

PIETRO DONATIS

LEZIONI DI FISICA 2

Queste lezioni sono pubblicate sotto una licenza



che può essere visionata al sito

<http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/2.5/it/>.

### Premessa e notazioni.

Queste *Lezioni di fisica 2* sono rivolti agli studenti del quarto e quinto anno di un liceo scientifico, ma possono essere utilizzati, apportando i tagli che si riterranno opportuni, anche da studenti di altri indirizzi di studio.

L'idea da cui sono nati non è quella di affiancare il libro di testo in adozione, ma di sostituirlo. Questo principalmente per motivi economici, perché gli allievi possano disporre di un testo serio e gratuito: scaricabile dalla rete e fotocopiabile liberamente.

Il contenuto copre l'attuale programma ministeriale per il liceo scientifico; oltre a ciò si potranno trovare approfondimenti ed alcuni argomenti tradizionalmente tralasciati in un corso tradizionale. Si è ritenuto infatti utile presentare al lettore un riferimento chiaro e quanto più possibile semplice per argomenti solitamente considerati molto ostici. Alcune dimostrazioni, tralasciabili senza compromettere la comprensione del seguito, sono presentate in carattere tipografico minore.

La responsabilità di quanto scritto, e di tutti gli eventuali errori, è esclusivamente di Pietro Donatis, il quale deve tuttavia ringraziare Fabio Maria Antoniali, Carlo Càssola e Teodoro Natelli per le numerose discussioni, indispensabili a chiarirgli i molti punti delicati.

Questo lavoro è senz'altro da considerarsi in evoluzione; sarò grato a tutti coloro che vorranno essere tanto gentili da segnalare errori o fornire commenti utili al miglioramento di quanto scritto in vista di auspicabili nuove versioni.

Per separare la parte decimale di un numero si è usato il punto invece della virgola.

Le quantità vettoriali sono indicate in grassetto mentre i corrispondenti moduli sono in carattere normale; cosicché, ad esempio,  $\mathbf{v}$  indica un vettore e  $v$  il suo modulo.

Le costanti fisiche citate nel testo sono riportate utilizzando, se non diversamente indicato, i valori forniti dal Particle Data Group (<http://pdg.lbl.gov>) e dal National Institute of Standard and Technology (<http://www.nist.gov>); questi valori sono riportati con il loro errore sperimentale sulle ultime cifre indicato fra parentesi tonde: per esempio, la costante di gravitazione universale ha valore  $G = 6.67430(15) \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$  e quindi le ultime due cifre, 28, sono incerte e l'errore sperimentale commesso nella loro determinazione è 67; in maniera meno compatta tale valore si scriverebbe  $G = (6.67430 \pm 0.00015) \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$ . Le costanti senza errore, come la velocità della luce, sono valori esatti.

Tutti i logaritmi presenti nel seguito, indicati con il simbolo  $\log$ , sono logaritmi naturali in base  $e$ . Queste lezioni sono state scritte usando il programma di composizione tipografica  $\text{\LaTeX}$ ; per le figure sono stati usati i pacchetti `pstricks` e `tikz`.

Palermo, 10 agosto 2021



<b>Parte I. Oscillazioni e onde.</b>	<b>1</b>
<b>1. Moti periodici.</b>	<b>2</b>
1.1. Moto armonico.	2
1.2. Il moto elastico.	4
1.3. Composizione di moti armonici di ugual pulsazione.	5
1.4. Composizione di moti armonici con pulsazione diversa.	7
1.5. Moti armonici su assi ortogonali.	8
<b>2. Propagazione delle onde.</b>	<b>11</b>
2.1. Onde su di una corda.	11
2.2. Velocità di un'onda su una corda.	13
2.3. Generalità sulle onde.	14
2.4. Energia trasportata da un'onda.	15
2.5. Riflessione delle onde.	16
2.6. Rifrazione delle onde.	17
2.7. Il principio di sovrapposizione. Interferenza.	17
2.8. Onde stazionarie su di una corda fissata agli estremi.	19
2.9. L'effetto Doppler.	20
2.10. Il meccanismo della propagazione ondosa: il principio di Huygens.	23
2.11. Le onde sonore.	24
2.12. Velocità del suono.	25
<b>Parte II. Ottica.</b>	<b>28</b>
<b>3. Ottica geometrica.</b>	<b>30</b>
3.1. La propagazione della luce.	31
3.2. Riflessione: caso dello specchio piano.	32
3.3. Specchio sferico.	34
3.4. La rifrazione.	41
3.5. Diottri sferici.	48
3.6. Lenti sottili.	50
3.7. Profondità di campo.	54
3.8. Strumenti ottici.	56
<b>4. Ottica ondulatoria.</b>	<b>59</b>
4.1. Interferenza.	59
4.2. Diffrazione.	65
4.3. Potere risolvete di una lente.	68
4.4. Profondità di campo (2).	68
4.5. Reticolo di diffrazione.	70
4.6. Dispersione.	72
4.7. Polarizzazione.	72
<b>5. Velocità della luce.</b>	<b>78</b>
5.1. Misure astronomiche.	78
5.2. Misure terrestri.	80
5.3. Velocità rispetto a cosa? Il problema dell'etere.	82
<b>Parte III. Elettromagnetismo</b>	<b>85</b>
<b>6. Preliminari matematici.</b>	<b>86</b>
6.1. Il concetto di campo.	86

6.2. Flusso di un campo vettoriale. . . . .	87
6.3. Circuitazione di un campo vettoriale. . . . .	89
6.3.1. Il lavoro di una forza. . . . .	89
6.3.2. Circuitazione di un campo di velocità lungo un vortice. . . . .	90
<b>7. Elettrostatica. . . . .</b>	<b>91</b>
7.1. La carica elettrica. . . . .	91
7.1.1. L'elettroscopio. . . . .	92
7.1.2. Elettrizzazione per contatto. . . . .	93
7.1.3. Elettrizzazione per induzione. . . . .	93
7.2. La forza di Coulomb. . . . .	95
7.2.1. Principio di sovrapposizione. . . . .	96
7.3. Il campo elettrico. . . . .	96
7.3.1. Campo elettrico generato da una carica elettrica elementare. . . . .	97
7.3.2. Campo elettrico di un dipolo. . . . .	97
7.4. Le linee di campo. . . . .	99
7.5. La legge di Gauss. . . . .	101
7.5.1. Distribuzione sferica di cariche elettriche. . . . .	104
7.5.2. Distribuzione lineare di cariche elettriche. . . . .	106
7.5.3. Distribuzione piana di cariche elettriche. . . . .	107
7.6. Dal campo alla forza. . . . .	108
7.6.1. Dipolo in un campo elettrico uniforme. . . . .	108
7.6.2. Forza di repulsione fra due piani carichi. . . . .	109
7.7. Il campo elettrico in situazioni varie. . . . .	109
7.7.1. Il campo elettrico generato da un filo carico. . . . .	109
7.7.2. Il campo elettrico generato da un anello carico. . . . .	110
7.7.3. Il campo elettrico generato da un disco carico. . . . .	111
7.8. Energia potenziale della forza elettrica. . . . .	111
7.9. Il potenziale elettrico. . . . .	113
7.10. Relazione fra il campo elettrico ed il potenziale elettrico. . . . .	114
7.11. Il potenziale elettrico in situazioni varie. . . . .	115
7.11.1. Potenziale elettrico di una carica elettrica elementare. . . . .	115
7.11.2. Potenziale elettrico di una sfera carica elettrica. . . . .	115
7.11.3. Potenziale elettrico di un dipolo. . . . .	116
7.11.4. Approssimazione dipolare. . . . .	117
7.11.5. Il potenziale di un filo. . . . .	119
7.11.6. Il potenziale elettrico di un anello. . . . .	119
7.12. Energia potenziale elettrostatica. . . . .	120
7.12.1. Energia elettrostatica di un dipolo in un campo elettrico costante. . . . .	121
7.13. Circuitazione del campo elettrico. . . . .	121
7.13.1. Circuitazione del campo uniforme generato da un piano. . . . .	121
7.13.2. Circuitazione del campo generato da una carica elettrica sferica. . . . .	122
7.14. Discontinuità del campo elettrico. . . . .	122
7.15. Conduttori. . . . .	123
7.16. Capacità. . . . .	126
7.16.1. Capacità di un conduttore sferico. . . . .	126
7.17. Condensatori. . . . .	126
7.17.1. Condensatore sferico. . . . .	128
7.17.2. Condensatore cilindrico. . . . .	129
7.17.3. Energia elettrostatica accumulata in un condensatore. . . . .	129
7.17.4. Forza fra le armature di un condensatore. . . . .	130
7.18. Collegamento di più condensatori. . . . .	131
7.18.1. Collegamento in parallelo. . . . .	131
7.18.2. Collegamento in serie. . . . .	132
7.19. Dielettrici. . . . .	132
7.19.1. Inserimento parziale di un dielettrico. . . . .	136

7.19.2. Inserimento di un conduttore. . . . .	138
7.20. Modello della polarizzazione atomica. . . . .	140
<b>8. Corrente elettrica.</b> . . . .	<b>142</b>
8.1. Intensità di corrente. . . . .	142
8.2. Le leggi di Ohm. . . . .	143
8.3. Modello classico della conduzione elettrica. . . . .	144
8.4. L'effetto Volta. La pila di Volta. . . . .	146
8.5. Generatore di tensione e forza elettromotrice. . . . .	147
8.6. Collegamenti di più resistenze. . . . .	149
8.6.1. Resistenze in serie. . . . .	149
8.6.2. Resistenze in parallelo. . . . .	150
8.7. Scarica e carica di un condensatore. Il circuito RC. . . . .	151
8.7.1. Il processo di scarica. . . . .	151
8.7.2. Il processo di carica. . . . .	152
8.8. Il passaggio di cariche elettriche nelle soluzioni. . . . .	154
8.9. Le leggi di Faraday. . . . .	155
<b>9. Magnetostatica.</b> . . . .	<b>157</b>
9.1. Il campo magnetico. . . . .	158
9.2. Moto di cariche elettriche in un campo magnetico. . . . .	159
9.2.1. Moto circolare uniforme. . . . .	160
9.2.2. Moto elicoidale. . . . .	160
9.2.3. Il selettore di velocità. . . . .	161
9.2.4. Lo spettrometro di massa. . . . .	162
9.2.5. L'effetto Hall. . . . .	162
9.3. Forza magnetica su una corrente elettrica. . . . .	163
9.3.1. Disco di Barlow. . . . .	165
9.4. Forza magnetica su una spira rettangolare. . . . .	165
9.4.1. Galvanometro. . . . .	166
9.5. Le leggi del campo magnetico. . . . .	167
9.5.1. Campo magnetico generato da un filo indefinito. . . . .	168
9.5.2. Forza magnetica fra due fili rettilinei percorsi da una corrente elettrica. . . . .	169
9.5.3. Solenoide rettilineo. . . . .	170
9.5.4. Solenoide toroidale. . . . .	171
9.6. Campo magnetico generato da una corrente elettrica. . . . .	172
9.6.1. Campo magnetico generato da una spira circolare. . . . .	173
9.6.2. Campo magnetico generato da un filo rettilineo. . . . .	174
9.7. Contenuto relativistico della teoria elettromagnetica. . . . .	175
<b>10. Induzione elettromagnetica.</b> . . . .	<b>179</b>
10.1. Un primo esempio. . . . .	179
10.2. Legge di Faraday-Neumann-Lenz. . . . .	180
10.2.1. La legge di Felici. . . . .	181
10.3. Bilancio energetico. . . . .	182
10.4. Applicazioni dell'induzione elettromagnetica. . . . .	183
10.4.1. L'asta rotante. . . . .	183
10.4.2. Spira rotante. Generatore di tensione alternata. . . . .	184
10.5. Autoinduzione. . . . .	185
10.5.1. Induttanza di un solenoide. . . . .	185
10.6. Circuito induttivo in corrente continua. . . . .	185
10.7. Energia magnetica di un circuito. . . . .	186
10.8. Induzione mutua. . . . .	187
10.9. Energia magnetica di due circuiti accoppiati. . . . .	188
10.9.1. Relazione fra $L_1$ , $L_2$ ed $M$ . . . . .	188
<b>11. Circuiti in corrente alternata.</b> . . . .	<b>189</b>
11.1. Circuito resistivo. . . . .	189

11.2. Circuito capacitivo. . . . .	189
11.3. Circuito induttivo. . . . .	190
11.4. Circuito RC in serie. . . . .	191
11.5. Circuito RL in serie. . . . .	193
11.6. Circuito LC in serie. . . . .	194
11.7. Circuito RLC in serie. . . . .	195
11.8. La potenza in corrente alternata. . . . .	197
11.9. Metodo complesso. . . . .	199
<b>12. Campi magnetici nella materia.</b> . . . . .	<b>201</b>
12.1. Diamagneti e paramagneti. . . . .	201
12.2. Ferromagneti. . . . .	204
12.3. Forze fra magneti. . . . .	205
<b>13. Equazioni di Maxwell e onde elettromagnetiche.</b> . . . . .	<b>207</b>
13.1. Il termine mancante. . . . .	207
13.2. Le equazioni di Maxwell e la velocità della luce. . . . .	208
13.3. Onde elettromagnetiche. . . . .	209
<b>Parte IV. Fisica Moderna.</b> . . . . .	<b>213</b>
<b>14. Teoria della relatività.</b> . . . . .	<b>214</b>
14.1. I concetti di spazio e tempo. . . . .	214
14.2. Definizione di simultaneità. . . . .	217
14.3. Trasformazioni di Lorentz. . . . .	221
14.4. Contrazione delle lunghezze e dilatazione dei tempi. . . . .	225
14.5. Trasformazione delle velocità. . . . .	225
14.6. Effetto Doppler relativistico. . . . .	226
14.7. Invarianza dell'intervallo. . . . .	229
14.8. Segnali superluminali e inversioni temporali. . . . .	231
14.9. Quadrivettori e quadrivelocità. . . . .	232
14.10. Quantità di moto relativistica ed energia relativistica. . . . .	233
<b>15. Modelli atomici.</b> . . . . .	<b>238</b>
15.1. Storia del concetto di atomo. . . . .	238
15.2. La natura dell'elettricità. I raggi catodici. . . . .	240
15.3. La carica dell'elettrone. . . . .	243
15.4. Il modello di Thomson. . . . .	244
15.5. Il modello di Rutherford. . . . .	246
15.6. Spettri atomici. . . . .	248
15.7. Modello atomico di Bohr. . . . .	249
<b>16. Meccanica quantistica.</b> . . . . .	<b>252</b>
16.1. Introduzione al problema. Il corpo nero. . . . .	252
16.2. Effetto fotoelettrico. . . . .	255
16.3. Tre esperimenti. . . . .	258
16.4. Il postulato di de Broglie. . . . .	261
16.5. L'effetto Compton. . . . .	263
16.6. Il principio di indeterminazione. . . . .	265
16.7. L'interpretazione probabilistica. . . . .	266
<b>Parte V. Metodi matematici per la fisica</b> . . . . .	<b>269</b>
<b>17. Meccanica.</b> . . . . .	<b>271</b>
17.1. Cinematica. . . . .	271
17.1.1. Esempio. . . . .	272
17.1.2. Moto in coordinate polari. . . . .	273

17.2. Leggi della dinamica. . . . . 275

    17.2.1. Moto uniforme. . . . . 276

    17.2.2. Moto uniformemente accelerato. . . . . 276

    17.2.3. Moto armonico. . . . . 276

    17.2.4. Moto in un fluido viscoso.. . . . 278

17.3. Lavoro ed energia cinetica. . . . . 280

17.4. Energia potenziale e conservazione dell'energia. . . . . 281

17.5. Esempi. . . . . 282

    17.5.1. Forza peso. . . . . 282

    17.5.2. Forza elastica. . . . . 282

    17.5.3. Forza centripeta. . . . . 282

    17.5.4. Forza gravitazionale. . . . . 282

    17.5.5. Forza di Coulomb. . . . . 283

17.6. Relazione fra forza ed energia potenziale. . . . . 283

17.7. Dinamica del moto rotatorio di un punto materiale. . . . . 283

17.8. Forze centrali. . . . . 284

17.9. Dinamica di due punti materiali. Problema di Kepler. . . . . 285

17.10. Oscillazioni smorzate.. . . . 289

17.11. Oscillazioni forzate. . . . . 290

**18. Termodinamica . . . . . 293**

    18.1. Lavoro delle forze di pressione. . . . . 293

    18.2. Energia interna. . . . . 294

        18.2.1. Trasformazioni isocore.. . . . 295

        18.2.2. Trasformazioni isobare. Relazione di Mayer. . . . . 295

    18.3. Equazione delle trasformazioni adiabatiche. . . . . 296

    18.4. Disuguaglianza di Clausius e entropia. . . . . 296

        18.4.1. Calcolo della variazione di entropia in alcuni casi importanti. . . . . 297

**Appendici . . . . . 299**

**A. Costanti fisiche. . . . . 300**

Bibliografia . . . . . 301

Parte I

OSCILLAZIONI E ONDE.

# 1

## MOTI PERIODICI.

---

Esiste in natura un'importante classe di moti che hanno l'interessante proprietà di ripetersi sempre uguali nel tempo. Benché questa sia, in realtà, un'astrazione e un'approssimazione, è noto che, per esempio, il moto della Luna attorno alla Terra o della Terra attorno al Sole sono moti che si ripetono sempre uguali nel tempo. O meglio, si ripetono uguali ogni volta che sia passato un certo tempo  $T$ . Si dicono **periodici** i moti che hanno questa caratteristica e **periodo** il tempo  $T$ .

Piú precisamente un punto si muove di un moto periodico di periodo  $T$  se la sua legge del moto verifica la condizione

$$\mathbf{x}(t + T) = \mathbf{x}(t) \quad (1.1)$$

comunque si scelga l'istante  $t$ .

### 1.1 MOTO ARMONICO.

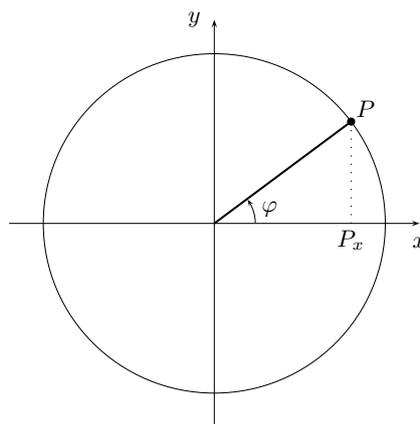
Fra tutti i moti periodici, riveste particolare importanza il **moto armonico**, definito come segue.

*Si dice armonico un moto centrale in cui l'accelerazione sia un vettore proporzionale al vettore posizione, avente la stessa direzione e verso opposto.*

$$\boxed{\mathbf{a} = -\omega^2 \mathbf{x}} \quad (1.2)$$

La costante  $\omega$  è detta *pulsazione* del moto armonico ed ha le dimensioni del reciproco di un tempo:  $[\omega] = \text{s}^{-1}$ .

Per dedurre le proprietà e la legge del moto del moto armonico conviene partire da un'analisi del moto circolare uniforme. Si consideri un punto materiale  $P$  in moto uniforme lungo una traiettoria circolare di raggio  $r$  con velocità angolare  $\omega$  e periodo  $T = 2\pi/\omega$ .



