medio equatoriale della Terra	$R_{\oplus} = 6.378\,137 \times 10^6\,\text{m}$
massa del Sole	$M_{\odot} = 1.9884(2) \times 10^{30}\,\text{kg}$
costante universale dei gas	$R = 8.314\,462\,618\,\text{J mol}^{-1}\,\text{K}^{-1}$
numero di Avogadro	$N_A = 6.022\,140\,76 \times 10^{23}\,\text{mol}^{-1}$
costante di Boltzmann	$k_B = 1.380\,649 \times 10^{-23}\,\text{J K}^{-1}$

A.5 DATI SUL SISTEMA SOLARE

La seguente tabella riunisce i dati sui principali corpi del Sistema Solare.

Corpo	Raggio medio km	Massa kg	Accel. di gravità* m s^{-2}	Velocità di fuga km s^{-1}	Distanza dal Sole** km	Periodo di rivoluzione d
Sole	695 700	1.9885×10^{30}	274.0	617.6		
Mercurio	2439.7	3.3011×10^{23}	3.70	4.3	5.791×10^7	87.969
Venere	6051.8	4.8675×10^{24}	8.87	10.36	1.0821×10^8	224.701
Terra	6371.0	5.9723×10^{24}	9.780	11.186	1.4960×10^8	365.256
Marte	3389.5	6.4171×10^{23}	3.69	5.03	2.2792×10^8	686.980
Giove	69 911	$1.898\,19 \times 10^{27}$	23.12	59.5	7.7857×10^8	4332.589
Saturno	58 232	5.6834×10^{26}	8.96	35.5	$1.433\,53 \times 10^9$	10 759.22
Urano	25 362	8.6813×10^{25}	8.69	21.3	$2.872\,46 \times 10^9$	30 685.4
Nettuno	24 622	$1.024\,13 \times 10^{26}$	11.00	23.5	$4.495\,06 \times 10^9$	60 189
Plutone	1188	1.303×10^{22}	0.62	1.21	$5.906\,38 \times 10^9$	90 560
Luna	1737.4	7.346×10^{22}	1.62	2.38	3.844×10^5 ***	27.3217

* All'equatore.

** È la distanza media; è anche il semiasse maggiore.

*** È la distanza media dalla Terra.

B

FUNZIONI GONIOMETRICHE.

Le funzioni goniometriche sono molto utili in fisica poiché consentono di determinare in modo estremamente pratico la proiezione di un segmento lungo una direzione diversa, per esempio per calcolare le componenti di un vettore. Qui non si cerca di dare una esposizione esaustiva delle funzioni goniometriche, ma solo di dare i pochi semplici strumenti utilizzati nel testo. Si consideri

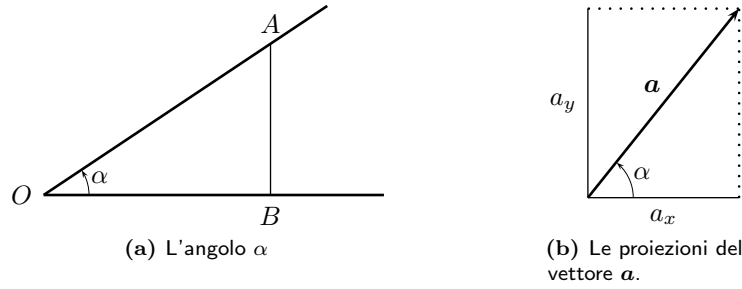


Figura B.1: Definizione e uso delle funzioni goniometriche.

quindi un angolo α di vertice O , e sia A un qualsiasi punto su uno dei due lati dell'angolo e B la sua proiezione sull'altro lato. Si definiscono allora le seguenti funzioni goniometriche:

$$\sin \alpha = \frac{AB}{OA} \quad , \quad \cos \alpha = \frac{OB}{OA} \quad , \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{AB}{OB} \quad , \quad \operatorname{cotg} \alpha = \frac{OB}{AB} . \quad (\text{B.1})$$

le quattro funzioni di α qui definite non sono indipendenti, ma valgono le relazioni

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \quad , \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \quad , \quad \operatorname{cotg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} . \quad (\text{B.2})$$

Da queste definizioni è immediato ricavare le componenti di un vettore rispetto agli assi cartesiani x e y . Facendo riferimento alla figura B.1b, le componenti a_x e a_y del vettore \mathbf{a} sono date da

$$a_x = a \cos \alpha \quad , \quad a_y = a \sin \alpha . \quad (\text{B.3})$$

Inoltre le due componenti sono fra loro legate dalle relazioni

$$a_y = a_x \operatorname{tg} \alpha \quad , \quad a_x = a_y \operatorname{cotg} \alpha . \quad (\text{B.4})$$

Le funzioni goniometriche qui introdotte possono essere assai convenientemente rappresentate sul piano cartesiano utilizzando una circonferenza, detta goniometrica, avente il centro nell'origine degli assi e raggio unitario.

L'angolo positivo α viene rappresentato con il vertice nell'origine, un lato coincidente con il semiasse positivo delle ascisse e l'altro lato ruotato in senso antiorario, riservando la rotazione oraria per gli angoli negativi.

In questo modo il valore in radianti di α è rappresentato dalla lunghezza dell'arco sotteso sulla circonferenza.

Il seno e il coseno di α sono rappresentati dalle coordinate del punto P , intersezione del lato mobile dell'angolo con la circonferenza. Vale quindi

$$P(\cos \alpha, \sin \alpha) \quad (\text{B.5})$$

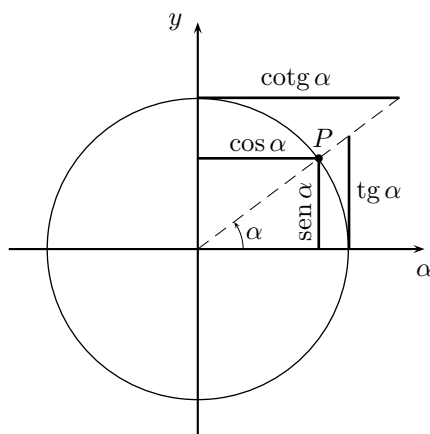


Figura B.2: La circonferenza goniometrica.

Inoltre la tangente e la cotangente di α sono rappresentati dai segmenti tangenti alla circonferenza rispettivamente nei punti di coordinate $(1, 0)$ e $(0, 1)$ compresi fra la circonferenza e il lato mobile di α .

Uno dei vantaggi della rappresentazione delle funzioni goniometriche sulla circonferenza è la estensione della loro definizione ad angoli qualunque.

Dalla figura e da quanto detto, si vede inoltre che, per α acuto, vale la disuguaglianza

$$\text{sen } \alpha < \alpha < \text{tg } \alpha \quad (\text{B.6})$$

Inoltre per angoli piccoli, cioè per $\alpha \simeq 0$ vale l'approssimazione

$$\text{sen } \alpha \simeq \text{tg } \alpha \simeq \alpha \quad (\text{B.7})$$

Si fornisce una tabella di corrispondenza fra le misure di alcuni angoli in gradi e in radianti e i valori corrispondenti delle funzioni goniometriche.

gradi	radiani	sen	cos	tg	cotg
0°	0	0	1	0	\nexists
30°	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
45°	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
60°	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
90°	$\frac{\pi}{2}$	1	0	\nexists	0
180°	π	0	-1	0	\nexists
270°	$\frac{3}{2}\pi$	-1	0	\nexists	0
360°	2π	0	1	0	\nexists

Si forniscono infine i grafici delle funzioni seno, coseno e tangente al variare dell'angolo.