**Figura 1.1:** Moto circolare uniforme.

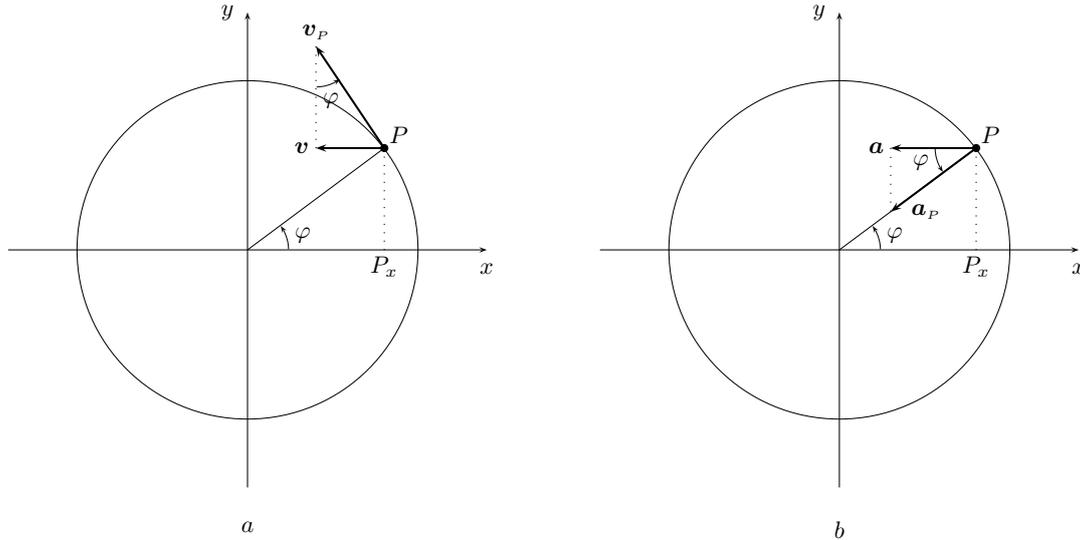
La descrizione di questo moto può essere effettuata mediante la relazione che, con riferimento alla figura 1.1, esprime l'angolo  $\varphi$  in funzione del tempo; se il moto è uniforme la velocità angolare è costante e vale

$$\varphi(t) = \omega t + \theta, \quad (1.3)$$

ove  $\theta$  è l'angolo che descrive la posizione all'istante  $t = 0$ . In termini di  $\varphi$  è possibile esprimere le coordinate  $x$  e  $y$  del punto  $P$  in funzione del tempo come segue

$$\begin{cases} x(t) = r \cos \varphi(t) = r \cos(\omega t + \theta) \\ y(t) = r \sin \varphi(t) = r \sin(\omega t + \theta) . \end{cases} \quad (1.4)$$

Queste due equazioni descrivono le leggi del moto delle proiezioni del punto  $P$  sugli assi. Si consideri ad esempio il punto  $P_x$  trovato proiettando  $P$  sull'asse  $x$  e se ne determinino velocità ed accelerazione. La velocità di  $P_x$  è evidentemente la proiezione sull'asse  $x$  della velocità di  $P$ .



**Figura 1.2:** Proiezione del moto circolare. *a*: la velocità, *b*: l'accelerazione.

Quest'ultima è tangente alla traiettoria, il suo modulo vale  $v_P = \omega r$ , e la sua proiezione lungo l'asse  $x$  può essere scritta nella forma

$$v(t) = -\omega r \sin \varphi(t) . \quad (1.5)$$

Similmente, l'accelerazione di  $P_x$  è la proiezione sull'asse  $x$  dell'accelerazione centripeta  $a_P = \omega^2 r$  del punto  $P$ . Può quindi essere scritta nella forma

$$a(t) = a_P \cos \varphi(t) = -\omega^2 r \cos \varphi(t) . \quad (1.6)$$

I segni meno nelle precedenti equazioni si capiscono osservando i versi di  $r$ ,  $v$  ed  $a$ .

Quindi la componente  $x$  del moto circolare uniforme si muove di moto armonico con pulsazione uguale alla velocità angolare del moto circolare in questione. Evidentemente, il moto armonico così definito ha lo stesso periodo del moto circolare. Com'è ben noto, se  $\omega$  è la velocità angolare, il periodo del moto circolare si può scrivere nella forma  $T = 2\pi/\omega$ ; tale quindi è il periodo del moto armonico ove, nel presente contesto,  $\omega$  è la pulsazione.

Tutto ciò può essere generalizzato per qualunque moto armonico. È possibile riassumere quanto trovato come segue.

- a) Il moto armonico di pulsazione  $\omega$  è un moto oscillatorio simmetrico attorno ad una posizione di equilibrio, detta *centro del moto armonico* in cui posizione, velocità ed accelerazione variano nel tempo secondo le seguenti equazioni

$$\begin{cases} x(t) = A \cos(\omega t + \theta) \\ v(t) = -A\omega \sin(\omega t + \theta) \\ a(t) = -A\omega^2 \cos(\omega t + \theta) . \end{cases} \quad (1.7)$$

b) Il moto armonico di pulsazione  $\omega$  è un moto periodico di periodo

$$T = \frac{2\pi}{\omega}, \quad (1.8)$$

che rappresenta il tempo impiegato a compiere un'oscillazione completa.

### Osservazioni

1. La costante  $A$ , detta *ampiezza*, è la massima distanza cui il punto materiale in moto armonico si possa trovare dal centro delle sue oscillazioni armoniche.
2. Si osservi che la velocità di un moto armonico è massima quando la sua accelerazione è nulla e viceversa è nulla quando l'accelerazione è massima.
3. Ogni moto armonico è sempre un moto periodico, in generale non è affatto vero che un moto periodico sia anche armonico; ad esempio il moto circolare uniforme è senz'altro periodico ma non armonico.
4. La costante  $\theta$  che appare nelle equazioni (1.7), è anche detta *fase* del moto armonico; viene espressa in radianti e dà informazioni circa la posizione dell'oscillatore all'istante  $t = 0$  s. Per esempio, porre  $\theta = \pi/2$ , nella prima delle (1.7), corrisponde ad un'oscillazione che all'istante  $t = 0$  s si trova nel centro con accelerazione nulla e velocità massima.
5. Il numero delle oscillazioni compiute nell'unità di tempo è detta *frequenza*; viene indicata con la lettera greca  $\nu$ . La frequenza è legata al periodo del moto dalla relazione

$$\nu = \frac{1}{T}. \quad (1.9)$$

L'unità di misura della frequenza è l'hertz<sup>1</sup> (simbolo Hz), e le sue dimensioni sono quelle del reciproco di un tempo:  $[\nu] = \text{s}^{-1}$ . La relazione fra pulsazione e frequenza, com'è facile dimostrare è data da

$$\omega = 2\pi\nu. \quad (1.10)$$

## 1.2 IL MOTO ELASTICO.

L'esempio più semplice di moto armonico è quello di un moto prodotto da una forza elastica di richiamo. Tale forza è quella prodotta, per esempio, da una molla che, se allungata o compressa a partire dalla sua posizione di equilibrio, esercita una forza di richiamo, detta *forza elastica*, che tende a riportare la molla nella sua posizione originaria che è proporzionale alla deformazione subita. Ciò è espresso dalla legge di Hooke<sup>2</sup>

$$\mathbf{F} = -k\mathbf{x}. \quad (1.11)$$

La costante  $k$  dipende dalla molla utilizzata ed è detta *costante elastica* della molla, la sua dimensione è quella di una forza fratto una distanza:  $[k] = \text{N s}^{-1} = \text{kg s}^{-2}$ .

Si supponga che un corpo di massa  $m$  comprima di una distanza  $A$  una molla di costante elastica  $k$  e massa trascurabile; la molla imprime al corpo una forza e quindi un'accelerazione che può essere agevolmente calcolata per mezzo della seconda legge di Newton<sup>3</sup>:

$$-k\mathbf{x} = m\mathbf{a} \quad \longrightarrow \quad \mathbf{a} = -\frac{k}{m}\mathbf{x}. \quad (1.12)$$

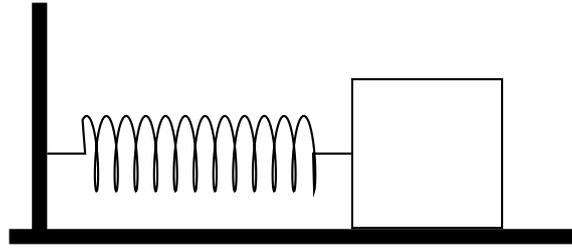
Il moto risultante è pertanto un moto armonico di pulsazione

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}. \quad (1.13)$$

<sup>1</sup> Heinrich Rudolph Hertz (1857-1894), fisico tedesco.

<sup>2</sup> Robert Hooke (1635-1703), fisico inglese.

<sup>3</sup> Isaac Newton (1642-1727), scienziato inglese



**Figura 1.3:** La forza elastica.

Quindi le leggi di un tale moto sono:

$$\begin{cases} x(t) = A \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}} t + \theta\right) \\ v(t) = -A\sqrt{\frac{k}{m}} \operatorname{sen}\left(\sqrt{\frac{k}{m}} t + \theta\right) \\ a(t) = -A\frac{k}{m} \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}} t + \theta\right) . \end{cases} \quad (1.14)$$

Questo semplice esempio viene ora utilizzato per fare delle considerazioni energetiche da estendere poi, in tutta generalità, ad un moto armonico arbitrario. Per far ciò si determinano le energie cinetica e potenziale del sistema costituito dalla molla e dalla massa oscillanti di figura 1.3.

L'energia cinetica è data da

$$\mathcal{E}_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mA^2 \frac{k}{m} \operatorname{sen}^2\left(\sqrt{\frac{k}{m}} t + \theta\right) = \frac{1}{2}kA^2 \operatorname{sen}^2\left(\sqrt{\frac{k}{m}} t + \theta\right) , \quad (1.15)$$

mentre l'energia potenziale è data da

$$U = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2 \cos^2\left(\sqrt{\frac{k}{m}} t + \theta\right) . \quad (1.16)$$

È possibile così calcolare l'energia totale conservata:

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_c + U = \frac{1}{2}kA^2 = \frac{m}{2}\omega^2 A^2 . \quad (1.17)$$

Questo risultato naturalmente vale solo per la forza elastica. Si può però generalizzare a qualsiasi moto armonico la dipendenza dell'energia totale dal quadrato della pulsazione e dal quadrato dell'ampiezza.

### Osservazioni

1. Il fatto che per la forza elastica di una molla valga la legge di Hooke (1.11) è vero solo approssimativamente per le molle reali, ed il comportamento reale si discosta tanto più da quello ideale quanto più è grande la deformazione della molla.

## 1.3 COMPOSIZIONE DI MOTI ARMONICI DI UGUAL PULSAZIONE.

Si supponga che un corpo compia contemporaneamente due moti armonici con la stessa pulsazione ma, in generale, ampiezza e fasi diverse. Si può per esempio pensare ad un corpo di massa  $m$  muoventesi sotto l'azione simultanea di due molle aventi la stessa costante elastica, ma tale che i due moti siano sfasati. I moti da comporre hanno le seguenti equazioni:

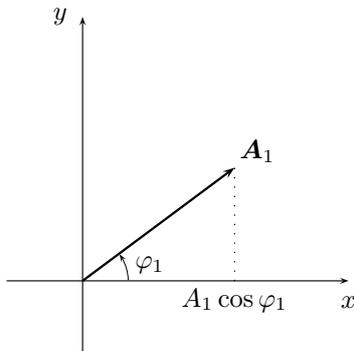
$$x_1(t) = A_1 \cos(\omega t + \theta_1) \quad , \quad x_2(t) = A_2 \cos(\omega t + \theta_2) . \quad (1.18)$$

Il moto risultante ha equazione

$$x(t) = A_1 \cos(\omega t + \theta_1) + A_2 \cos(\omega t + \theta_2) . \quad (1.19)$$

Per capire che tipo di moto sia questo, se sia ancora armonico e nel caso che lo sia, quali siano la sua pulsazione, la sua ampiezza e la sua fase, occorre eseguire la somma.

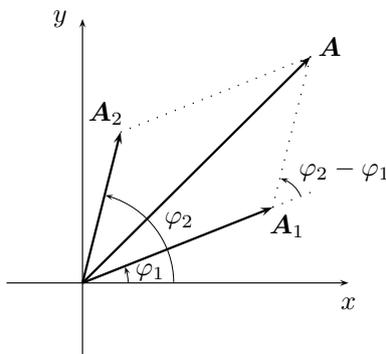
Il modo piú semplice di fare tale somma è di ricordare che ogni moto armonico può essere pensato come la proiezione di un moto circolare uniforme.



**Figura 1.4:** Vettore rotante.

Si pensi, piú precisamente, al moto armonico di pulsazione  $\omega$  come alla proiezione sull'asse delle ascisse di un *vettore rotante* con velocità angolare uniforme  $\omega$ . In figura 1.4 è rappresentato, a titolo esemplificativo, il primo moto armonico della (1.19).

Si considerino quindi i due moti dell'equazione (1.19) rappresentate da due diversi vettori rotanti.



**Figura 1.5:** Somma di due moti armonici diversi.

Dall'esame attento della figura 1.5, si ottiene il moto armonico risultante

$$x(t) = A \cos \varphi \quad (1.20)$$

ove

$$\begin{aligned} A^2 &= A_1^2 + A_2^2 - 2A_1A_2 \cos[\pi - (\varphi_2 - \varphi_1)] = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1) = \\ &= A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\theta_2 - \theta_1) \end{aligned} \quad (1.21)$$

e

$$\tan \varphi = \frac{A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2}{A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2} . \quad (1.22)$$

Nel caso particolare in cui i due moti armonici abbiano la medesima ampiezza, cioè  $A_1 = A_2$ , si trova

$$A^2 = 2A_1^2 [1 + \cos(\theta_2 - \theta_1)] \quad \longrightarrow \quad A = 2A_1 \cos \frac{1}{2}(\theta_2 - \theta_1) \quad (1.23)$$

$$\tan \varphi = \tan \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} \quad \longrightarrow \quad \varphi = \omega t + \frac{\theta_1 + \theta_2}{2} \quad (1.24)$$

Si è così trovato che la composizione di due moti armonici aventi la stessa pulsazione è ancora un moto armonico la cui ampiezza, pulsazione e fase sono dati dalle equazioni scritte sopra. Si noti che, nel caso di medesima ampiezza, la pulsazione è la stessa dei due moti componenti. Nel caso generale tuttavia la situazione è più complessa.

Si osservi che l'ampiezza del moto armonico risultante dipende oltre che dalle ampiezze dei moti componenti anche dalla loro differenza di fase  $\theta_2 - \theta_1$ . In particolare quando la differenza di fase è un multiplo dispari di  $2\pi$  l'ampiezza risultante è massima e vale  $A = A_1 + A_2$ ; si dice in questo caso che i due oscillatori sono *in fase* e la loro composizione viene detta *interferenza costruttiva*. Viceversa se la differenza di fase è un multiplo intero di  $\pi$  l'ampiezza risultante è minima e vale  $A = |A_1 - A_2|$ ; si dice in questo caso che gli oscillatori sono *in opposizione di fase* e la loro composizione viene detta *interferenza distruttiva*.

#### 1.4 COMPOSIZIONE DI MOTI ARMONICI CON PULSAZIONE DIVERSA.

Il problema di comporre due moti armonici con pulsazione diversa non ammette una semplice soluzione. In generale il moto composto

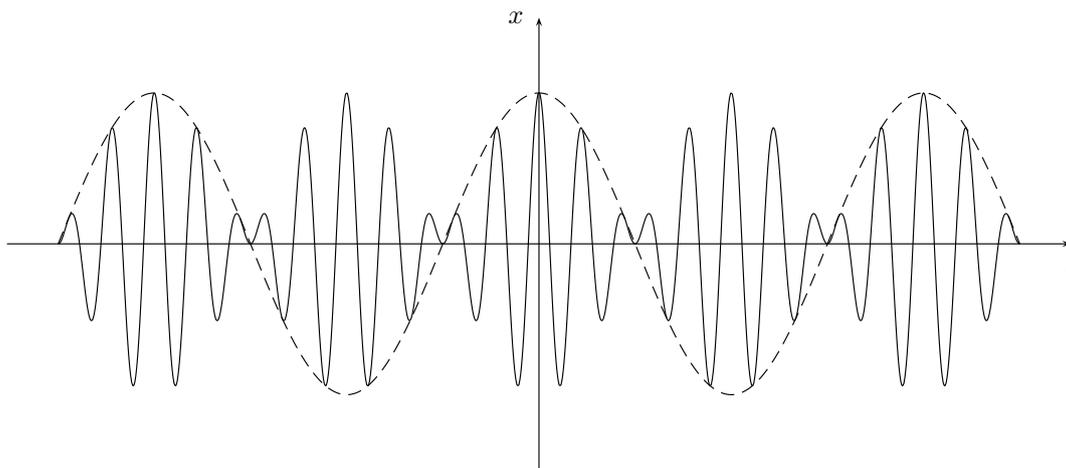
$$x(t) = x_1(t) + x_2(t) = A_1 \cos(\omega_1 t + \theta_1) + A_2 \cos(\omega_2 t + \theta_2) \quad (1.25)$$

non è armonico. Inoltre si può dimostrare, che se  $\omega_1$  ed  $\omega_2$  non sono numeri commensurabili, non è nemmeno periodico.

Più spesso si presenta il problema inverso, quello di scrivere un dato un moto periodico come somma di moti armonici di diverse pulsazioni. Il problema è risolto dal *teorema di Fourier*<sup>4</sup> che afferma che qualsiasi moto periodico  $x(t)$  di periodo  $T$  può essere scritto come una somma di infiniti termini della forma

$$x(t) = a_0 + a_1 \cos(\omega t + \theta_1) + a_2 \cos(2\omega t + \theta_2) + a_3 \cos(3\omega t + \theta_3) + \dots \quad (1.26)$$

La pulsazione del primo addendo armonico è data da  $\omega = 2\pi/T$  e tale primo termine è detto armonico fondamentale; i termini successivi con pulsazioni multiple di  $\omega$  sono detti armonici superiori.



**Figura 1.6:** Il fenomeno dei battimenti.

Questa somma prende il nome di *serie armonica* di Fourier. Il teorema di Fourier fornisce anche

<sup>4</sup> Jean Baptiste Fourier (1768-1830) fisico matematico francese.

il metodo analitico di calcolo delle ampiezze e delle fasi di ciascun armonico, su cui non è il caso di soffermarci qui.

Il caso particolare in cui i moti da comporre sono due con pulsazioni non molto diverse e uguali ampiezze, consente una semplice e molto interessante soluzione approssimata. Si considerino infatti i due moti

$$x_1(t) = a \cos(\omega_1 t + \theta_1) \quad , \quad x_2(t) = a \cos(\omega_2 t + \theta_2) \quad , \quad (1.27)$$

Allora, usando le formule prostaferesi, la composizione dà

$$x(t) = 2a \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t + \frac{\theta_1 - \theta_2}{2}\right) \cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t + \frac{\theta_1 + \theta_2}{2}\right) = A(t) \cos(\omega t + \theta) \quad , \quad (1.28)$$

con

$$A(t) = 2a \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t + \frac{\theta_1 - \theta_2}{2}\right) \quad , \quad \omega = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \quad , \quad \theta = \frac{\theta_1 + \theta_2}{2} \quad . \quad (1.29)$$

Si è così ottenuto un moto armonico con pulsazione uguale alla media aritmetica delle pulsazioni componenti, che per pulsazioni molto simili risulta simile ad entrambe, ma con ampiezza variabile, anch'essa in modo armonico con una pulsazione molto piccola rispetto alle pulsazioni componenti. L'andamento del moto risultante è rappresentato in figura 1.6, ove è stato rappresentato il grafico della composizione dei moti armonici di equazioni  $x(t) = \cos 4t$  e  $x(t) = \cos 5t$ ; tratteggiato è rappresentato il grafico anche il grafico della variazione armonica dell'ampiezza; l'intervallo di variabilità rappresentato è  $-5\pi \leq t \leq 5\pi$ . La frequenza del grafico tratteggiato di è detta frequenza di **battimento** e *battimenti*, sono dette variazioni periodiche dell'ampiezza di oscillazione. Nel caso le oscillazioni siano vibrazioni acustiche, l'orecchio percepisce oltre alla frequenza principale, anche la più bassa frequenza di battimento.