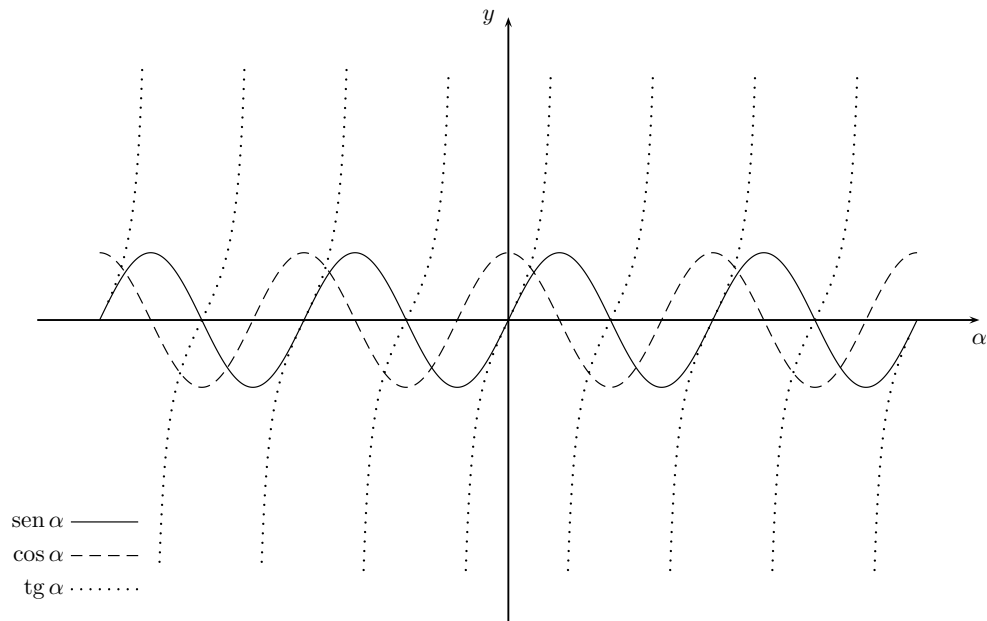


Figura B.3: Grafici delle funzioni goniometriche nell'intervallo $-720^\circ \leq \alpha \leq 720^\circ$.

C

COORDINATE POLARI.

In molti problemi è comodo utilizzare per la descrizione del moto piano di un punto materiale coordinate diverse da quelle cartesiane. Si illustra qui l'uso delle **coordinate polari** (r, θ) introdotte nella sezione 2.7. Queste sono definite a partire da un asse orientato di riferimento ed un'origine O che si trovi su di esso. In questo modo il vettore posizione \mathbf{OP} è individuato dal suo modulo r e dall'angolo θ formato da \mathbf{OP} e l'asse di riferimento come in figura C.1.

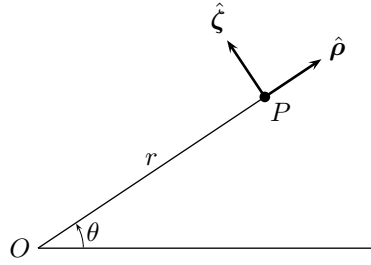


Figura C.1: Le coordinate polari nel piano.

Se come asse di riferimento si sceglie l'asse delle ascisse, come in figura 2.26, è possibile determinare facilmente la relazione fra coordinate polari e cartesiane:

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases} \quad \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = \arctg \frac{y}{x} . \end{cases} \quad (\text{C.1})$$

È assai istruttivo il calcolo delle componenti della velocità e dell'accelerazione in coordinate polari. Innanzi tutto è necessario fissare dei versori. Sia $\hat{\rho}$ il versore che punta nella direzione di \mathbf{OP} e $\hat{\zeta}$ quello perpendicolare a $\hat{\rho}$, come in figura C.1. In questo modo lo spostamento $\Delta \mathbf{OP} = \mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2$ del punto dalla posizione P_1 alla posizione P_2 viene rappresentato nei termini seguenti.

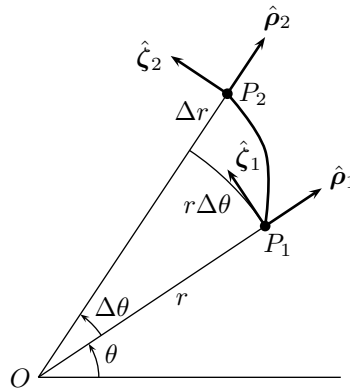


Figura C.2: Lo spostamento in coordinate polari.