Si dice anche che l'oscillazione di frequenza maggiore è *modulata* dalla frequenza di battimento

## 1.5 MOTI ARMONICI SU ASSI ORTOGONALI.

Si consideri un punto materiale che compia simultaneamente due moti armonici di ugual pulsazione sugli assi cartesiani ortogonali, per esempio perché sottoposto all'azione simultanea di due molle; le equazioni cartesiane del moto del punto sono:

$$\begin{cases} x = a \cos \omega t \\ y = b \cos(\omega t + \theta) \end{cases} \quad , \quad (1.30)$$

Si vuole trovare la traiettoria del moto risultante; per farlo è necessario eliminare la variabile tempo dalle equazioni sopra scritte.

$$\begin{cases} \frac{x}{a} = \cos \omega t & \longrightarrow & \text{sen } \omega t = \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \\ \frac{y}{b} = \cos(\omega t + \theta) = \cos \omega t \cos \theta - \text{sen } \omega t \text{sen } \theta \end{cases} \quad , \quad (1.31)$$

sostituendo la seconda nella prima

$$\frac{y}{b} = \frac{x}{a} \cos \theta - \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \text{sen } \theta \quad (1.32)$$

ed elevando al quadrato

$$\frac{x^2}{a^2} \cos^2 \theta - 2 \frac{xy}{ab} \cos \theta + \frac{y^2}{b^2} = \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) \text{sen}^2 \theta \quad ; \quad (1.33)$$

da cui, riordinando, si ottiene facilmente

$$\frac{x^2}{a^2} - 2 \frac{xy}{ab} \cos \theta + \frac{y^2}{b^2} = \text{sen}^2 \theta \quad (1.34)$$

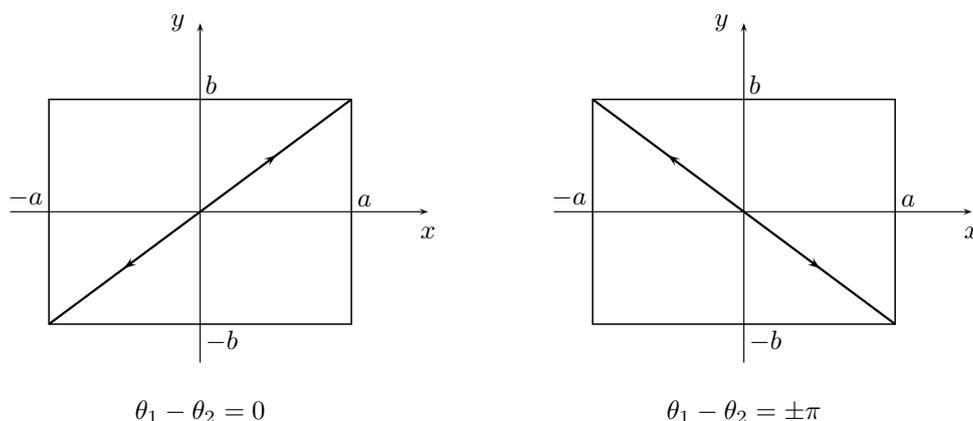
che è l'equazione di un'ellisse con il centro nell'origine degli assi. Il moto risultante viene detto *moto armonico ellittico*. Si osservi che  $\theta$  è la differenza di fase dei due oscillatori. In effetti è possibile dimostrare, e viene lasciato come esercizio al lettore studioso e paziente, che se i due moti armonici hanno entrambi una fase:

$$x = a \cos(\omega t + \theta_1) \quad , \quad y = b \cos(\omega t + \theta_2) \quad , \quad (1.35)$$

l'equazione dell'ellisse diventa

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 2 \frac{xy}{ab} \cos(\theta_1 - \theta_2) = \sin^2(\theta_1 - \theta_2) . \quad (1.36)$$

Con il conforto di questo fatto, è possibile in modo del tutto generale ragionare in termini di differenza di fase. Dalle (1.35) è chiaro che il punto del punto materiale è confinato in un rettangolo avente il centro nell'origine e lati  $2a$  e  $2b$ .

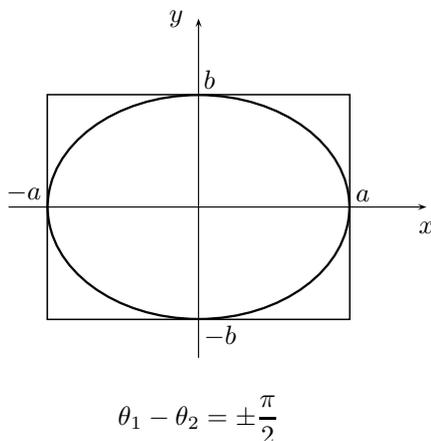


**Figura 1.7:** Ellisse degenera in un segmento.

Se la differenza di fase vale  $0$  o  $\pm\pi$ , cioè se i due oscillatori sono in fase od in opposizione di fase, l'ellisse degenera nei segmenti di retta di equazione (figura 1.7)

$$\left(\frac{x}{a} \pm \frac{y}{b}\right)^2 = 0 \quad \longrightarrow \quad y = \pm \frac{b}{a}x \quad (1.37)$$

ed il punto materiale percorre la una diagonale del rettangolo con un moto armonico semplice di pulsazione  $\omega$  ed ampiezza  $A = \sqrt{a^2 + b^2}$ .



**Figura 1.8:** Ellisse con assi paralleli agli assi cartesiani.

Se la differenza di fase è  $\pm\pi/2$  l'equazione dell'ellisse diviene ed equazione (figura 1.8)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (1.38)$$

Si tratta di un'ellisse con gli assi paralleli agli assi cartesiani che viene percorsa in senso antiorario od orario a seconda che la differenza di fase sia positiva o negativa (Il lettore studioso trovi una dimostrazione di quest'ultima affermazione).

Se, in particolare,  $a = b$  allora l'ellisse è un cerchio ed il moto del punto è circolare uniforme e la sua legge può essere ricavata dalle (1.30):

$$\begin{cases} x = a \cos \omega t \\ y = a \cos \left( \omega t \pm \frac{\pi}{2} \right) \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x = a \cos \omega t \\ y = a \operatorname{sen}(\mp \omega t) \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x = a \cos \omega t \\ y = \mp a \operatorname{sen} \omega t \end{cases} \quad (1.39)$$

Si osservi, per concludere, che se, come visto sopra, un moto circolare uniforme si può sempre scomporre in due moti armonici ortogonali, allo stesso modo un moto armonico si può scomporre in due moti circolari di verso opposto. Si considerino infatti i due moti circolari di equazioni cartesiane

$$\begin{cases} x = \frac{A}{2} \cos \omega t \\ y = \frac{A}{2} \operatorname{sen} \omega t \end{cases}, \quad \begin{cases} x = \frac{A}{2} \cos \omega t \\ y = -\frac{A}{2} \operatorname{sen} \omega t \end{cases} \quad (1.40)$$

Si osservi che i due moti possono essere pensati come aventi pulsazione di segno opposto e quindi ruotano in versi opposti. Componendoli si ottiene facilmente:

$$\begin{cases} x = A \cos \omega t \\ y = 0 \end{cases} \quad (1.41)$$

che è evidentemente un moto armonico semplice.

# 2

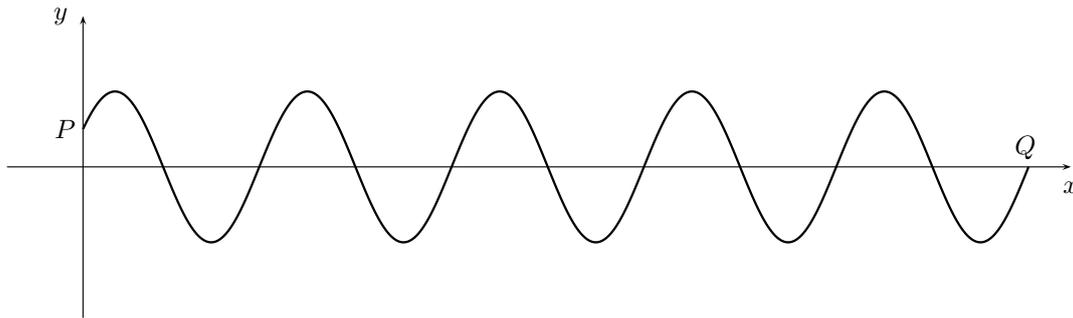
## PROPAGAZIONE DELLE ONDE.

---

Si comincia qui ad indagare il fenomeno ondoso. È esperienza comune che certi materiali consentono attraverso di sé la propagazione di onde. Un esempio ovvio è costituito dalle onde del mare. Esse sono tuttavia un fenomeno piuttosto complesso e conviene cominciare lo studio dei fenomeni ondosi a partire da qualcosa di più semplice.

### 2.1 ONDE SU DI UNA CORDA.

Si consideri una corda tesa agli estremi che venga sollecitata con una forza che ne turbi la configurazione di equilibrio. Si può facilmente sperimentare che, in simili condizioni, la perturbazione si propaga lungo la corda. Evidentemente non c'è trasporto di materia in questa propagazione (come non c'è trasporto di materia nelle onde del mare), si dice **onda** la propagazione di questa perturbazione. Per indagare in modo più efficace il fenomeno, si supponga che la perturbazione sia costituita dal moto oscillatorio armonico di uno degli estremi.



**Figura 2.1:** Onda propagantesi su di una corda generata dal moto oscillatorio del suo estremo  $P$ .

Con riferimento alla figura 2.1, si supponga che la corda giaccia sull'asse delle ascisse con l'estremo  $P$  sull'origine, e che, fissato l'altro estremo  $Q$ , si faccia oscillare  $P$  lungo l'asse  $y$  con la legge armonica

$$y = A \cos(\omega t + \theta), \quad (2.1)$$

si sta cioè supponendo che l'oscillazione di  $P$  abbia ampiezza  $A$ , pulsazione  $\omega$  e fase iniziale  $\theta$ . Si vuole descrivere la propagazione di questo moto armonico di  $P$  lungo la corda; sia  $v$  la velocità di tale propagazione, cioè la velocità dell'onda. Allora la perturbazione generata nell'origine ad un certo istante arriva nella posizione  $x$   $t' = x/v$  secondi dopo. Quindi al generico istante  $t$  nella posizione  $x$  la perturbazione  $y$  della corda ha lo stesso valore che aveva nell'origine  $t'$  secondi prima. Ma poiché la perturbazione all'origine è data dalla (2.1), all'istante  $t$  in  $x$  si trova

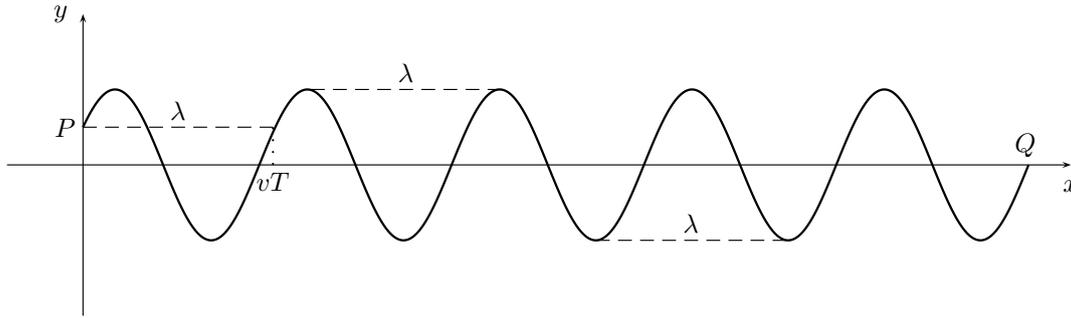
$$y(t, x) = A \cos[\omega(t - t') + \theta] = A \cos \left[ \omega \left( t - \frac{x}{v} \right) + \theta \right]. \quad (2.2)$$

Si noti che si può pensare alla (2.2) come ottenuta dalla (2.1) mediante una traslazione temporale di un intervallo di tempo  $t'$ . Per interpretare il senso fisico di questa equazione conviene ricordare che la pulsazione del moto armonico si può esprimere in termini del periodo nella forma  $\omega = 2\pi/T$  e definire la quantità  $\lambda = 2\pi v/\omega = vT$ . Vale allora

$$y(t, x) = A \cos \left[ 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) + \theta \right]. \quad (2.3)$$

L'equazione (2.3) rappresenta la posizione di ogni punto della corda oscillante in ogni istante di tempo e permette quindi di ricostruire in ogni istante la forma dell'onda; per questo viene detta **funzione d'onda**.

$\lambda$  è una grandezza avente le dimensioni di una lunghezza e, per definizione, è la distanza percorsa dall'onda nel tempo  $T$ . Il suo significato fisico si ricava dall'analisi seguente. All'istante  $t = 0$  nell'origine, cioè per  $x = 0$ , il punto  $P$  si trova in  $y = A \cos \theta$  in una posizione che dipende cioè dalla fase iniziale. Dopo un periodo, cioè all'istante  $T$ ,  $P$  deve trovarsi nuovamente nella medesima posizione e nello stesso tempo la deformazione si è propagata per una distanza  $vT$ , cioè per una distanza  $\lambda$ . Quindi a distanza  $\lambda$  dall'origine, in ogni istante  $t$ , la deformazione dell'onda ha lo stesso valore della deformazione all'origine; quindi  $\lambda$  è la distanza fra due punti successivi in cui l'onda ha la stessa deformazione, per esempio due creste o due ventri. Per questo  $\lambda$  viene detta **lunghezza d'onda**.



**Figura 2.2:** Rappresentazione della lunghezza d'onda.

La lunghezza d'onda può essere considerata il *periodo spaziale* dell'onda, infatti due punti che distino un numero intero di lunghezze d'onda hanno sempre lo stesso valore di  $y$ ; per vederlo si considerino due punti di ascissa  $x$  e  $x + n\lambda$ , con  $n$  intero, vale

$$\begin{aligned} y(t, x + n\lambda) &= A \cos \left[ 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{x + n\lambda}{\lambda} \right) + \theta \right] = A \cos \left[ 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) + \theta + 2\pi n \right] = \\ &= A \cos \left[ 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) + \theta \right] = y(t, x) \quad \forall t . \end{aligned} \quad (2.4)$$

Due punti che abbiano tale proprietà si dicono oscillare *in fase*. Similmente si può mostrare che due punti che distano un numero dispari di mezze lunghezze d'onda hanno in ogni istante opposto valore di  $y$ . Vale cioè

$$y \left[ t, x + (2n + 1) \frac{\lambda}{2} \right] = -y(t, x) \quad \forall t . \quad (2.5)$$

Due punti che abbiano tale proprietà si dicono oscillare *in opposizione di fase*.

Si osservi che

$$\lambda = vT \quad \longrightarrow \quad v = \frac{\lambda}{T} = \lambda \nu . \quad (2.6)$$

Quindi per un'onda la velocità di propagazione è data dal prodotto della frequenza di oscillazione e la lunghezza d'onda. Ora la velocità dipende dal mezzo in cui l'onda si propaga (si veda anche il paragrafo seguente) ed è quindi una costante,  $\nu$  e  $\lambda$  sono quindi inversamente proporzionali.

### Osservazioni

1. Le onde che, come quelle studiate in questo paragrafo, sono generate da un moto armonico si dicono *onde armoniche*. Evidentemente, esistono in natura onde che non sono affatto armoniche. Queste hanno una funzione d'onda del tutto simile, nella struttura, alla (2.3), ma al posto della funzione coseno è presente una diversa funzione  $f$ ; pertanto, in generale si ha:

$$y(t, x) = Af \left[ 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) + \theta \right] . \quad (2.7)$$

In queste note verranno prese in considerazione solo le onde armoniche.

2. Ricordando che  $\cos \alpha = \sin(\alpha + \pi/2)$  è possibile, cambiando il valore della fase iniziale, scrivere la funzione d'onda in termini del seno

$$y(t, x) = A \cos \left[ 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) + \theta \right] = A \sin \left[ 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) + \theta' \right], \quad (2.8)$$

con  $\theta' = \theta + \pi/2$ .

## 2.2 VELOCITÀ DI UN'ONDA SU UNA CORDA.

Si consideri una corda inestensibile tesa con tensione  $\tau$  e sia  $\mu$  la sua densità, che si suppone uniforme. Si supponga inoltre che, in seguito ad una sollecitazione da parte di una forza esterna, si formi un'onda che si propaga lungo la corda stessa. Si vuole determinare quale sia la velocità di tale onda.

Si comincia ad indagare da che cosa tale velocità può dipendere e a fare un'analisi dimensionale. È chiaro che può dipendere solo dalle grandezze in gioco, cioè la tensione e la densità del filo. Un esperimento fatto con qualsiasi fune sufficientemente lunga, permette di vedere che tutte le onde prodotte si muovono alla stessa velocità e che essa è tanto maggiore quanto maggiore è la tensione e tanto minore quanto maggiore è la densità.

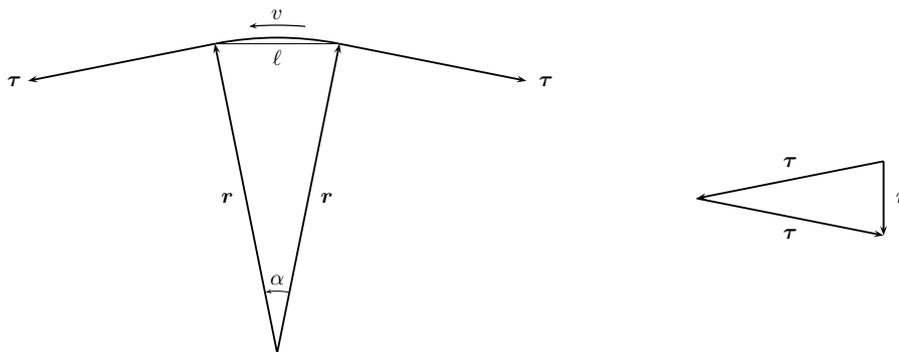
Si supponga quindi, in seguito alla questa euristica sperimentale, che la velocità cercata dipenda solo da  $\tau$  e da  $\mu$ . Una semplice analisi dimensionale dice che

$$[\tau] = \text{N} = \text{kg m s}^{-2}, \quad [\mu] = \text{kg m}^{-1} \quad (2.9)$$

e quindi l'unica combinazione di queste grandezze che abbia le dimensioni di una velocità è la radice quadrata del rapporto di  $\tau$  e  $\mu$ ; si può quindi concludere che deve valere la seguente relazione (a meno di costanti adimensionali):

$$v = \sqrt{\frac{\tau}{\mu}}, \quad (2.10)$$

relazione che, oltre a tornare dal punto di vista dimensionale, accoglie anche le nostre osservazioni sperimentali: infatti si vede che  $v$  aumenta con  $\tau$  e diminuisce con  $\mu$ .



**Figura 2.3:** Il modello di propagazione di un'onda sulla corda.

È ora necessario costruire un modello che permetta di dedurre la formula ora trovata ottenendone così una conferma teorica. A tale scopo conviene mettersi nel sistema di riferimento in cui l'onda è ferma e la corda si muove; in tale sistema di riferimento cioè si vede un'onda ferma lungo la quale scorre la corda verso sinistra invece di un'onda che si propaga verso destra lungo una corda ferma.

Si consideri quindi una piccola porzione di questa corda, come in figura 2.3: se il tratto di corda

considerato è sufficiente piccolo, *qualunque sia la forma dell'onda*, è possibile approssimarlo mediante un arco di circonferenza di lunghezza  $\ell$  data e affermare che quel tratto di corda sta percorrendo un moto circolare uniforme di raggio  $r$  uguale al raggio di curvatura della corda nel punto considerato. Tale tratto di corda è sottoposto, da entrambi i lati, alla sola tensione del filo, quindi la forza totale agente  $\mathbf{F}$  è la somma vettoriale delle due tensioni. Osservando la similitudine dei due triangoli isosceli di identica apertura  $\alpha$  formati uno dai due raggi insistenti sugli estremi del tratto di corda in questione e l'altro dalle due tensioni e dalla forza risultante, si può concludere (qui si sta approssimando l'arco di lunghezza  $\ell$  con la corda ad esso sottesa, cosa che è corretta se, come qui si sta supponendo, il trattino di corda considerato è molto piccolo):

$$\frac{F}{\tau} = \frac{\ell}{r} \quad \longrightarrow \quad F = \frac{\ell}{r} \tau . \quad (2.11)$$

Ora tale forza, per la seconda legge di Newton, deve uguagliare il prodotto della massa per l'accelerazione del nostro pezzettino di corda; ma la massa può essere scritta come il prodotto fra la densità lineare e la lunghezza, mentre l'accelerazione è quella del moto circolare uniforme. In definitiva:

$$ma = \mu \ell \frac{v^2}{r} ; \quad (2.12)$$

e quindi

$$\frac{\ell}{r} \tau = \mu \ell \frac{v^2}{r} \quad (2.13)$$

da cui si può facilmente dedurre la relazione (2.10). Resta così confermato che la velocità di un'onda lungo una corda non dipende né dalla forma dell'onda, né della forza esterna, ma solo dalle caratteristiche fisiche della corda. Questa conclusione, qui dimostrata nel caso di un'onda che si propaga lungo una corda, è vera in generale.