Lo spostamento $\Delta \mathbf{OP}$ percorso nel piccolo intervallo di tempo Δt ha una componente lungo $\hat{\rho}$ che viene indicata con Δr e una componente lungo $\hat{\zeta}$ pari a $r \Delta \theta$ come rappresentato in figura C.2. Si può pertanto scrivere

$$\Delta \mathbf{OP} = \Delta r \hat{\rho} + r \Delta \theta \hat{\zeta} . \quad (\text{C.2})$$

Per trovare la velocità istantanea occorre dividere per Δt e poi far tendere Δt a zero; quindi

$$\frac{\Delta \mathbf{OP}}{\Delta t} = \frac{\Delta r}{\Delta t} \hat{\rho} + r \frac{\Delta \theta}{\Delta t} \hat{\zeta} \quad (\text{C.3})$$

e, infine, se $\Delta t \rightarrow 0$ si ottiene

$$\mathbf{v} = \dot{r} \hat{\rho} + r \dot{\theta} \hat{\zeta} . \quad (\text{C.4})$$

Riconoscendo che $\dot{\theta}$, è la velocità angolare ω le componenti della velocità rispetto alle coordinate polari possono essere scritte nella forma:

$$v_r = \dot{r} \quad , \quad v_\theta = r\omega . \quad (\text{C.5})$$

Per quel che riguarda l'accelerazione si osservi che nello spostarsi il punto da P_1 a P_2 non cambiano solo le componenti del vettore velocità, ma anche i versori. Quindi:

$$\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}} = \ddot{r} \hat{\rho} + \dot{r} \dot{\hat{\rho}} + \dot{r} \omega \hat{\zeta} + r \dot{\omega} \hat{\zeta} + r \omega \dot{\hat{\zeta}} . \quad (\text{C.6})$$

Si tratta quindi di determinare $\dot{\hat{\rho}}$ e $\dot{\hat{\zeta}}$; si tratta cioè di determinare la rapidità di variazione di un versore rotante: Per farlo conviene considerare un moto circolare uniforme come quello rappresentato in figura 2.21. In questo caso lo spostamento non ha componenti in direzione radiale e per la velocità vale la relazione (2.115), che qui si può riscrivere nella forma

$$r \dot{\hat{\rho}} = \boldsymbol{\omega} \times (r \hat{\rho}) \quad (\text{C.7})$$

ma r è costante, quindi la precedente diventa

$$r \dot{\hat{\rho}} = r \boldsymbol{\omega} \times \hat{\rho} \quad (\text{C.8})$$

e quindi finalmente

$$\dot{\hat{\rho}} = \boldsymbol{\omega} \times \hat{\rho} = \omega \hat{\zeta} , \quad (\text{C.9})$$

ove si è tenuto conto del fatto che $\hat{\zeta}$ è perpendicolare sia a $\boldsymbol{\omega}$ che a $\hat{\rho}$. Similmente si ottiene:

$$\dot{\hat{\zeta}} = \boldsymbol{\omega} \times \hat{\zeta} = -\omega \hat{\rho} . \quad (\text{C.10})$$

Quindi in definitiva:

$$\mathbf{a} = \ddot{r} \hat{\rho} + \dot{r} \omega \hat{\zeta} + \dot{r} \omega \hat{\zeta} + r \dot{\omega} \hat{\zeta} - r \omega^2 \hat{\rho} = (\ddot{r} - r \omega^2) \hat{\rho} + (2r\omega + r\dot{\omega}) \hat{\zeta} . \quad (\text{C.11})$$

Le componenti dell'accelerazione in coordinate polari sono quindi

$$a_r = \ddot{r} - r \omega^2 \quad , \quad a_\theta = 2r\omega + r\dot{\omega} . \quad (\text{C.12})$$

BIBLIOGRAFIA

- [1] Euclide. *Tutte le opere*. Bompiani, Milano, 2007.
- [2] Galilei, Galileo. *Discorsi e dimostrazioni matematiche*. Einaudi, Torino, 1990.
- [3] Aristotele. *Fisica*. Laterza, Bari, 2004.
- [4] Hofstadter, Douglas Richard. *Gödel, Escher, Bach: un'Eterna Ghirlanda Brillante*. Adelphi, Milano, 2007.
- [5] Mach, Ernst. *La meccanica nel suo sviluppo storico-critico*. Boringhieri, Torino, 1977.
- [6] Galilei, Galileo. *Dialogo sopra i due massimi sistemi del mondo tolemaico e copernicano*. Einaudi, Torino, 1970.
- [7] Newton, Isaac. *Principi Matematici della filosofia naturale*. UTET, Torino, 1997.
- [8] Russo, Lucio. *La rivoluzione dimenticata*. Feltrinelli, Torino, 2001.
- [9] Tolomeo, Claudio. *Ptolemy's Almagest*. Princeton University Press, Princeton, 1998.
- [10] Copernico, Niccolò. *De revolutionibus orbium caelestium*. Einaudi, Milano, 1975.
- [11] Copernico, Niccolò. *Opere*. UTET, Torino, 1979.
- [12] Goldstein, Herbert. *Meccanica classica*. Zanichelli, Bologna, 2005.
- [13] Archimede. *Opere*. UTET, Torino, 1974.
- [14] Galilei, Galileo. *Opere*. Vol. I. UTET, Torino, 2005.
- [15] Kuhn, Thomas Samuel. *La struttura delle rivoluzioni scientifiche*. Einaudi, Torino, 1995.
- [16] Laerzio, Diogene. *Vite dei filosofi*. TEA, Milano, 1991.
- [17] Fixsen, D. J. «The Temperature of the Cosmic Microwave Background». *The Astrophysical Journal* **707**, (2009), 916–920.

Indice analitico

- Ångström
 - unità di misura della lunghezza, 140
- Ångström, 140
- Accelerazione, 12
 - angolare, 29
 - centripeta, 26
 - di gravità, 14
 - istantanea, 16
- Afelio, 66
- Altezza
 - cinetica, 160
 - piezometrica, 160
- Ambiente esterno, 189
- Ampiezza, 31
- Angolo di contatto, 151
- Apollonio di Perga, 65
- Archimede, 127, 146–148, 187
- Aristarco di Samo, 64
- Aristotele, 39, 146
- Assi principali d'inerzia, 111, 123
- Atmosfera, 141
- Attrito
 - dinamico
 - coefficiente di, 50
 - statico
 - coefficiente di, 50
 - cono di, 50
 - volvente, 119
 - coefficiente di, 119
- Atwood, 53
- Avogadro, 173
 - legge di, 173
 - numero di, 176
- Bar, 141
- Baricentro, 96
- Bernoulli, 159
- Bilancia di torsione, 72
- Boltzmann, 176
 - costante di, 176, 224
 - equazione di, 224
- Boyle, 172
 - legge di, 172, 173
- Brahe, 65
- Buco nero, 85
- Bunsen, 185
 - calorimetro di, 185, 194
- Calore, 165, 183
 - latente, 184
 - specifico, 183
- Calorimetro, 185
 - equivalente in acqua del, 185
- Capacità termica, 183
 - a pressione costante, 199
 - a volume costante, 199
- Carnot, 203
 - ciclo di, 203–213
 - rendimento del ciclo di, 205
- Cavendish, 72
- Celsius, 168
 - grado centigrado, 168
 - scala termometrica di, 168, 171
- Centro
 - delle forze, 133
 - di forza, 90
 - di gravità, 96
- Chasles, 109
- Chilocaloria, 184
- Chilogrammo, 4
- Cinematica, 6
- Clapeyron, 167
 - piano di, 167
- Clausius, 176, 206–214, 219
 - disuguaglianza di, 209, 211
 - somma di, 209–220
- Coefficiente di dilatazione
 - cubica, 169
 - lineare, 168
- Coefficienti d'inerzia, 123
- Condensazione, 184
- Conservazione dell'energia meccanica, 114
- Coordinate polari, 236
- Copernico, 65
- Coppia di forze, 88, 136
- Coriolis, 56
 - forza di, 56, 60
- Costante
 - di gravitazione universale, 67
 - elastica, 52
- Costante universale dei gas perfetti, 172
- Definizione operativa, 3

- Diagramma pT dell'acqua, 189
 Disordine, 224
 Distanza, 7

 Eclittica, 63
 Efficienza di una macchina frigorifera, 205
 Energia
 cinetica, 77
 del sistema termodinamico, 195, 196
 potenziale
 della forza elastica, 80
 della forza gravitazionale, 80
 della forza peso, 80
 superficiale, 150
 Energia interna, 175
 di un gas perfetto, 199
 Entropia, 211, 215
 legge dell'aumento della, 219
 trasformazione irreversibile, 218
 Epicuro, 182
 Equante, 65
 Equazione di continuità, 158
 Equazione di stato di un gas perfetto, 172
 Equilibrio, 59
 indifferente, 59, 137
 instabile, 59, 137
 stabile, 59, 137
 Equilibrio termico, 166
 Equipartizione dell'energia, principio di, 175, 181
 Equivalente meccanico della caloria, 194
 Eraclide Pontico, 64
 Eratostene, 72
 Euclide, 58
 Euler, 124
 Evaporazione, 186