*La velocità di una qualsiasi onda dipende solo dalle caratteristiche fisiche del mezzo in cui l'onda si propaga.*

### 2.3 GENERALITÀ SULLE ONDE.

Nella discussione svolta sopra si è trovato che una corda tesa è capace di trasportare sollecitazioni meccaniche trasversali alla sua lunghezza con una velocità che dipende solo dalle caratteristiche della corda; che se la sollecitazione è armonica con ampiezza  $A$  e pulsazione  $\omega$  ogni porzione della corda oscilla con la medesima ampiezza e la medesima pulsazione; che in ogni istante la forma della corda è quella di una cosinusoide.

Onde di questo tipo, come le onde del mare, in cui la direzione dell'oscillazione è *perpendicolare* alla direzione di propagazione vengono dette **onde trasversali**. Viceversa le onde in cui la direzione di oscillazione è *parallela* alla direzione di propagazione vengono dette **onde longitudinali**.

Esempi di onde longitudinali sono le onde sonore ed in generali tutte le onde di compressione propagantesi in materiali elastici. La situazione può essere visualizzata immaginando una lunga molla che venga compressa ad una estremità mentre tutto il resto della molla rimane a riposo: quando la parte compressa si distende va a comprimere la porzione di molla adiacente che, a sua volta, distendendosi va a comprimere una nuova porzione di molla. Così la deformazione della molla oscilla longitudinalmente propagandosi lungo la molla. Una cosa simile accade, per esempio, nella propagazione del suono nell'aria, come si vedrà più sotto, e per certe onde sismiche.

Le proprietà caratteristiche di un'onda si possono riassumere nelle seguenti.

- **periodo**  $T$  l'intervallo di tempo che separa due istanti in cui, in una data posizione, la deformazione è identica;
- **frequenza**  $\nu$  il numero di oscillazioni compiute da un punto qualsiasi del sistema nell'unità di tempo;
- **ampiezza**  $A$  il massimo spostamento dalla posizione di equilibrio;

- **lunghezza** d'onda  $\lambda$  la distanza che separa due punti in cui il sistema ha, in ogni istante, la stessa deformazione, tali punti sono detti oscillare in fase.
- **velocità**  $v$ , è la velocità con cui la deformazione si propaga nel mezzo, e valgono le relazioni

$$v = \frac{\lambda}{T} = \lambda\nu . \quad (2.14)$$

- **funzione d'onda** la legge di propagazione dell'onda che è data dalla

$$y(t, x) = A \cos \left[ 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) + \theta \right] = A \cos \left[ \frac{2\pi}{\lambda} (x - vt) - \theta \right] . \quad (2.15)$$

Nell'ultima espressione la funzione d'onda è stata scritta esplicitando la dipendenza dalla velocità; si osservi che la formula scritta è valida per un'onda che si propaghi lungo l'asse delle  $x$  nel verso delle  $x$  crescenti. Nel caso di propagazione in verso opposto è necessario, come al solito, cambiare il segno della velocità e si ha

$$y(t, x) = A \cos \left[ \frac{2\pi}{\lambda} (x + vt) - \theta \right] . \quad (2.16)$$

Le onde si distinguono ulteriormente in riferimento al numero delle dimensioni spaziali coinvolte nella propagazione. Si dicono *unidimensionali* le onde che si propagano lungo un mezzo unidimensionale, come una corda; si dicono *bidimensionali* le onde che si propagano su di un mezzo bidimensionale, per esempio le onde sulla superficie di un liquido; *tridimensionali* le onde propagantesi nello spazio, come il suono. Nel caso di onde bi- o tridimensionali, in ogni istante c'è un insieme di punti, tutti egualmente distanti dalla sorgente delle onde, in cui la perturbazione ha lo stesso valore: è, per così dire, l'insieme dei punti dove è arrivata l'onda nella sua propagazione; l'insieme di tutti questi punti viene detto **fronte d'onda**. Il fronte d'onda è una linea nel caso di onde bidimensionali e una superficie nel caso di onde tridimensionali. Si considerino i seguenti esempi che forse chiariscono il punto. Un sasso buttato sulla superficie dell'acqua calma di un lago produce, com'è noto, delle onde circolari concentriche nel punto in cui è caduto il sasso; in questo caso le onde sono bidimensionali ed il fronte d'onda è la circonferenza dell'onda più esterna. Il suono prodotto da un uccello che canta su un ramo è costituito da un insieme di onde sferiche concentriche nella gola dell'uccello, ed il fronte d'onda è la superficie della sfera più esterna. Si possono così classificare le onde anche con riferimento alla forma dei fronti d'onda: si dicono *sferiche* le onde tridimensionali il cui fronte d'onda è una superficie sferica; *piane* le onde tridimensionali il cui fronte d'onda è una superficie piana; *circolari* le onde bidimensionali il cui fronte d'onda sia una circonferenza; *rettilinee* le onde bidimensionali il cui fronte d'onda sia una retta.

## 2.4 ENERGIA TRASPORTATA DA UN'ONDA.

Un'onda, come si è detto, non trasporta materia ma energia; il procedimento che porta alla determinazione di tale energia è analogo a quello che, alla fine del paragrafo 1.2 della parte II, ha portato all'energia totale di un moto elastico. Si consideri, come fatto in precedenza, la propagazione di un'onda di equazione

$$y(t, x) = A \cos \left[ \omega t - \frac{2\pi}{\lambda} x \right] \quad (2.17)$$

lungo una corda avente densità  $\mu$ ; sia  $\Delta x$  una porzione di corda, avente massa  $\mu\Delta x$ , esso si muove di moto armonico e quindi ha velocità, si ricordi l'equazione (1.14),

$$v(t, x) = -A \operatorname{sen} \omega \left[ \omega t - \frac{2\pi}{\lambda} x \right] \quad (2.18)$$

e quindi ha energia cinetica

$$\Delta \mathcal{E}_c = \frac{1}{2} \mu \Delta x v^2 = \frac{1}{2} \mu \Delta x A^2 \operatorname{sen}^2 \omega^2 \left[ \omega t - \frac{2\pi}{\lambda} x \right] . \quad (2.19)$$

L'energia potenziale d'altra parte è

$$\Delta U = \frac{1}{2} ky^2 = \frac{1}{2} kA^2 \cos^2 \left[ \omega t - \frac{2\pi}{\lambda} x \right]. \quad (2.20)$$

Ricordando che per un moto elastico vale  $k = \mu \Delta x \omega^2$ , si trova

$$\Delta \mathcal{E} = \Delta \mathcal{E}_C + \Delta U = \frac{1}{2} \mu \Delta x \omega^2 A^2 \quad (2.21)$$

La potenza associata a quest'onda è l'energia per unità di tempo; quindi

$$P = \frac{\Delta E}{\Delta t} = \frac{1}{2} \mu \frac{\Delta x}{\Delta t} \omega^2 A^2 = \frac{1}{2} \mu v \omega^2 A^2 \quad (2.22)$$

ove  $v$  è la velocità dell'onda.

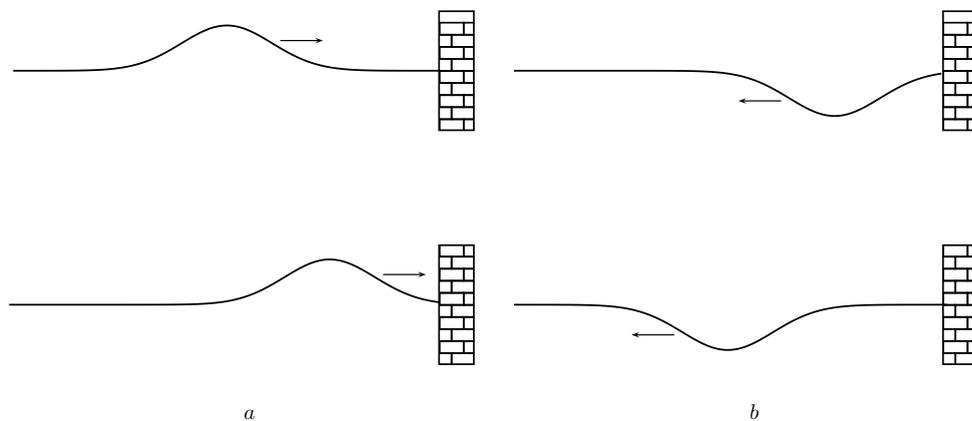
In generale, per una qualsiasi onda, la potenza è proporzionale al quadrato dell'ampiezza; si scrive in generale

$$P = \frac{1}{2} \kappa A^2, \quad (2.23)$$

ove  $\kappa$  è una costante che dipende dal mezzo attraverso cui l'onda si propaga.

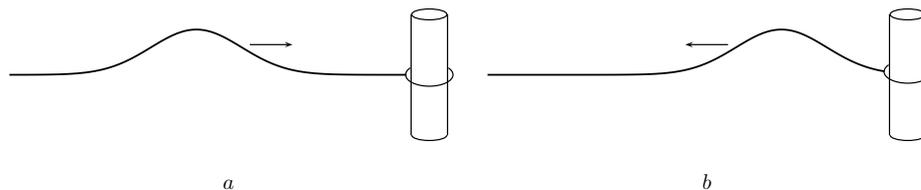
## 2.5 RIFLESSIONE DELLE ONDE.

Per capire il problema della riflessione della onde conviene riferirsi ad un esempio semplice utilizzando la corda che già è stata utile sopra. Si consideri quindi una corda con l'estremo  $P$  fissato ad una parete; e si consideri un'onda che si propaga verso  $P$ .



**Figura 2.4:** Riflessione con punto fisso. a: onda incidente; b: onda riflessa.

Quando l'onda giunge in  $P$  imprime alla parete un impulso verso l'alto; questa a sua volta, per la terza legge di Newton, imprime alla corda un impulso uguale ed opposto, cioè verso il basso. Questo impulso dato dalla parete si propaga all'indietro, ma rovesciato.



**Figura 2.5:** Riflessione con punto mobile. a: onda incidente; b: onda riflessa.

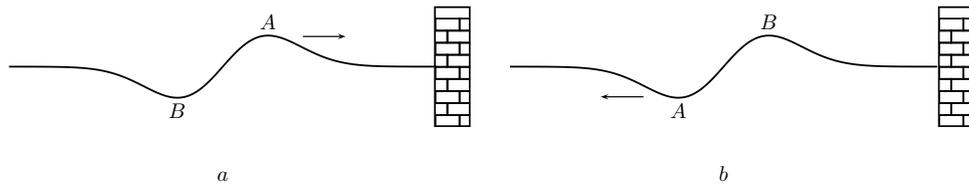
Quest'onda regressiva generata dall'interazione dell'onda incidente con la parete è detta **onda**

**riflessa.** Essa ha le stesse caratteristiche dell'onda incidente: la stessa ampiezza, la stessa lunghezza, la stessa velocità, però è rovesciata.

Nel caso in cui il punto  $P$  non sia fissato alla parete, ma libero di muoversi, la corda non riceve l'impulso dalla parete e quindi l'onda riflessa non è rovesciata.

### Osservazioni

1. Nell'esempio fatto per mettere in luce la proprietà di ribaltamento dell'onda incidente nel caso di riflessione con punto fisso si è scelto di discutere il caso di un'onda con una sola cresta, senza ventri: è chiaro che non si tratta di un'onda prodotta da un'oscillazione armonica.

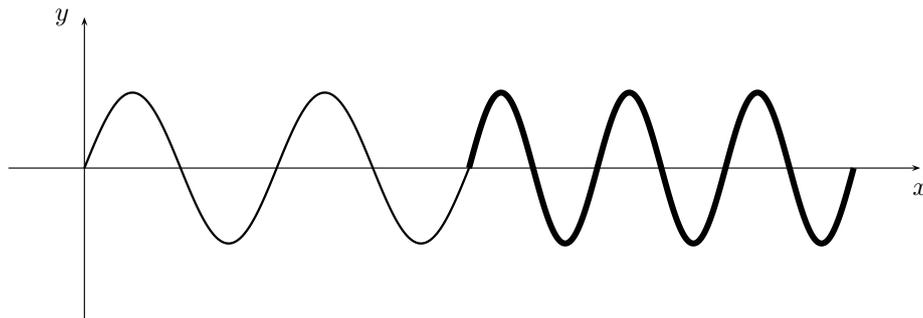


**Figura 2.6:** Riflessione di un'onda sinusoidale. a: onda incidente; b: onda riflessa.

Nel caso in cui l'onda incidente abbia il profilo di un seno l'onda riflessa quando  $P$  è fissato ha esattamente lo stesso profilo dell'onda incidente; infatti se l'onda incide la parete con la cresta  $A$ , questa si riflette diventando un ventre, mentre il successivo ventre  $B$  in seguito alla riflessione diviene cresta.

## 2.6 RIFRAZIONE DELLE ONDE.

Si supponga che un'onda propagandosi lungo una corda giunga ad un giunzione con una corda più densa; poiché la tensione delle due corde collegate è la medesima, usando l'equazione (2.10), si vede che velocità diminuisce; d'altra parte la frequenza delle sollecitazioni cui è sottoposta il nuovo tratto di corda è uguale alla frequenza delle onde che si propagano nel primo tratto; quindi, confrontando con l'equazione (2.14), è chiaro che la lunghezza d'onda deve diminuire e la corda appare come in figura 2.7



**Figura 2.7:** La rifrazione di un'onda su una corda.

Il fenomeno, su cui si dovrà tornare più avanti, di un'onda che modifica la propria velocità passando da un mezzo ad un altro viene detto **rifrazione**.

## 2.7 IL PRINCIPIO DI SOVRAPPOSIZIONE. INTERFERENZA.

In modo simile a come si compongono i moti armonici discussi in precedenza, anche le onde si compongono a produrre un'onda risultante. In generale tale composizione avviene secondo le due regole seguenti che sono note sotto il nome di **principio di sovrapposizione**.

- a) il moto di ciascuna delle onde componenti è indipendente dalla presenza delle altre onde, cioè ogni onda si propaga liberamente come se fosse l'unica onda presente;
- b) la deformazione dovuta alla presenza di più onde è uguale alla somma vettoriale (l'aggettivo vettoriale si riferisce alla possibilità di avere onde propagantesi in direzioni diverse) delle deformazioni dovute indipendentemente da ciascuna delle onde componenti.

Si consideri l'interferenza di due onde aventi la stessa frequenza, lunghezza, velocità ed ampiezza, che si propagano entrambe nel verso positivo delle ascisse con differenza di fase  $\theta$ . Si possono scrivere le loro funzioni d'onda come segue:

$$y_1(t, x) = A \cos \left[ \frac{2\pi}{\lambda}(x - vt) \right] \quad , \quad y_2(t, x) = A \cos \left[ \frac{2\pi}{\lambda}(x - vt) + \theta \right] . \quad (2.24)$$

Usando le formule di prostaferesi, la loro sovrapposizione dà

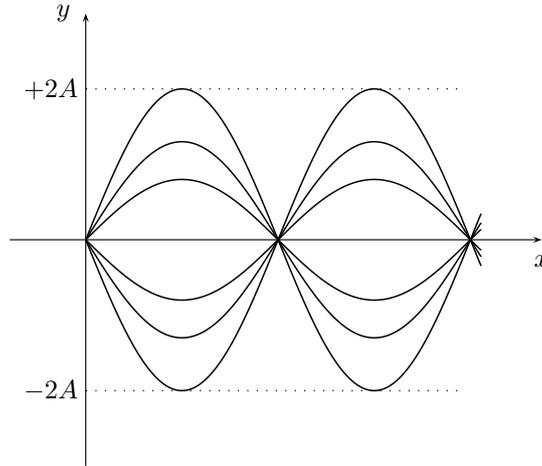
$$\begin{aligned} y(t, x) &= A \cos \left[ \frac{2\pi}{\lambda}(x - vt) \right] + A \cos \left[ \frac{2\pi}{\lambda}(x - vt) + \theta \right] = \\ &= 2A \cos \frac{\theta}{2} \cos \left[ \frac{2\pi}{\lambda}(x - vt) + \frac{\theta}{2} \right] . \end{aligned} \quad (2.25)$$

L'onda risultante quindi è un'onda che si propaga nello stesso verso, con la stessa velocità, lunghezza, frequenza delle onde componenti ma con un'ampiezza  $2A \cos \frac{\theta}{2}$  che dipende dalla differenza di fase  $\theta$ . In particolare se le onde sono in fase, cioè se  $\theta = 2n\pi$ , l'onda risultante ha ampiezza doppia e si dice che si produce **interferenza costruttiva**, se invece sono in opposizione di fase, cioè se  $\theta = (2n + 1)\pi$  l'ampiezza risultante è nulla, cioè le due onde si annullano reciprocamente e si dice che si produce **interferenza distruttiva**.

Si provi ora a far interagire due onde uguali a quelle ora esaminate, ma propagantesi in direzioni opposte:

$$\begin{aligned} y(t, x) &= A \cos \left[ \frac{2\pi}{\lambda}(x - vt) \right] + A \cos \left[ \frac{2\pi}{\lambda}(x + vt) + \theta \right] = \\ &= 2A \cos \left( \frac{2\pi}{\lambda}x + \frac{\theta}{2} \right) \cos \left[ \frac{2\pi}{\lambda}vt + \frac{\theta}{2} \right] . \end{aligned} \quad (2.26)$$

Come si vede l'onda risultante non si propaga: l'argomento del coseno non dipende più dalla combinazione  $x \pm vt$ .



**Figura 2.8:** Onda stazionaria e formazione dei nodi.

Ci sono dei punti, detti **nodi**, che restano fermi in ogni istante. Tali punti sono nelle posizioni per le quali

$$\cos \left( \frac{2\pi}{\lambda}x + \frac{\theta}{2} \right) = 0 \quad \longrightarrow \quad \frac{2\pi}{\lambda}x + \frac{\theta}{2} = \frac{\pi}{2} + n\pi \quad (2.27)$$

cioè per

$$x = \frac{\lambda}{4\pi} [(2n+1)\pi - \theta] . \quad (2.28)$$

Attorno ai nodi l'onda cresce e decresce senza spostarsi. Per questo motivo simili onde vengono dette **onde stazionarie**.

## 2.8 ONDE STAZIONARIE SU DI UNA CORDA FISSATA AGLI ESTREMI.

Come importante esempio di onde stazionarie, si consideri il problema di determinare quali onde si propagano lungo una corda di lunghezza  $\ell$ , i cui estremi  $A$  e  $B$  siano stati fissati.

Si prenda come riferimento un sistema di assi cartesiani ortogonali in cui la corda sta sull'asse  $x$  con il punto  $A$  nell'origine e le oscillazioni trasversali avvengono lungo  $y$ . Evidentemente si ha una continua sovrapposizione di onde progressive e regressive che si riflettono continuamente in  $A$  ed in  $B$  dando origine ad onde stazionarie della forma

$$y(t, x) = 2A \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} vt + \frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} x + \frac{\theta}{2}\right) . \quad (2.29)$$

Si osservi che gli estremi della corda restano fermi, quindi in ogni istante deve valere

$$y(t, 0) = y(t, \ell) = 0 , \quad (2.30)$$

da cui si ottiene

$$\cos \frac{\theta}{2} = 0 \quad , \quad \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} \ell + \frac{\theta}{2}\right) = 0 . \quad (2.31)$$

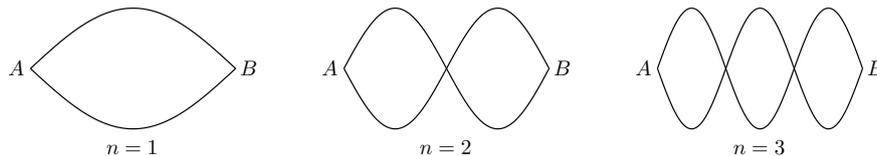
Da cui:

$$\lambda_n = \frac{2\ell}{n} \quad , \quad \theta = (2k+1)\pi , \quad (2.32)$$

ove  $n$  ed  $k$  sono due numeri interi arbitrari, con  $n > 0$ . Dalla prima di queste equazioni si vede che non tutte le lunghezze d'onda sono possibili ma solo quelle i cui multipli interi sono uguali al doppio della lunghezza totale della corda. Usando queste relazioni, la funzione dell'onda stazionaria diventa

$$y(t, x) = 2A \cos\left(\frac{\pi}{\ell} nvt\right) \cos\left(\frac{\pi}{\ell} nx + \frac{2n+1}{2}\pi\right) = \pm 2A \cos\left(\frac{\pi}{\ell} nvt\right) \text{sen}\left(\frac{\pi}{\ell} nx\right) . \quad (2.33)$$

Per  $n = 1$ , la lunghezza d'onda è il doppio della lunghezza della corda e questa vibra in tutta la sua lunghezza senza nodi intermedi; per  $n = 2$  la lunghezza d'onda è uguale alla lunghezza della corda e quindi vi è un nodo; per  $n = 3$  vi sono due nodi e via di seguito.



**Figura 2.9:** Onde stazionarie su una corda a estremi fissi.

È interessante scrivere le corrispondenti frequenze. La prima, per  $n = 1$ , è detta **frequenza fondamentale**:

$$\nu_1 = \frac{v}{\lambda_1} = \frac{v}{2\ell} = \frac{1}{\ell} \sqrt{\frac{T}{\mu}} . \quad (2.34)$$

Le altre frequenze sono tutte multiple della frequenza fondamentale e sono dette **armoniche** di  $\nu_1$

$$\nu_n = \frac{v}{\lambda_n} = n\nu_1 . \quad (2.35)$$

In generale la vibrazione di una corda con estremi fissi può essere pensata come la sovrapposizione di onde con tutte le frequenze armoniche date dalla (2.35). L'analisi delle frequenze armoniche che compongono una data onda stazionaria può essere fatta mediante il teorema di Fourier citato nel capitolo precedente.

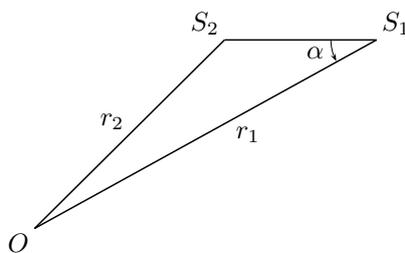
### Osservazioni

1. Oltre all'interferenza qui analizzata, le onde presentano una fenomenologia molto ricca che, per evitare inutili ripetizioni verrà discussa parlando del modello ondulatorio della luce, poiché per la luce tale fenomenologia ha le manifestazioni più vivide.

## 2.9 L'EFFETTO DOPPLER.

L'effetto Doppler<sup>1</sup> è tipico della fenomenologia delle onde che si manifesta quando la sorgente delle onde e l'osservatore sono in moto relativo. Si noti che il caso della sorgente in moto e dell'osservatore in moto non sono fisicamente equivalenti; il mezzo in cui le onde si propagano infatti gioca un ruolo essenziale esso infatti è fermo in entrambi i casi; non si passa quindi da un caso all'altro con un semplice cambio di sistema di riferimento. Si considerano separatamente i due casi.

**A.** Si consideri la sorgente  $S$  in moto rispetto al mezzo e l'osservatore  $O$  sia fermo. Sia  $v_s$  la velocità della sorgente e sia  $T_s$  l'intervallo di tempo che separa due istanti successivi in cui la sorgente emette due onde successive, tale intervallo è, evidentemente, il periodo delle onde emesse da  $S$ . Si supponga inoltre che la sorgente emetta la prima onda all'istante 0 e in quell'istante si trovi in  $S_1$  a distanza  $r_1$  dall'osservatore fermo. Se  $v$  è la velocità di propagazione delle onde nel mezzo in questione, la prima onda viene ricevuta da  $O$  all'istante  $t_1 = r_1/v$ . Dopo un tempo  $T_s$  dalla prima emissione  $S$  emette una seconda onda dalla posizione  $S_2$  che si trova a distanza  $r_2$  da  $O$ ; quindi questi riceve la seconda onda all'istante  $t_2 = T_s + r_2/v$ .



**Figura 2.10:** Effetto Doppler con sorgente in movimento.

Pertanto l'intervallo di tempo fra le due onde successive, cioè il periodo, misurato da  $O$  è

$$T_O = t_2 - t_1 = T_s - \frac{r_1 - r_2}{v} , \quad (2.36)$$

i due intervalli di tempo quindi non sono uguali, pertanto  $S$  ed  $O$  misurano periodi, e quindi frequenze e lunghezze d'onda, diverse. In particolare se  $v$  ha lo stesso segno di  $r_1 - r_2$ , cioè se  $S$  si sta avvicinando ad  $O$ , allora il periodo misurato da  $O$  è minore di quello dell'onda emessa da  $S$ ; viceversa, se  $S$  si allontana da  $O$  il periodo misurato da  $O$  è maggiore di quello dell'onda emessa. Nel caso in cui sia  $r_1 \simeq r_2 \gg S_1 S_2$  (il che significa che l'onda si muove molto più velocemente della sorgente, cosa quasi sempre molto ragionevole; si veda oltre) si può scrivere, con riferimento alla figura 2.10 (il lettore studioso spieghi perché)  $r_1 - r_2 \simeq S_1 S_2 \cos \alpha$ ; (si osservi che questa

<sup>1</sup> Christian Johann Doppler (1803-1853), fisico austriaco.

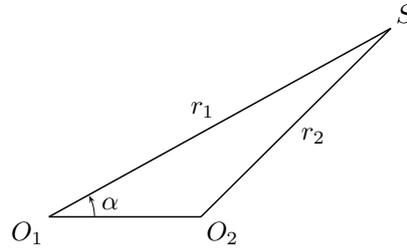
relazione è esatta nel caso in cui  $S$  si muova proprio verso  $O$ , con  $\alpha = 0$ ) ma  $S_1S_2$  è lo spazio percorso da  $S$  nel tempo  $T_s$ , cioè:  $S_1S_2 = v_s T_s$ , quindi si trova

$$\Delta t_O = \Delta t_s \left(1 - \frac{v_s}{v} \cos \alpha\right) ; \quad (2.37)$$

Nel caso, poi, in cui sia  $\alpha = 0$  e quindi  $S$  si muova verso  $O$ , l'ultima equazione si semplifica ulteriormente diventando

$$\boxed{\Delta t_O = \Delta t_s \left(1 - \frac{v_s}{v}\right) ;} \quad (2.38)$$

**B.** Si consideri ora la sorgente  $S$  ferma rispetto al mezzo ove invece si muove l'osservatore  $O$  con velocità  $v_o$ ; sia  $T_s$  il periodo di emissione della sorgente. La prima onda viene emessa da  $S$  all'istante 0;  $O$  riceve questa onda nel punto  $O_1$  che dista  $r_1$  da  $S$  all'istante  $t_1 = r_1/v$ , ove, come nel caso  $A$ ,  $v$  è la velocità della propagazione ondosa nel mezzo in questione.



**Figura 2.11:** Effetto Doppler con osservatore in movimento.

La seconda onda viene emessa da  $S$  all'istante  $T_s$  e viene ricevuta da  $O$  nel punto  $O_2$ , che dista  $r_2$  da  $S$  all'istante  $t_2 = T_s + r_2/v$ ; cosicché  $O$  misura un periodo

$$T_O = t_2 - t_1 = T_s - \frac{r_1 - r_2}{v} ; \quad (2.39)$$

la (2.39) è formalmente identica alla (2.36); in realtà nel caso  $A$  la quantità  $r_1 - r_2$  si riferisce allo spostamento (benché non vi coincida) di  $S$  nel tempo  $T_s$ , mentre in questo caso si riferisce allo spostamento di  $O$  nel tempo  $T_O$ ; si tratta quindi di due quantità diverse indicate per comodità con lo stesso simbolo. Per esplicitare tali differenze conviene fare le stesse approssimazioni viste nel caso precedente. Queste infatti consentono di scrivere  $r_1 - r_2 = v_o T_O \cos \alpha$  quindi

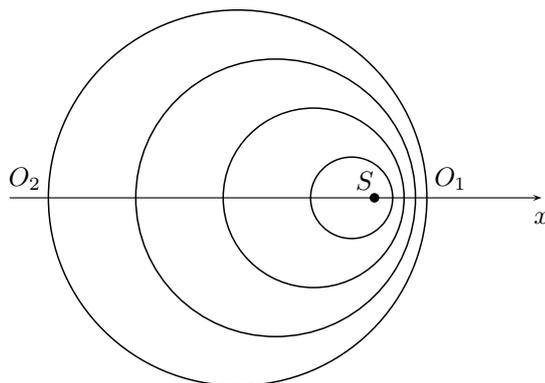
$$T_O = T_s - \frac{v_o}{v} T_O \cos \alpha \quad \longrightarrow \quad T_s = T_O \left(1 + \frac{v_o}{v} \cos \alpha\right) . \quad (2.40)$$

da cui si vede ancora che il periodo è minore quando l'osservatore si avvicina alla sorgente e maggiore quando se ne allontana, ma l'espressione matematica, e quindi il valore numerico della differenza fra le due frequenze è diversa. Nessuna sorpresa: fin dall'inizio è stato sottolineato che i due casi non sono fisicamente equivalenti. Nel caso in cui sia  $\alpha = 0$  quindi  $O$  si muova verso  $S$ , l'ultima equazione si semplifica ulteriormente diventando

$$\boxed{\Delta t_s = \left(1 + \frac{v_o}{v}\right) \Delta t_O ;} \quad (2.41)$$

**Osservazioni**

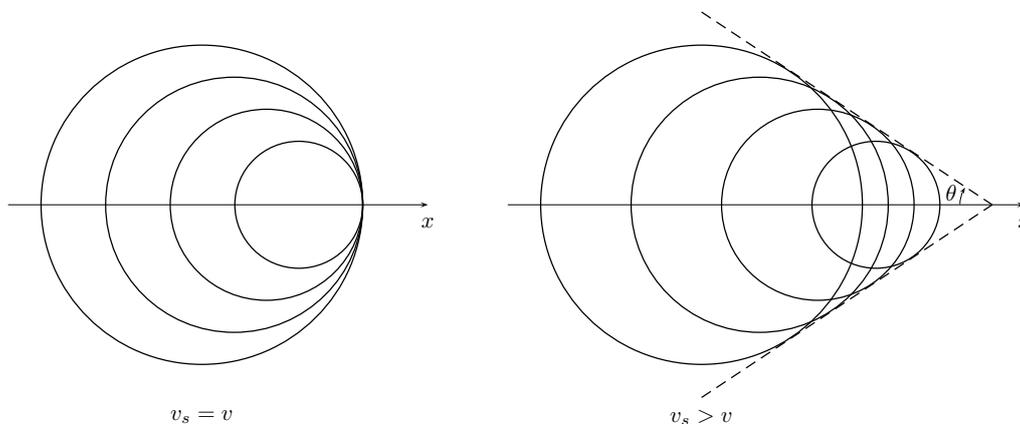
1. Nel caso delle onde sonore, che verrà discusso con qualche dettaglio nel seguito, l'effetto Doppler si manifesta tramite un fenomeno familiare a tutti coloro che abbiano ascoltato la sirena di un'ambulanza in movimento.



**Figura 2.12:** Effetto Doppler per le onde sonore.

Finché l'ambulanza si avvicina alle nostre orecchie sentiamo una certa nota che cambia non appena l'ambulanza ci ha oltrepassato e comincia ad allontanarsi. Questo è dovuto al fatto che, come si vedrà più avanti, la nota percepita dipende dalla frequenza. E, come illustrato in figura 2.12 (in cui le circonferenze rappresentano, per esempio, le creste delle onde successivamente emesse in punti sempre diversi), la lunghezza d'onda, e quindi il periodo, è percepita minore per l'osservatore  $O_1$  verso cui l'ambulanza  $S$  si muove, e maggiore per l'osservatore  $O_2$  da cui  $S$  si allontana.

2. Non sempre la sorgente (o l'osservatore) si muovono molto più lentamente delle onde; esempi contrari si possono trovare in certi aerei che si muovono più veloci del suono, o nei motoscafi che si muovono a velocità maggiore delle onde del mare. Quindi, in questi casi, le approssimazioni che ci hanno portato alla (2.37) e alla (2.40) non sono più validi. In questi casi è necessario attenersi alle (2.36) e (2.39). Nel caso  $\alpha = 0$ , invece, come osservato sopra, le (2.38) e (2.41) hanno validità generale.
3. Se la velocità della sorgente è uguale o superiore a quella dell'onda sonora (ma un discorso analogo vale per altri tipi di onda), si verifica un fenomeno detto **boom sonico**. Questo si verifica perché l'energia portata da molti fronti d'onda raggiunge simultaneamente l'orecchio dell'osservatore.



**Figura 2.13:** Sorgente con velocità uguale e maggiore di quella dell'onda.

Nel caso in cui la sorgente sia più veloce dell'onda, i fronti d'onda generati sono tutti tangenti

alla superficie di un cono (il lettore studioso provi a darne la non semplice dimostrazione), detto **cono di Mach**,<sup>2</sup> il cui angolo di apertura  $\theta$  è dato da

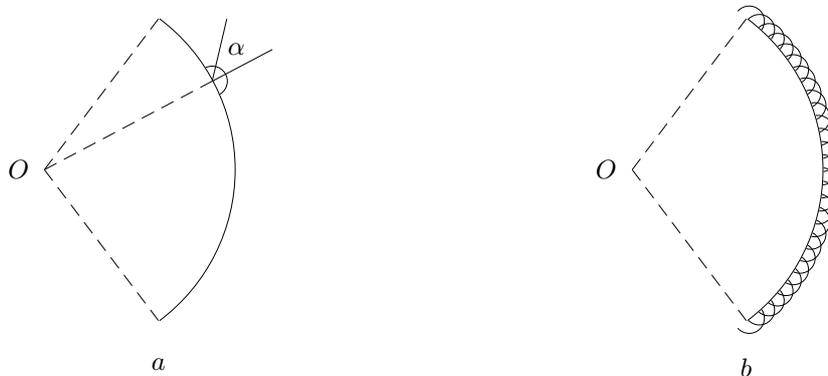
$$\operatorname{tg} \theta = \frac{v_s}{v} = M . \quad (2.42)$$

$M$  è il *numero di Mach* ed è il rapporto fra la velocità della sorgente e la velocità dell'onda sonora.

Per un'applicazione di questi concetti ad un ambito diverso dalle onde sonore si consideri il cono di Mach nella figura 2.13 a destra e lo si paragoni alla scia lasciata da un motoscafo.

## 2.10 IL MECCANISMO DELLA PROPAGAZIONE ONDOSA: IL PRINCIPIO DI HUYGENS.

È il momento di porsi la domanda di *come* sia possibile la propagazione di onde attraverso un dato mezzo. La risposta migliore che si riesce a dare è che ogni punto del mezzo soggetto a spostamento dalla sua posizione di equilibrio è causa di spostamento dei punti ad esso adiacenti.



**Figura 2.14:** Il principio di Huygens. a: l'angolo  $\alpha$  in un'onda secondaria; b: l'involuppo.

Questa affermazione un po' intuitiva è stata enunciata con precisione matematica da Huygens<sup>3</sup> nel modo seguente.

*Ogni porzione  $\Delta S$  di un fronte d'onda, originatasi da una sorgente  $O$ , è, a sua volta, sorgente di onde sferiche elementari, con frequenza uguale alla frequenza dell'onda primaria, fase iniziale coincidente con la fase dell'onda primaria ed ampiezza proporzionale all'area dell'elemento  $\Delta S$  considerato e al coseno dell'angolo di emissione  $\alpha$ .*

### Osservazioni

1. Il principio di Huygens ha il valore di *modello* della propagazione ondosa; cioè di ipotesi sul meccanismo della propagazione. Fino a che si considerano onde propagantesi in un mezzo omogeneo le onde secondarie non fanno che riprodurre l'onda primaria ed il principio di Huygens non è un modello di grande utilità. Di utilità decisiva si rivela invece nell'interpretazione della fenomenologia ondulatoria e, in particolare di fenomeni quali la diffrazione, l'interferenza da fenditure, che verranno discussi nel seguito.
2. L'intensità delle onde secondarie decresce all'aumentare dell'angolo  $\alpha$  fino ad annullarsi per  $\alpha \geq \pi/2$ . Le sorgenti secondarie quindi generano onde semisferiche. La sovrapposizione (che viene anche detta *involuppo*) di tali onde secondarie genera il fronte d'onda successivo.

<sup>2</sup> Ernst Mach (1838-1916), fisico e filosofo austriaco.

<sup>3</sup> Christian Huygens (1629-1695), scienziato olandese.

## 2.11 LE ONDE SONORE.

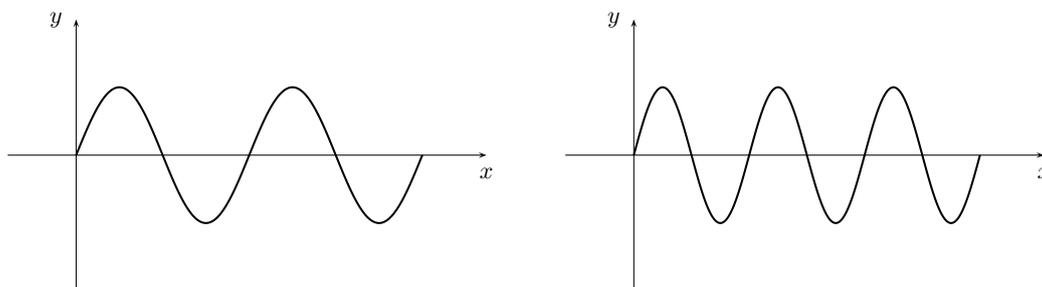
Come esempio importante della propagazione ondosa, in questo paragrafo si studiano le onde sonore. Queste sono onde di compressione, quindi longitudinali, che si propagano in un mezzo; questo può essere un fluido (aeriforme come l'aria o liquido come l'acqua) o solido. Queste onde sono di solito generate da corpi vibranti; esempi importanti sono tutti gli strumenti musicali (vibrazione di corde, di anche, di membrane e simili) o la faringe umana. Queste vibrazioni comprimono le porzioni del mezzo immediatamente adiacenti alla sorgente che, a loro volta, rarefacendosi comprimono porzioni adiacenti; in questo modo l'onda si propaga nel mezzo per successive compressioni e rarefazioni.

Si osservi qui subito che l'onda di compressione deve muoversi in un mezzo, non è quindi possibile la propagazione del suono nel vuoto.

Se l'onda di compressione raggiunge un orecchio umano, mette in movimento un complicato sistema di ricezione presente nell'orecchio interno (che non è il caso di descrivere qui) che fornisce un segnale elettrico che viene decodificato dal cervello dando origine alla sensazione uditiva. Il sistema di ricezione dell'orecchio umano è in grado di reagire solo a onde sonore che abbiano frequenza compresa approssimativamente fra i 20 e i 20000 Hz; al di sotto (infrasuoni) ed al di sopra (ultrasuoni) di questo intervallo di frequenze l'orecchio è completamente sordo. L'orecchio umano, entro l'intervallo di frequenze detto, è in grado di distinguere due suoni diversi per le seguenti tre caratteristiche:

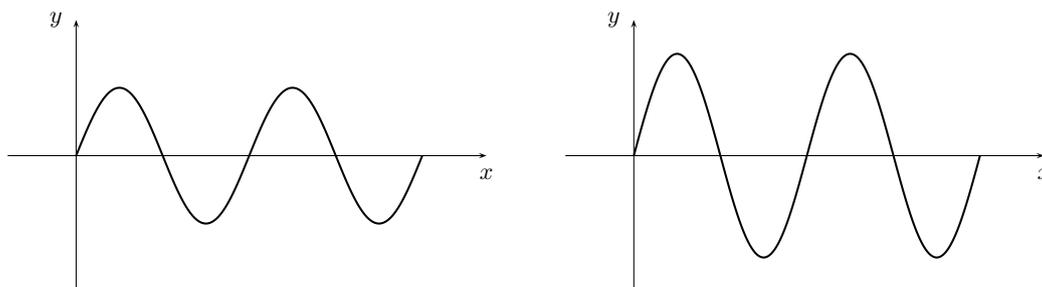
- a) **altezza**: che è ciò che distingue, ad esempio, due diverse note musicali;
- b) **intensità**: che nel linguaggio comune è detto volume di un suono;
- c) **timbro**: che è quel che distingue la stessa nota suonata da un violino o da un trombone.