 Fahrenheit, scala termometrica, 168
 Faraday, 71
 Fase iniziale, 31
 Fluido semplice, 167
 Forza
 apparente, 56
 centrifuga, 56
 elastica, 52
 esterna, 93
 impulsiva, 85
 interna, 93
 motrice, 138
 resistente, 138
 Foucault, 62
 Frequenza, 26
 Fulcro, 138
 Funzione di stato, 195
 Fusione, 184

 Galilei, 3, 8, 35, 38, 45, 65, 127, 148
 Gas, 187
 perfetto, 172
 Gas perfetto
 espansione libera di un, 196, 223
 Gay-Lussac, 171, 196
 leggi di, 171–173
 Gibbs, 166
 regola delle fasi, 166
 Gittata, 25
 Grado di libertà, 180
 Grafico spazio-tempo, 8
 Grandezza fisica, 2
 additiva, 43
 adimensionale, 5
 macroscopica, 140
 scalare, 17
 vettoriale, 17
 Grandezza termometrica, 167
 Grandezze fisiche omogenee, 5
 Guldin, 135

 Hertz, 27
 unità di misura della frequenza, 27
 Huygens, 112

 Interazione a distanza, 71
 Interpretazione cinetica della temperatura, 177
 Ipparco di Nicea, 126
 Irreversibilità, 170, 205
 condizione di, 209, 212, 219
 Isocronismo, 55

 Joule, 73, 194–196
 L'esperienza di, 194
 unità di misura del lavoro, 194
 unità di misura dell'energia, 73
 Joule-Clausius, relazione di, 176–179
 Jurin, 153

 König, 97
 Kelvin, 171, 206–207, 219
 unità di misura della temperatura, 168, 171
 Kepler, 65
 Kuhn, 181

 Laplace, 152
 Latitudine, 60
 Lavoro, 114
 della forza elastica, 75
 della forza gravitazionale, 76
 della forza peso, 74
 Lavoro di una trasformazione, 191
 isobara, 191
 isocora, 192
 isoterma, 192

- Legge
 - di composizione delle velocità, 36
 - di conservazione della portata, 158
 - di gravitazione universale, 67
 - di Jurin, 153
 - di Pascal, 144
 - di Stokes, 163
 - fisica, 2
 - fondamentale della dinamica, 44
- Legge oraria, 6
 - del moto circolare uniforme, 28
 - del moto rettilineo uniforme, 8
 - del moto uniformemente accelerato, 13
 - del moto vario, 11
- Linea di flusso, 156
- Liquefazione, 184
- Liquido perfetto, 141, 156
- Luna, 63
- Lunghezza ridotta, 121
- Macchina di Atwood, 53
- Macchina semplice, 48, 138
- Mach, 42, 154
- Magnus, 162
- Massa ridotta, 99
- Maxwell, 71
- Mayer, 199
 - relazione di, 199
- Metro, 4
- Millibar, 141
- Modello, 2, 181
- Modello molecolare dei gas, 175
- Mol
 - unità di misura della quantità di sostanza, 172
- Molla ideale, 51
- Momento
 - assiale, 113
 - principale d'inerzia, 111
- Momento di una forza, 89
- Moto
 - periodico, 26
 - uniforme, 8
- Moto perpetuo
 - di prima specie, 198
 - di seconda specie, 207
- Nernst, 225
 - principio di, 225
- Newton, 46, 66, 71, 154, 162
 - unità di misura della forza, 43
- Pappo, 135
- Paraboloide di rotazione, 155
- Parametro d'urto, 102
- Paranco, 54
- Pascal, 141
 - unità di misura della pressione, 141
- Penzias, 202
- Perielio, 66
- Periodo, 26
- Peso, 46
 - specifico, 141
- Pianeti, 63
- Piano delle fasi, 167
- Piccole oscillazioni, 55
- Pitagora, 18
 - teorema di, 18
- Platone, 64
- Poisson, 124
- Posizione relativa, 34
- Potenza, 114
- Precessione
 - degli equinozi, 126
 - del momento angolare, 116
 - della velocità angolare, 126
- Pressione del vapore saturo, 186
- Pressione normale, 141
- Primo principio della termodinamica, 195, 198
- Principio
 - d'inerzia, 45
 - dei vasi comunicanti, 144
 - di indipendenza degli spostamenti simultanei, 35
 - di relatività, 58
 - di sovrapposizione, 44
- Principio di equivalenza, 194
- Probabilità, 224
- Pulsazione, 31
- Punti fissi termometrici, 167
- Punto di vista euleriano, 156
- Punto materiale, 6
- Punto triplo, 189
 - dell'acqua, 189
- Radiante, 27
- Reazione vincolare, 46
- Regnault, 185
 - calorimetro di, 185
- Relazioni di Poisson, 124
- Rendimento
 - del ciclo di Carnot, 205
 - di una macchina reversibile, 208
 - di una macchina termica, 203
- Reticolo cristallino, 140
- Retrogradazione, 63
- Satelliti geostazionari, 70
- Secondo, 4
- Secondo principio della termodinamica
 - enunciato di Clausius, 206
 - enunciato di Kelvin, 206

- Serbatoio di calore, 189
- Simplicio, 64
- Sistema
 - copernicano, 65
 - di riferimento
 - del laboratorio, 105
 - non inerziale, 45
 - internazionale, 3
 - isolato, 42
 - materiale, 93
 - tolemaico, 65
- Sistema termodinamico, 165
 - isolato, 166, 189
- Sole, 63
- Solidificazione, 184
- Sommatoria, 94
- Sorgente esterna, 189
- Sostanza termometrica, 167
- Spinta di Archimede, 146
- Spostamento, 7
 - angolare, 27
- Stato termodinamico di equilibrio, 166
- Steiner, 112
- Stella polare, 63
- Stevin, 144
- Stokes, 163
- Sublimazione, 184
- Superficie scabra, 49

- Temperatura, 165, 166
 - assoluta, 171
 - critica, 187
- Tempo
 - di caduta, 14
 - di salita, 15
- Tensione, 51
- Tensione superficiale, 140
- Teorema
 - degli assi paralleli, 112
 - del centro di massa, 96, 108
 - del momento angolare, 90
 - del viriale, 85
 - dell'energia cinetica, 114
 - dell'impulso, 86
 - di Chasles, 109
 - di Huygens-Steiner, 121
 - di König, 97
 - di Pappo-Guldino, 135
- Termometri
 - a pressione costante, 170
 - a volume costante, 171
- Terzo principio della termodinamica, 225
- Tolomeo, 65
- Torr, 146
- Torricelli, 145, 160

- Traiettoria, 6
- Trasformazione termodinamica
 - adiabatica, 189
 - ciclica, 169
 - isobara, 170
 - isocora, 169
 - isoterma, 170
 - quasistatica, 169
 - approssimabilità, 190
 - reversibile, 169
- Tubo di flusso, 156

- Umidità relativa, 187
- Unità di misura, 3
- Urto
 - anelastico, 102
 - centrale, 102
 - completamente anelastico, 104
 - elastico, 102
 - obliquo, 102

- van der Waals, 179
 - equazione di, 172, 180
- Vapore, 187
- Vaporizzazione, 184
- Variazione di entropia
 - trasformazione adiabatica, 220
 - trasformazione arbitraria, 222
 - trasformazione isobara, 221
 - trasformazione isocora, 222
 - trasformazione isoterma, 220
- Velocità
 - angolare, 27
 - areolare, 66
 - d'impatto, 15
 - del moto uniforme, 8
 - di fuga, 85
 - istantanea, 10
 - legge della, 11
 - media, 9
 - quadratica media, 177
 - relativa, 34
- Venturi, 161
- Versori, 19
- Vettori
 - applicato, 87
 - componenti, 17
 - differenza, 19
 - modulo, 17
 - nullo, 19
 - prodotto
 - per uno scalare, 19
 - scalare, 20
 - vettoriale, 21
 - relazione triangolare, 19
 - somma, 18

- metodo del parallelogramma, 18
 - metodo punta-coda, 18
- Viscosità, 140, 156
- Watt, 76
 - unità di misura della potenza, 76
- Wilson, 202
- Young, 152
- Zenone, 39
- Zero assoluto, irraggiungibilità dello, 210