Queste distinzioni sono familiari all'esperienza quotidiana; qui però si vuole chiarire a quali caratteristiche dell'onda sonora corrispondano cioè che cosa hanno di diverso due onde che corrispondono a suoni con altezza, intensità e timbro diversi.



**Figura 2.15:** Due suoni diversi per l'altezza.

Due suoni che differiscono per l'altezza sono trasportati da onde sonore che differiscono per la frequenza  $\omega$ , che è lo stesso, per la lunghezza d'onda, figura 2.15.



**Figura 2.16:** Due suoni diversi per l'intensità.

Due suoni che differiscono per l'intensità sono trasportati da onde sonore che differiscono per l'ampiezza figura 2.16.

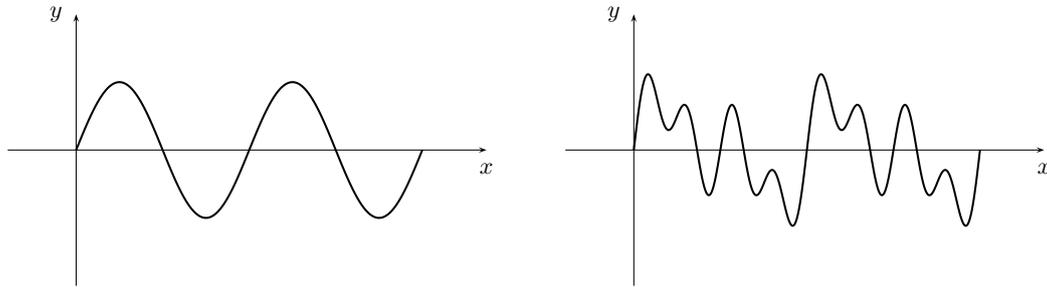


Figura 2.17: Due suoni diversi per il timbro.

Due suoni che differiscono per il timbro sono trasportati da onde sonore che differiscono per la forma dell'onda figura 2.17.

### 2.12 VELOCITÀ DEL SUONO.

Si vuole ora determinare la legge che dà la velocità del suono che si propaga in un fluido. Si consideri un tubo di sezione costante  $A$  in cui sia presente un fluido di densità  $\rho$  e pressione  $p$  e si supponga che in esso si propaghi un'onda di compressione con velocità  $v$ .

Similmente a come fatto nella sezione 2.2 dove si è determinata la velocità dell'onda su una corda, si scelga il sistema di riferimento dell'onda in movimento: in questo modo l'onda è ferma ed il fluido è in moto uniforme con velocità  $v$  nella direzione opposta. Sia  $p + \Delta p$  la pressione nella zona di compressione. Si consideri il moto di uno strato di fluido di larghezza  $\Delta x$  in moto, con velocità,  $v$  verso la zona di compressione.

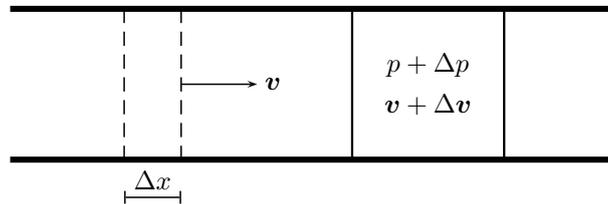


Figura 2.18: L'onda di compressione in un fluido.

Quando lo strato di fluido entra nella zona di compressione il suo lato frontale incontra una zona di pressione maggiore e la sua velocità diminuisce diventando  $v + \Delta v$  con  $\Delta v$  negativo. Questo rallentamento è completo quando anche il lato posteriore raggiunge la zona di compressione, cosa che avviene dopo un tempo  $\Delta t = \Delta x/v$ . Durante il tempo  $\Delta t$ , la forza esercitata sul lato posteriore è  $pA$ , ad essa si oppone sul lato anteriore la forza  $(p + \Delta p)A$ , la forza totale agente sullo strato è quindi

$$F = pA - (p + \Delta p)A = -\Delta p A \tag{2.43}$$

ove il segno meno dice che la forza è diretta in verso opposto a quello della velocità. La massa dello strato di fluido è

$$\Delta m = \rho A \Delta x = \rho A v \Delta t \tag{2.44}$$

e l'accelerazione è

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} \tag{2.45}$$

quindi, mettendo insieme questi risultati, si trova

$$-\Delta p A = \rho A v \Delta t \frac{\Delta v}{\Delta t} \tag{2.46}$$

relazione che, con semplici passaggi che si lasciano alla cura del lettore studioso, può essere riscritta nella forma

$$\rho v^2 = -\frac{\Delta p}{\Delta v/v}. \quad (2.47)$$

Ora, osservando che il volume occupato dallo strato di fluido può essere scritto  $V = A\Delta x = Av\Delta t$  e che la sua variazione durante la compressione può essere scritta nella forma  $\Delta V = A\Delta v\Delta t$ , è chiaro che vale

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{A\Delta v\Delta t}{Av\Delta t} = \frac{\Delta v}{v}, \quad (2.48)$$

quindi si può riscrivere la (2.47) nella forma

$$\rho v^2 = -\frac{\Delta p}{\Delta V/V}. \quad (2.49)$$

La quantità al secondo membro viene detta **modulo di compressione** del fluido in questione e normalmente è indicato dal simbolo  $B$ :

$$B = -\frac{\Delta p}{\Delta V/V}. \quad (2.50)$$

Per la velocità di propagazione dell'onda nel fluido vale allora l'equazione

$$v = \sqrt{\frac{B}{\rho}}. \quad (2.51)$$

Si noti la somiglianza formale di questa equazione con la (2.10).

Si supponga ora che il fluido sia un gas e si cerchi di determinare per esso il modulo di compressione. Un'onda che attraversi un gas, per esempio l'aria, è sufficientemente veloce da impedire lo stabilirsi dell'equilibrio termico, in altre parole non avviene un significativo scambio di calore; si può pertanto ritenere che la compressione sia adiabatica; si tratta così di calcolare il modulo di compressione adiabatico. Per un'adiabatica vale la legge  $pV^\gamma = \text{cost}$ . Quindi la variazioni di volume e di pressione devono essere tali da lasciare invariata questa quantità, così

$$\Delta(pV^\gamma) = 0 \quad (2.52)$$

Vale dunque

$$\Delta(pV^\gamma) = (p + \Delta p)(V + \Delta V)^\gamma - pV^\gamma = 0 \quad (2.53)$$

La seconda parentesi si può riscrivere

$$(V + \Delta V)^\gamma = V^\gamma \left(1 + \frac{\Delta V}{V}\right)^\gamma \simeq V^\gamma \left(1 + \gamma \frac{\Delta V}{V}\right) \quad (2.54)$$

Ove si è utilizzata l'approssimazione<sup>4</sup>  $(1+x)^\alpha \simeq 1 + \alpha x$  valida per  $x \ll 1$ ; quindi, nella detta approssimazione vale

$$\begin{aligned} \Delta(pV^\gamma) &= (p + \Delta p)V^\gamma \left(1 + \gamma \frac{\Delta V}{V}\right) - pV^\gamma = \\ &= pV^\gamma + V^\gamma \Delta p + \gamma p V^{\gamma-1} \Delta V + \gamma V^{\gamma-1} \Delta p \Delta V - pV^\gamma = 0; \end{aligned} \quad (2.55)$$

da cui segue, trascurando il termine proporzionale a  $\Delta p \Delta V$ , sicuramente molto piccolo rispetto agli altri, rimane:

$$V^\gamma \Delta p = -\gamma p V^{\gamma-1} \Delta V \quad (2.56)$$

<sup>4</sup> La dimostrazione per  $\alpha$  intero è semplice, basta infatti sviluppare la potenza  $n$ -esima del binomio e osservare che i termini contenenti  $x^2, x^3, \dots$  sono trascurabili; si ottiene così:

$$(1+x)^n \simeq 1 + nx.$$

La dimostrazione per  $\alpha$  non intero richiede le tecniche dell'analisi matematica.

a questo punto, dividendo per  $p$  e per  $V^\gamma$ , si trova

$$\frac{\Delta p}{p} = -\gamma \frac{\Delta V}{V}, \quad (2.57)$$

e quindi

$$B = \gamma p; \quad (2.58)$$

si può quindi scrivere l'equazione per la velocità di un'onda in un gas nella forma

$$\boxed{v = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}}}. \quad (2.59)$$

Da questa relazione si può facilmente ricavare la velocità in aria.

L'aria infatti è costituita principalmente da azoto ( $\text{N}_2$ ) e ossigeno ( $\text{O}_2$ ), che sono entrambe molecole biatomiche; quindi è ragionevole assumere, con ottima approssimazione,  $\gamma = 7/5 = 1.4$ . La densità dell'aria alla pressione atmosferica e alla temperatura di  $20^\circ\text{C}$  è  $\rho = 1.21 \text{ kg m}^{-3}$  e la pressione di atmosferica è  $p = 1.01 \times 10^5 \text{ Pa}$ . Con tali valori si trova circa  $v = 342 \text{ m s}^{-1}$ , che è un'ottima approssimazione del valore sperimentale.

La relazione (2.59) può essere riscritta utilmente in una forma diversa mediante il seguente ragionamento. La densità del gas è il rapporto fra massa e volume, e la massa è pari alla massa molare  $M$  per il numero di moli  $n$ , quindi, usando l'equazione di stato dei gas perfetti, si può scrivere:

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{nM}{V} = \frac{p}{RT} M. \quad (2.60)$$

A questo punto è semplice riuscire a scrivere

$$\boxed{v = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}}}. \quad (2.61)$$

Si noti la somiglianza formale questa equazione con quella che dà la velocità quadratica media delle molecole di un gas ad una certa temperatura.

Parte II  
OTTICA

L'ottica è la branca della fisica che studia il comportamento della luce. Si tratta di costruire un modello entro cui rientri tutta la fenomenologia della luce. In realtà tale fenomenologia è alquanto complessa e gli scienziati che si sono interessati a descrivere i fenomeni luminosi hanno costruito *due* diversi modelli sulla natura della luce.

Il primo viene detto **modello corpuscolare** e tradizionalmente si fa risalire a Descartes e a Newton<sup>1</sup> (ma fonda le sue origini nell'antichità, e piú precisamente nell'*Ottica* di Euclide<sup>2</sup> ove viene costruito un modello della visione oculare in termini di raggi ottici). Tale modello postula che la luce sia costituita da corpuscoli emessi dalla sorgente luminosa e propagantesi con velocità finita lungo traiettorie rettilinee dette *raggi luminosi*.

Il secondo viene detto **modello ondulatorio** e si fa risalire, tra gli altri, a Huygens, Young e Fresnel<sup>3</sup>. Tale modello postula che la luce consista in una propagazione di onde attraverso un mezzo elastico, trasparente che tutto avvolge e permea, detto *etere*.

Nonostante la ricerca di quale dei due fosse il modello corretto abbia coinvolto per alcuni secoli molti dei principali scienziati europei, che si sono divisi, spesso piuttosto polemicamente, in sostenitori dell'uno o dell'altro, non è possibile qui esimersi dall'osservare che un tale contrasto non ha senso. Non esiste un modello *giusto* cosí come la fisica non fornisce teorie *vere*; tutto quello che ci si può aspettare da un modello è che sia piú o meno adatto a descrivere una certa fenomenologia cioè che le sue previsioni siano in buon accordo con i dati sperimentali disponibili in un certo ambito fenomenologico. Di fatto nel seguito si descriveranno nel dettaglio entrambi i modelli e si useranno l'uno e l'altro a seconda della convenienza dettata dal fenomeno fisico che si vorranno descrivere.

---

<sup>1</sup> René Descartes (1596-1650), filosofo francese;

<sup>2</sup> Euclide (III sec. a.C.), grande matematico e scienziato di Alessandria (?).

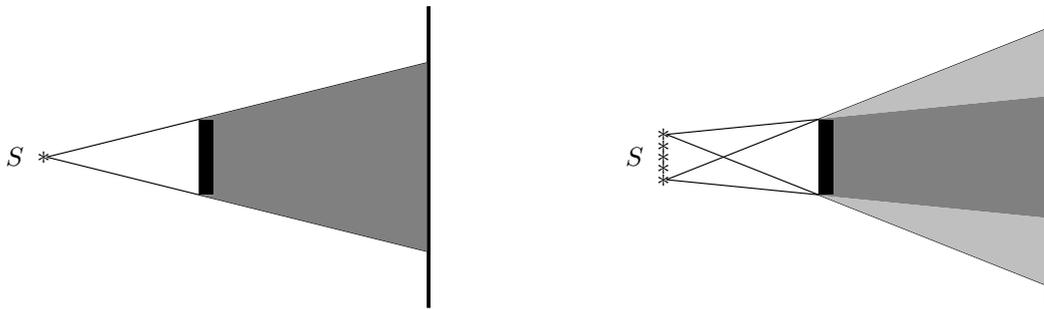
<sup>3</sup> Thomas Young (1773-1829), fisico inglese; Augustin Jean Fresnel (1788-1827), ingegnere e fisico francese.

# 3

## OTTICA GEOMETRICA.

---

Si cominci col considerare semplici esperienze fatte per mezzo della luce, cercando di indagare quale ne sia la natura. Una delle prime esperienze che si hanno della luce è che essa può attraversare certi corpi, che si dicono *trasparenti*, quali il vetro, l'acqua o certi cristalli, mentre non può attraversare certi altri corpi che vengono per questo detti *opachi*. È anche esperienza comune che i corpi opachi quando vengono investiti dalla luce generano un'*ombra* che può essere vista su uno schermo (o semplicemente sul terreno).



**Figura 3.1:** Ombre e penombre con sorgente puntiforme ed estesa.

A seconda che la sorgente  $S$  sia puntiforme (cioè sia sufficientemente lontana da essere considerata tale; per esempio il Sole) od estesa, l'ombra è perfettamente nitida e ben delimitata oppure sfuma in una zona di penombra verso la zona illuminata, come illustrato nella figura 3.1. Questo suggerisce che la luce, almeno in questo esperimento, si propaga in modo rettilineo, secondo linee rette dette raggi luminosi.

Tutte le volte che questa descrizione della luce come raggi luminosi funziona, si adotta quello che sopra è stato chiamato il modello corpuscolare della propagazione luminosa. La branca della fisica che usa tale modello è nota con il nome di *ottica geometrica*, perché, come si vedrà, i raggi luminosi vengono trattati alla stregua di segmenti di retta ed ad essi vengono applicate le regole della geometria piana.

Un altro esperimento che, accanto a quello dell'ombra e della penombra qui descritto, porta conforto alla scelta di adottare il modello corpuscolare è quello della *camera oscura*. Si prenda una camera perfettamente buia e dotata di un foro da cui può filtrare la luce di una sorgente  $S$  puntiforme posta all'esterno della camera. Sulla parete opposta si forma un disco luminoso  $D$  perfettamente delineato. Questo fenomeno si spiega adeguatamente adottando il modello corpuscolare.

### Osservazioni

1. Un esempio molto importante della formazione di ombre grazie alla sovrapposizione di ostacoli fra la sorgente luminosa ed il corpo illuminato è dato dalle eclissi di Sole e di Luna. Nel primo caso la Luna si viene a trovare fra la sorgente luminosa (il Sole) e la Terra proiettando su questa un cono d'ombra; nel secondo caso la Terra viene a trovarsi fra il Sole e la Luna proiettando sul suo satellite un cono d'ombra.
2. Non accade sempre che le zone d'ombra siano nettamente separate dalle zone illuminate; se gli ostacoli che la luce incontra sul suo cammino sono troppo piccoli cominciano, in effetti, ad apparire delle sfrangiature. Questo accade ad esempio, riducendo le dimensioni del corpo che proietta l'ombra sullo schermo nel primo esperimento o le dimensioni del foro nel

secondo. Questi fenomeni sfuggono completamente alla descrizione in termini del modello corpuscolare e necessitano, come si vedrà, di un modello diverso.

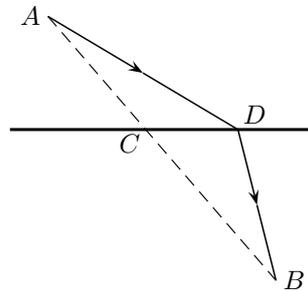
### 3.1 LA PROPAGAZIONE DELLA LUCE.

Ora che è stato introdotto il modello corpuscolare, è necessario fornire un meccanismo per la propagazione luminosa; noto che la luce si propaga in linea retta è necessario di qualcosa che dica come la luce sceglie le linee rette da percorrere. Il problema a prima vista può sembrare di ovvia soluzione: è chiaro! La luce si propaga in linea retta a partire dalla sorgente in tutte le direzioni. Vero. Ciò è ragionevole e ovvio fino a che la luce si propaga nell'aria libera. Ma che accade se passa dall'aria ad un corpo trasparente, per esempio il vetro: è certo che continuerà indisturbata, o piuttosto i corpuscoli di cui è costituita interagiscono con la superficie del vetro producendo una deviazione del raggio luminoso? E che accade quando la luce incide su uno specchio? Certo non continua in linea retta!

Per rispondere a questi dubbi, si diceva, è necessario un meccanismo che dica *come* la luce si propaga. Questo meccanismo ci è fornito dal seguente **principio di Fermat**<sup>1</sup>.

*Nel propagarsi da un punto A ad un punto B la luce percorre sempre la traiettoria per la quale impiega il tempo minimo.*

Questo principio dice chiaramente che, fino a che la velocità di propagazione della luce è costante, la traiettoria è rettilinea; in tal caso, infatti, la retta è la traiettoria di minor tempo, o, in una sola parola, la **brachistocrona**. Ma la cosa non è più così ovvia se la luce passa da un mezzo ad un altro in cui la velocità della propagazione luminosa sia diversa. Per esempio dall'aria all'acqua. In effetti la luce si muove più lentamente nell'acqua che nell'aria, quindi percorre un tratto un po' più lungo nell'aria, dove è più veloce, per minimizzare il tempo. Per capire ciò, si immagini di dover salvare una persona che sta annegando in mezzo al mare. Ci si trovi in *A* sulla spiaggia mentre la persona in difficoltà si trova in *B* tra i flutti.



**Figura 3.2:** Illustrazione del principio di Fermat.

Visto che la velocità a nuoto è sensibilmente minore della velocità di corsa, e volendo arrivare al più presto in *B*, la traiettoria da scegliere non è quella rettilinea che passa per *C*, ma la spezzata che passa per *D*. La luce si comporta esattamente nello stesso modo.

Potrebbe sembrare legittima la domanda: come fa la luce a sapere *prima* di percorrere le traiettorie disponibili qual è la brachistocrona? Naturalmente non lo sa. Semplicemente il principio di Fermat fornisce una guida operativa che è comodo usare senza dovere per forza dotare la luce di capacità logiche.

Per completare l'esame delle proprietà della propagazione luminosa, rimane ancora da trattare il problema della velocità della luce. La storia delle misurazioni della velocità della luce è troppo lunga per essere svolta qui e viene rimandata ad un capitolo successivo. Qui ci si limita a dare i risultati.

La velocità della luce *nel vuoto* si indica tradizionalmente con la lettera *c* (dal latino *celeritas* e il suo valore è dato da

$$c = 299\,792\,458 \text{ m s}^{-1}, \quad (3.1)$$

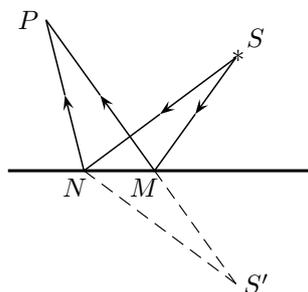
<sup>1</sup> Pierre de Fermat (1601-1665), magistrato e matematico francese.

valore che normalmente viene approssimato a  $300\,000\,000\text{ m s}^{-1} = 3 \times 10^8\text{ m s}^{-1}$ .

Naturalmente la luce non si propaga solo nel vuoto, e i valori della velocità sono diversi a seconda del mezzo trasparente attraversato. Come regola generale si tenga presente che piú un mezzo trasparente è denso, meno veloce la luce si propaga in esso. Cosí, ad esempio, la luce è piú veloce nell'aria che nell'acqua e piú veloce nell'acqua che nel vetro e cosí via. Si tornerà oltre su questo punto.

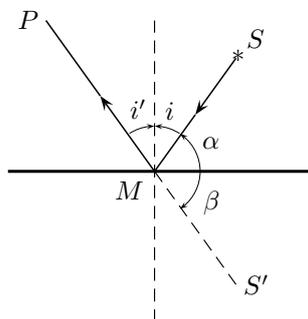
### 3.2 RIFLESSIONE: CASO DELLO SPECCHIO PIANO.

Si consideri ora una superficie piana perfettamente riflettente e una sorgente luminosa  $S$  ed un altro punto arbitrario  $P$ ; si vuole trovare la traiettoria percorsa dalla luce che unisce  $S$  con  $P$ , con il vincolo di riflettersi sullo specchio; in altre parole, si deve determinare in quale punto si deve riflettere la luce perché da  $S$  raggiunga  $P$ .



**Figura 3.3:** La riflessione da uno specchio piano.

Si consideri il punto  $S'$  simmetrico di  $S$  rispetto al piano dello specchio ed si unisca il punto  $P$  ed il punto  $S'$  con un segmento; tale segmento incontra lo specchio nel punto  $M$ . Ora  $M$  è il punto cercato, cioè che la traiettoria percorsa dalla luce è la spezzata  $SMP$ . La dimostrazione è per assurdo. Si consideri sullo specchio un punto  $N$  diverso da  $M$  e si consideri la traiettoria  $SNP$ ; essa è piú lunga della traiettoria  $SMP$ . Infatti per la simmetria di  $S$  ed  $S'$  rispetto al piano dello specchio vale  $SM \simeq S'M$ , similmente  $SN \simeq S'N$ . Quindi la spezzata  $SMP$  è lunga quanto il segmento  $S'P$  e la spezzata  $SNP$  è lunga quanto la spezzata  $S'NP$ ; ma in ogni triangolo la somma di due lati è sempre maggiore del terzo lato, quindi per il triangolo  $PNS'$  la spezzata  $S'NP$  è piú lunga del segmento  $S'P$  e quindi la traiettoria  $SNP$  è piú lunga della traiettoria  $SMP$ . Ora le due traiettorie sono entrambe percorse nello stesso mezzo (per esempio in aria), quindi con la stessa velocità, pertanto per il principio di Fermat la luce sceglierà la piú corta, che è quanto si doveva dimostrare.



**Figura 3.4:** La legge della riflessione.

Da questo fatto è possibile ricavare la legge della riflessione su specchi piani. Si consideri la retta perpendicolare allo specchio nel punto di incidenza  $M$ ; si definiscono *angolo di incidenza* e, rispettivamente, *angolo di riflessione* gli angoli  $i$  ed  $i'$  formati dal raggio incidente e dal raggio riflesso con detta perpendicolare. Si dimostri ora che i due angoli sono uguali. Si osservi

preliminarmente che l'angolo  $\alpha$  e l'angolo  $\beta$  formati dai segmenti  $SM$  ed  $S'M$  e lo specchio sono uguali. Ora l'angolo  $i$  è complementare di  $\alpha$  e conseguentemente  $i'$  è complementare di  $\beta$  quindi, essendo complementari di angoli uguali,  $i$  ed  $i'$  sono uguali.

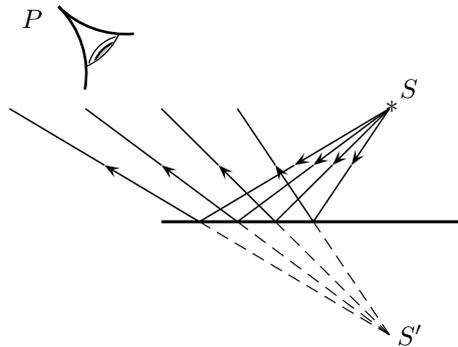
Si osservi inoltre che se si vuole che la spezzata  $SMP$  abbia lunghezza minima i due segmenti  $SM$  ed  $MP$  devono stare sullo stesso piano della perpendicolare allo specchio.

Si possono a questo punto enunciare le due **leggi della riflessione**.

*Se un raggio luminoso incide su una superficie riflettente si genera un raggio riflesso in modo che*

1. il raggio incidente ed il raggio riflesso siano complanari alla perpendicolare nel punto di incidenza.
2. l'angolo di incidenza è uguale all'angolo di riflessione.

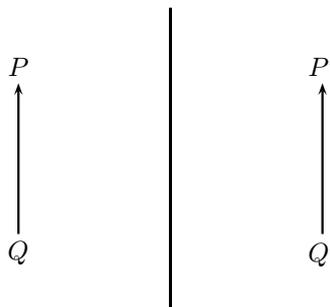
Si considerino ora piú di un raggio uscente da  $S$  e se ne costruiscano i raggi riflessi.



**Figura 3.5:** La formazione dell'immagine.

Si osservi che i raggi riflessi risultano tutti uscenti dal punto  $S'$ . Con riferimento alla figura 3.5, se in  $P$  si trova un occhio che guarda verso lo specchio, questo vede  $S'$  come sorgente dei raggi riflessi, in altre parole vede  $S$  in  $S'$ . Questo fatto, familiare a tutti coloro che si siano guardati allo specchio, giustifica per  $S'$  il nome di **immagine** di  $S$ . Quindi *l'immagine di un punto sorgente di raggi luminosi formata da uno specchio piano è un punto simmetrico al punto sorgente rispetto allo specchio*.

Si tratta ora di costruire l'immagine di un oggetto esteso. Si consideri, ad esempio, un segmento orientato  $PQ$  posto di fronte ad uno specchio piano.



**Figura 3.6:** La formazione dell'immagine di un oggetto esteso.

Poiché ogni punto del segmento ha come immagine il punto simmetrico, evidentemente l'immagine del segmento è il segmento simmetrico  $P'Q'$ . Si osservi che l'immagine ottenuta ha le stesse dimensioni, e lo stesso verso dell'oggetto che l'ha prodotta. Si vedrà nelle prossime pagine che esistono dispositivi che producono immagini ingrandite, rimpicciolite e capovolte.

### Osservazioni

1. Gli angoli di incidenza e di riflessione sono definiti rispetto alla retta perpendicolare al piano nel punto di incidenza, e non rispetto al piano dello specchio, per poter generalizzare la validità delle leggi della riflessione a superfici curve, si veda la figura 3.7.

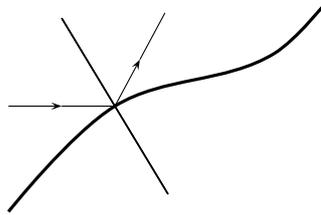


Figura 3.7: Riflessione su una superficie curva.

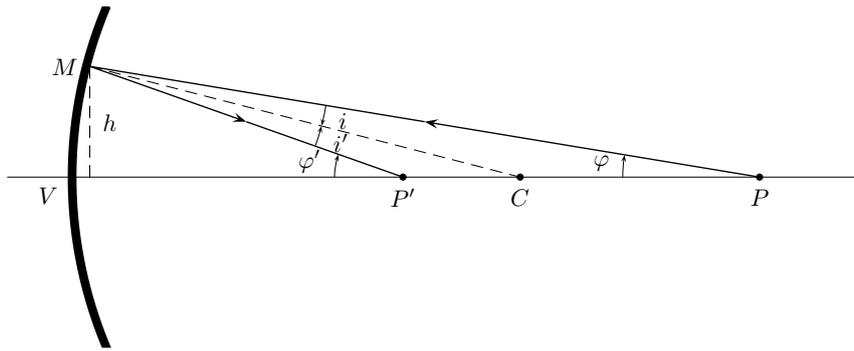
2. Si osservi che i ruoli del raggio incidente e riflesso sono scambiabili. Cioè, con riferimento alla figura 3.4, se il raggio incidente fosse il segmento  $PM$  allora il raggio riflesso sarebbe il segmento  $MS$ . Questo fatto ha validità assolutamente generale e prende il nome di **principio di invertibilità dei cammini ottici**.
3. Un fascio di raggi che passino tutti per un medesimo punto si dice **omocentrico**. Un fascio di raggi paralleli si dice omocentrico con centro all'infinito.
4. Due raggi che siano uno incidente e l'altro emergente dallo stesso dispositivo (per esempio uno specchio od una lente) si dicono **raggi coniugati**. Se raggi coniugati formano due fasci entrambi omocentrici i rispettivi centri sono detti **punti coniugati** e se uno è sorgente del fascio incidente, l'altro è immagine e viceversa. I dispositivi che abbiano la proprietà di aver sempre fasci omocentrici coniugati di fasci omocentrici, si dice dispositivo **stigmatico**, per tali dispositivi, per la costruzione dell'immagine è sufficiente condurre due soli raggi riflessi fino al loro punto di incontro, eventualmente determinato dai prolungamenti dei raggi riflessi (si veda sotto l'osservazione 5). Lo specchio piano studiato sopra è un dispositivo stigmatico.
5. È chiaro che solo in un dispositivo stigmatico un punto ha come immagine un punto. Più in generale ci si deve accontentare del fatto che l'immagine di un punto sia una regione ristretta di spazio.
6. Se i raggi di un fascio omocentrico emergente si incontrano effettivamente in un punto fisico reale allora l'immagine che producono è detta immagine **reale**; se viceversa, come accade per lo specchio piano, si verifica che i raggi emergenti sono divergenti e solo i loro prolungamenti si incontrano in un punto oltre la superficie limite del mezzo (nel nostro caso 'dentro' lo specchio) l'immagine è detta **virtuale**.

### 3.3 SPECCHIO SFERICO.

Uno specchio sferico è una calotta sferica riflettente; a seconda di quale delle due superfici sia riflettente viene detto specchio *concavo* o *convesso*. L'asse di simmetria della calotta si definisce *asse ottico* dello specchio. L'asse ottico passa per il centro  $C$  della sfera da cui è stata ricavata la calotta. Inoltre si dice *vertice* dello specchio il punto  $V$  di intersezione fra l'asse ottico e la superficie riflettente.

#### SPECCHIO SFERICO CONCAVO

Dato un punto  $P$  sull'asse ottico di uno specchio concavo si vuole costruire la sua immagine riflessa  $P'$ . Per far ciò, con riferimento alla figura 3.8, si considerino due raggi luminosi uscenti da  $P$ ; il primo è il raggio che si propaga sovrapposto all'asse ottico, questo giunge sul vertice  $V$  con angolo di incidenza di  $90^\circ$ , quindi si riflette su sé stesso.



**Figura 3.8:** Uno specchio sferico concavo

Il secondo raggio incide nel generico punto  $M$  dello specchio, distante  $h$  dall'asse ottico. Il suo angolo di incidenza è quello formato dal raggio di incidenza  $PM$  con la perpendicolare alla superficie riflettente nel punto di incidenza; tale perpendicolare è la retta passante per il centro  $C$ . Si indica, come d'uso, con  $i$  l'angolo di incidenza e con  $i'$  l'angolo di riflessione. Siano inoltre  $\theta$  l'angolo  $\widehat{MCV}$ ,  $\varphi$  l'angolo  $\widehat{MPV}$  e  $\varphi'$  l'angolo  $\widehat{MP'V}$ ; per il teorema dell'angolo esterno applicato ai triangoli  $CMP$  e  $CMP'$  valgono le relazioni

$$i = \theta - \varphi \quad , \quad i' = \varphi' - \theta ; \quad (3.2)$$

per la seconda legge della rifrazione, vale  $i = i'$  e quindi

$$\varphi + \varphi' = 2\theta . \quad (3.3)$$

Ora, posto  $PV = p$ ,  $P'V = p'$ ,  $CV = r$ , per angoli piccoli valgono le seguenti approssimazioni

$$\varphi \simeq \text{tg } \varphi \simeq \frac{h}{p} \quad , \quad \theta \simeq \text{tg } \theta \simeq \frac{h}{r} \quad , \quad \varphi' \simeq \text{tg } \varphi' \simeq \frac{h}{p'} \quad (3.4)$$

quindi la (3.3) diventa

$$\frac{h}{p} + \frac{h}{p'} = \frac{2h}{r} \quad (3.5)$$

e quindi

$$\boxed{\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = \frac{2}{r}} . \quad (3.6)$$

Questa equazione è nota col nome di **legge dei punti coniugati**.

### Osservazioni

1. Si noti che la (3.6) è indipendente da  $\varphi$ ; quindi tutti i raggi che uscenti da  $P$  si riflettono verso  $P'$ , nell'ipotesi di angoli piccoli; in tale limite quindi lo specchio sferico è, con buona approssimazione, un dispositivo stigmatico. La validità di questa approssimazione dipende dalla validità dell'approssimazione  $h \simeq MV$  cioè dell'identificazione di  $h$  con l'arco  $MV$ ; questa viene meno per specchi con concavità molto accentuata o di apertura eccessiva. Salvo diverso avviso, in tutto quel che segue si userà questa approssimazione.
2. Si osservi che, coerentemente con il principio di invertibilità dei cammini ottici, se si pone l'oggetto in  $P'$  l'immagine si forma in  $P$ . Per questo  $P$  e  $P'$  sono detti punti coniugati.
3. Se  $p \rightarrow \infty$ , cioè se l'oggetto è molto lontano dallo specchio, il primo addendo della (3.6) è trascurabile, rimane quindi

$$\frac{1}{p'} = \frac{2}{r} \quad \longrightarrow \quad p' = \frac{r}{2} \quad (3.7)$$

quindi l'immagine di un punto molto lontano dallo specchio si forma su un punto che si trova nel punto medio del segmento  $CV$ ; tale punto è detto **fuoco** dello specchio sferico concavo. I raggi emessi da una sorgente molto lontana, si pensi per esempio al Sole, giungono allo specchio paralleli, si può quindi concludere che

*i raggi luminosi che incidono lo specchio paralleli all'asse ottico danno origine a un fascio di raggi riflessi omocentrico, con centro nel fuoco.*

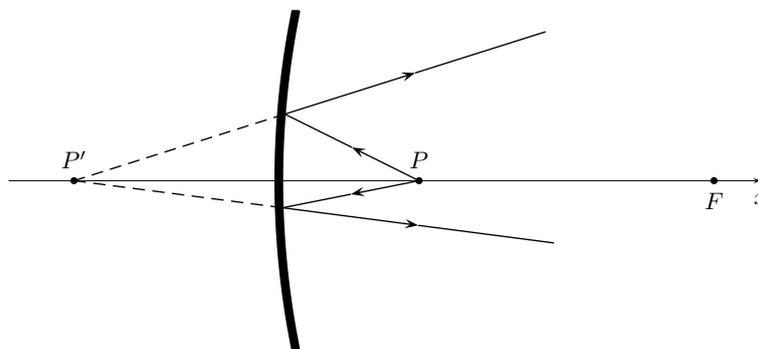
Alternativamente si può dire che il fuoco di uno specchio sferico concavo è il punto coniugato dell'infinito. La proprietà dei raggi incidenti paralleli all'asse di generare raggi riflessi passanti per il fuoco è molto utile nella costruzione delle immagini degli oggetti estesi, come si vedrà più sotto. A questo riguardo, si osserva qui che, per il principio di invertibilità dei cammini ottici, un raggio incidente che passi per il fuoco genera un raggio riflesso passante parallelo all'asse ottico. Indicando con  $f$  la distanza del fuoco da  $V$ , vale

$$f = \frac{r}{2} \quad (3.8)$$

e quindi la (3.6) può essere riscritta nella forma più usuale

$$\boxed{\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = \frac{1}{f}} \quad (3.9)$$

4. Se  $p = r$  allora, dalla (3.6) si ottiene  $p' = r$ ; quindi il centro  $C$  è coniugato di sé stesso. Si osservi che qualsiasi raggio proveniente dal centro  $C$  incide lo specchio perpendicolarmente e quindi l'angolo di incidenza e quello di riflessione sono entrambi retti; tutti i raggi riflessi quindi si sovrappongono ai rispettivi raggi incidenti e costituiscono quindi un fascio omocentrico con centro in  $C$ . La proprietà dei raggi incidenti passanti per il centro di generare raggi riflessi passanti anch'essi per il centro è molto utile nella costruzione delle immagini degli oggetti estesi.



**Figura 3.9:** Immagine virtuale in uno specchio sferico concavo

Molto importante è il caso in cui la sorgente luminosa si trova fra il fuoco e lo specchio, cioè se vale  $0 < p < f$ ; in tale caso infatti risulta

$$\frac{1}{p'} = \frac{1}{f} - \frac{1}{p} = \frac{p-f}{pf} < 0 \quad (3.10)$$

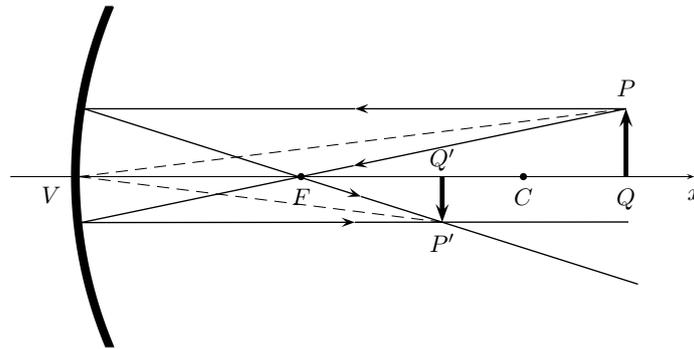
la distanza dell'immagine dallo specchio è dunque negativa; per dare un senso a questo risultato conviene considerare un asse delle ascisse con l'origine nel vertice e orientato nel verso dal vertice al centro dello specchio, come in figura 3.9. Si vede dunque che nel caso  $p < f$  l'immagine si forma, come già visto per lo specchio piano, dall'incontro dei prolungamenti dei raggi riflessi; i raggi riflessi sono sì omocentrici, ma il loro centro, e quindi l'immagine  $P'$ , è virtuale. Il segno negativo di  $p'$  quindi è il segnale del fatto che l'ascissa dell'immagine è negativa e cioè che l'immagine è

virtuale.

Si affronta ora il problema della costruzione dell'immagine di un oggetto esteso. Occorre qui distinguere tre casi a seconda della distanza dell'oggetto dallo specchio.

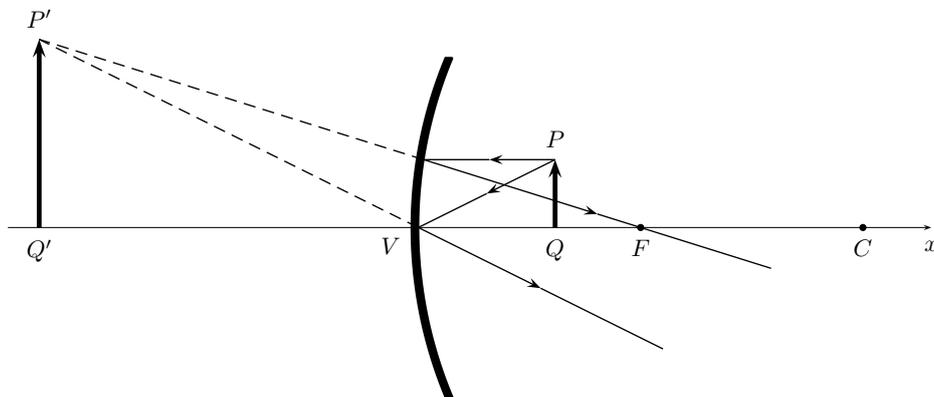
**Caso  $p > 2f$ .**

Si consideri la situazione rappresentata in figura 3.10, ove dell'estremo  $P$  di un oggetto  $PQ$ , posto a distanza  $p > r = 2f$  dallo specchio, è stata costruita l'immagine tracciando due raggi: uno parallelo all'asse ottico, che, come visto sopra (osservazione 3), si riflette per il fuoco, e uno passante per il fuoco  $F$  che si riflette parallelo all'asse ottico (si veda ancora l'osservazione 3).



**Figura 3.10:** Immagine reale di un oggetto esteso.

I due raggi riflessi si incontrano nel punto  $P'$  che quindi è l'immagine di  $P$  (si ricordi che nella approssimazione di angoli piccoli lo specchio sferico è un dispositivo stigmatico, si veda sopra l'osservazione 1.)<sup>2</sup> L'immagine di  $Q$  si forma sull'asse ottico e quindi nel punto dell'asse avente la stessa ascissa di  $P'$ ; ne risulta la costruzione riportata in figura 3.10. Quindi se l'oggetto si trova a una distanza dallo specchio maggiore del raggio, l'immagine si forma fra il fuoco ed il centro ed è reale, rimpicciolita e capovolta.



**Figura 3.11:** Immagine virtuale di un oggetto esteso.

**Caso  $f < p < 2f$ .**

Il caso in cui l'oggetto si trovi fra il fuoco e il centro è facile da trattare in quanto basta applicare il principio di invertibilità dei cammini ottici al caso precedente; in quel caso infatti l'immagine di un oggetto piú lontano del centro si forma fra il fuoco ed il centro; quindi, invertendo i cammini ottici, l'immagine di un oggetto posto fra il fuoco e il centro si forma oltre il centro ed è reale, ingrandita e capovolta; non viene riproposto il disegno della situazione in questione poiché si

<sup>2</sup> In figura è stato disegnato, tratteggiato, anche il raggio incidente passante per il vertice; il suo raggio riflesso è il suo simmetrico rispetto all'asse ottico. Si tratta di un altro raggio che è possibile disegnare per costruire l'immagine. Un altro esempio, il cui uso si vedrà fra poco, è il raggio incidente passante per il centro. Il lettore studioso spieghi perché qui non è stato possibile tracciare il raggio incidente passante per il centro.

tratta di ripetere esattamente il disegno di figura 3.10 scambiando i ruoli di  $PQ$  e  $P'Q'$ . **Caso  $p < f$ .**

Come già visto poco sopra, in questo caso l'immagine è virtuale. Nella figura 3.11 l'immagine è costruita tracciando il raggio incidente parallelo all'asse ottico, il cui raggio riflesso passa per il fuoco, e il raggio incidente nel vertice, il cui raggio riflesso è il simmetrico del raggio incidente rispetto all'asse ottico. I due raggi riflessi, come nel caso dello specchio piano, divergono; ma sono comunque omocentrici ad un centro virtuale. Quindi l'immagine di un oggetto che si trovi fra lo specchio ed il fuoco è virtuale, ingrandita e diritta.

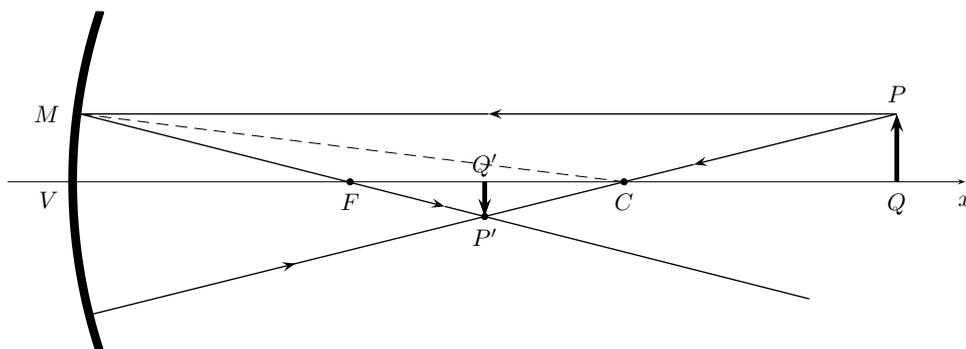


Figura 3.12: Ingrandimento trasversale per uno specchio concavo.

Si esamina ora come determinare l'ingrandimento prodotto da uno specchio. Si definisce **ingrandimento trasversale**  $I$  il rapporto fra la dimensione trasversale (cioè perpendicolare all'asse ottico)  $y'$  dell'immagine e quella  $y$  dell'oggetto, cioè, con riferimento alla figura 3.12.

$$I = \frac{y'}{y} . \quad (3.11)$$

In generale,

- se  $|I| > 1$  l'immagine è *ingrandita* rispetto all'oggetto;
- se  $|I| < 1$  l'immagine è *rimpicciolita* rispetto all'oggetto;
- se  $|I| = 1$  l'immagine è *equivalente* all'oggetto.

Il valore assoluto è necessario perché, come si vedrà tra poche righe,  $I$  può assumere valore negativo.

Sia dunque  $P'Q'$  l'immagine di  $PQ$  costruita mediante il raggio incidente parallelo all'asse ottico (che dà origine a un raggio riflesso passante per il fuoco) e quello passante per il centro (che incidendo lo specchio perpendicolarmente dà origine a un raggio riflesso che si sovrappone a quello incidente); osservando che i triangoli  $CPQ$  e  $CP'Q'$  sono simili, e quindi hanno i lati in proporzione, si ottiene un'espressione per il rapporto fra la dimensione dell'immagine e quella dell'oggetto. Vale:

$$I = \frac{y'}{y} = \frac{CQ'}{CQ} = \frac{r - p'}{p - r} . \quad (3.12)$$

Per un noto teorema di geometria piana, la bisettrice di un angolo interno di un triangolo divide il lato opposto in due parti proporzionali ai lati dell'angolo; applicando questo teorema al triangolo  $MPP'$  e alla bisettrice  $MC$  si ottiene  $MP' : MP = CP' : CP$ . Nella solita approssimazione di piccoli angoli vale  $MP' \simeq Q'V = p'$  e  $MP \simeq QV = p$ ; si arriva quindi a

$$\frac{p'}{p} = \frac{r - p'}{p - r} \quad (3.13)$$

si può così riscrivere l'ingrandimento trasversale nella semplice forma:

$$I = \frac{p'}{p} . \quad (3.14)$$

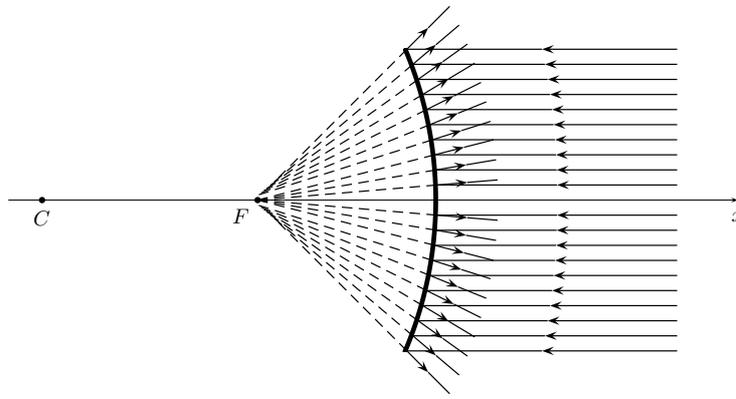
È chiaro che l'immagine è ingrandita se  $p' > p$ , mentre è rimpicciolita se  $0 < p' < p$ . Nel caso in cui sia  $p' < 0$ , cioè l'immagine sia virtuale, l'ingrandimento  $I$  è negativo, ma in valore assoluto maggiore di uno, cosicché l'immagine virtuale risulta sempre ingrandita. Infatti, dalla (3.9) si ottiene:

$$I = \frac{p'}{p} = \frac{p'}{f} - 1 < -1, \quad (3.15)$$

la disuguaglianza segue dal fatto che  $p'$  e  $f$  sono discordi; quindi  $|I| > 1$ .

#### SPECCHIO SFERICO CONVESSO

Lo specchio sferico convesso si comporta in modo simile a quello concavo; si può dimostrare, in modo analogo a quanto visto per lo specchio concavo, che per angoli piccoli si tratta di un dispositivo stigmatico; l'unica differenza è che i raggi incidenti paralleli all'asse ottico generano raggi divergenti, si tratta cioè di un fascio omocentrico con centro virtuale; il fuoco è dunque *virtuale*, come rappresentato in figura 3.13.



**Figura 3.13:** Il fuoco di uno sferico convesso.

Per un specchio convesso vale ancora la legge dei punti coniugati; in questo caso però, essendo il fuoco virtuale, vale  $f < 0$ ; dalla (3.9) si trova

$$\frac{1}{p'} = \frac{1}{f} - \frac{1}{p} = \frac{p-f}{pf} < 0; \quad (3.16)$$

si osservi che il secondo membro della precedente equazione è negativo per qualsiasi valore di  $p$ , il che significa che l'immagine generata da uno specchio convesso è sempre virtuale, per ogni posizione dell'oggetto. Si osservi inoltre che per l'ingrandimento  $I$  vale

$$I = \frac{p'}{p} = \frac{f}{p-f} \quad (3.17)$$

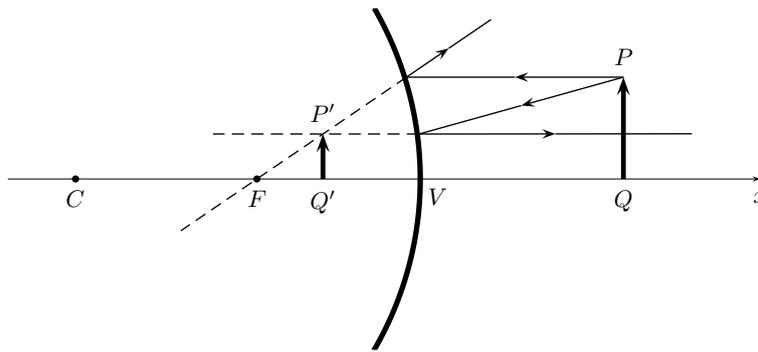
Per l'ingrandimento vale la relazione  $-1 < I < 0$ ; è infatti negativo perché  $p$  e  $p'$  sono discordi e vale

$$\frac{f}{p-f} > -1 \quad (3.18)$$

infatti, moltiplicando entrambi membri di questa disequazione per la quantità positiva  $p-f$ , si ottiene

$$f > -p + f \quad \longrightarrow \quad p > 0, \quad (3.19)$$

che, essendo vera, garantisce la verità della (3.18). L'immagine di un oggetto formata da uno specchio convesso è quindi sempre rimpicciolita. In figura 3.14 è mostrata la costruzione dell'immagine di un oggetto esteso per uno specchio convesso, dove si è utilizzato un raggio incidente parallelo all'asse ottico, che viene riflesso in direzione del fuoco, e un raggio incidente diretto verso il fuoco che viene riflesso parallelo all'asse. Si osservi, confrontando le figure 3.11 e



**Figura 3.14:** Costruzione dell'immagine per uno sferico convesso.

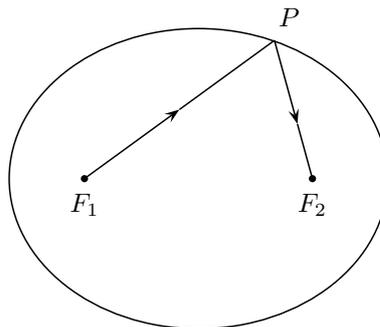
3.14, che si ottiene una dall'altra invertendo i cammini ottici; le proprietà dello specchio convesso, qui ricavate analiticamente, si sarebbero potute ottenere utilizzando il principio di invertibilità dei cammini ottici a partire dalle proprietà dello specchio concavo con oggetto posto fra il fuoco e lo specchio.

Per chiarezza, si riassumono qui di seguito le regole fondamentali per la costruzione geometrica delle immagini prodotte dagli specchi sferici.

1. Limitandosi a raggi che formano piccoli angoli con l'asse ottico, uno specchio sferico è un dispositivo stigmatico.
2. Per costruire l'immagine di un punto bastano quindi due raggi.
3. Un raggio incidente parallelo all'asse ottico si riflette passando per il fuoco.
4. Un raggio incidente passante per il fuoco si riflette parallelo all'asse ottico.
5. Un raggio incidente passante per il centro si riflette su sé stesso.
6. Un raggio incidente nel vertice si riflette simmetricamente all'asse ottico.

### Osservazioni

1. Come esempio dell'applicazione del principio di Fermat alla riflessione si consideri un'ellisse la cui superficie interna sia perfettamente riflettente. Ponendo una sorgente luminosa nel fuoco  $F_1$  (si veda la figura 3.15), tutti i raggi riflessi andranno a finire sull'altro fuoco  $F_2$ .

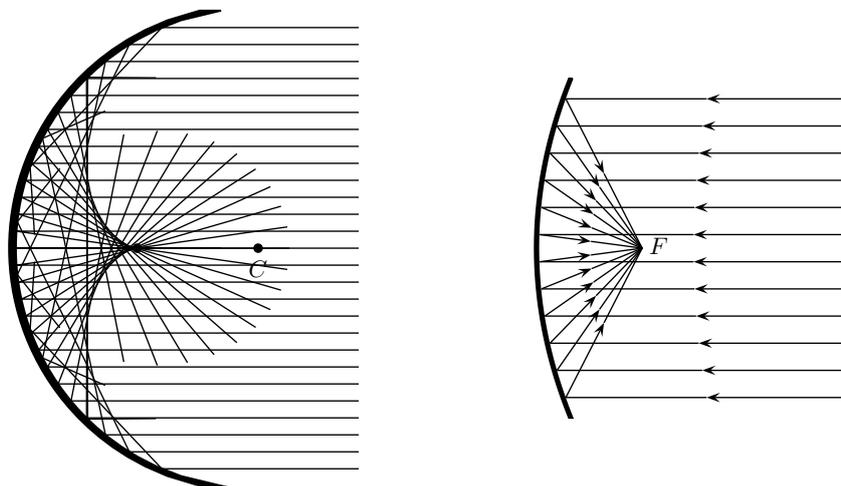


**Figura 3.15:** Uno specchio ellittico.

Infatti, per la proprietà focale dell'ellisse, qualsiasi sia il punto  $P$  di riflessione, la distanza percorsa dalla luce,  $F_1PF_2$ , è sempre la stessa, quindi la luce può scegliere indifferentemente qualsiasi percorso per andare da  $F_1$  a  $F_2$ , ed infatti è quello che accade: tutti i raggi uscenti da  $F_1$  si riflettono verso  $F_2$ .

2. Gli specchi sferici sono stigmatici solo per angoli piccoli, come detto sopra; per angoli non piccoli, ovvero per raggi incidenti lontano dall'asse ottico, lo stigmatismo è perduto. Quindi, per esempio, raggi incidenti paralleli all'asse ottico, ma da esso lontano, non

producono un fascio di raggi riflessi omocentrico e quindi i raggi riflessi non s'incontrano tutti nel fuoco ma formano una figura detta **caustica di riflessione**. Lo specchio che ha la proprietà di far convergere sul fuoco tutti i raggi incidenti paralleli all'asse ottico indipendentemente dalla loro distanza dall'asse è ottico e lo **specchio parabolico**. Il lettore studioso provi a dimostrare analiticamente che qualsiasi raggio luminoso che incida su uno specchio parabolico con direzione parallela all'asse si riflette in direzione del fuoco.



**Figura 3.16:** Caustica di riflessione in uno specchio sferico e uno specchio parabolico.

Per concludere è utile riassumere che tipo di immagini si formano mediante gli specchi sferici nei diversi casi

1. Specchi sferici concavi:  $p > 0$ ,  $f > 0$ ; si hanno quattro sottocasi:
  - i) se  $p > 2f$  allora  $f < p' < 2f$ : l'immagine è reale, rimpicciolita, capovolta.
  - ii) se  $p = 2f$  allora  $p' = p$ : l'immagine è reale, equivalente all'oggetto, capovolta.
  - iii) se  $f < p < 2f$  allora  $p' > 2f$ : l'immagine è reale, ingrandita, capovolta.
  - iv) se  $0 < p < f$  allora  $p' < 0$ : l'immagine è virtuale, ingrandita, diritta.
2. Specchi sferici convessi:  $p > 0$ ,  $f < 0$ ; in ogni caso  $p' < 0$  e l'immagine è sempre virtuale, rimpicciolita, diritta.

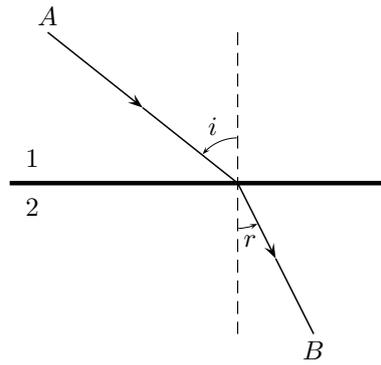
### 3.4 LA RIFRAZIONE.

Si vuole ora indagare quello che accade quando un raggio luminoso passa da un mezzo in cui si propaga con velocità  $v_1$  ad un secondo mezzo in cui si propaga con velocità  $v_2$ ; si supponga sia  $v_1 > v_2$ . Come visto sopra illustrando il principio di Fermat, in questo caso la traiettoria sarà una linea spezzata poiché la luce cercherà di mantenersi il più a lungo possibile nel mezzo in cui si muove più veloce. Il fenomeno per cui la luce devia passando da un mezzo trasparente ad un altro è detto **rifrazione** ed è regolato dalle seguenti leggi.

*Se un raggio luminoso incide su una superficie di separazione di due mezzi trasparenti esso cambia la propria direzione di propagazione in modo tale che*

1. *il raggio incidente ed il raggio rifratto siano complanari alla perpendicolare nel punto di incidenza.*
2. *il rapporto fra il seno dell'angolo di incidenza ed il seno dell'angolo di rifrazione è uguale al rapporto delle due velocità di propagazione.*

La seconda legge è nota con il nome di legge di **Snell-Descartes**.<sup>3</sup>



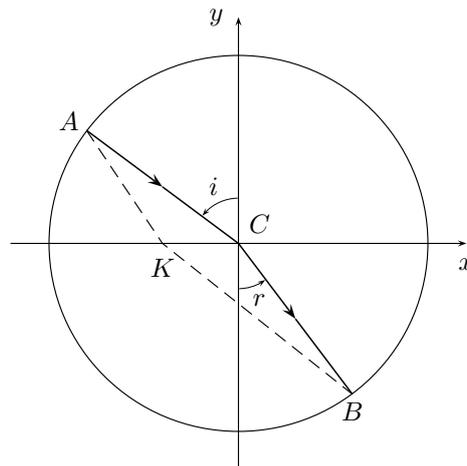
**Figura 3.17:** La seconda di Snell-Descartes.

Con riferimento alla figura 3.17, si dicono *angolo di incidenza* e *angolo di rifrazione* rispettivamente gli angoli  $i$  ed  $r$  formati dal raggio incidente e dal raggio rifratto con la retta perpendicolare nel punto di incidenza. La legge di Snell-Descartes quindi si può scrivere nel modo seguente

$$\boxed{\frac{\operatorname{sen} i}{\operatorname{sen} r} = \frac{v_1}{v_2}}. \quad (3.20)$$

La dimostrazione della (3.20) richiede le tecniche dell'analisi matematica; qui ci si limita a verificare<sup>4</sup> che essa sia in accordo con il principio di Fermat.

Si consideri la figura 3.18 in cui il punto  $C$  di incidenza del raggio luminoso sia il centro di un sistema di assi cartesiani e di una circonferenza di raggio unitario. Siano  $A$  e  $B$  rispettivamente i punti in cui il raggio incidente ed il raggio rifratto incontrano la circonferenza. Indicando come sopra con  $i$  l'angolo di incidenza e con  $r$  quello di rifrazione, vale la legge di Snell (3.20). Si vuole mostrare qui che se il raggio luminoso seguisse un cammino diverso il tempo di percorrenza sarebbe maggiore. Si supponga allora che il raggio luminoso incontri la superficie di separazione nel punto  $K$  diverso da  $C$ , ma ad esso molto vicino.



**Figura 3.18:** Verifica della legge di Snell.

Rispetto al sistema di assi cartesiani introdotto, le coordinate dei punti  $C$ ,  $A$ ,  $B$  e  $K$  sono

$$C(0,0) \quad , \quad A(\operatorname{sen} i, \cos i) \quad , \quad B(-\operatorname{sen} r, -\cos r) \quad , \quad K(x,0) . \quad (3.21)$$

<sup>3</sup> Willebrod Snell (1591-1626), matematico olandese.

<sup>4</sup> Per questa dimostrazione sono debitore di Fabio Maria Antoniali.

Si possono così determinare facilmente le distanze  $AK$  e  $KB$ :

$$\begin{aligned} AK &= \sqrt{(x - \text{sen } i)^2 + \cos^2 i} = \sqrt{1 + x^2 - 2x \text{sen } i} \\ KB &= \sqrt{(x + \text{sen } r)^2 + \cos^2 r} = \sqrt{1 + x^2 + 2x \text{sen } r} . \end{aligned} \quad (3.22)$$

I tempi di percorrenza dei cammini  $ACB$  e  $AKB$  sono quindi

$$\begin{aligned} \Delta t_{ACB} &= \frac{AC}{v_1} + \frac{CB}{v_2} = \frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2} \\ \Delta t_{AKB} &= \frac{AK}{v_1} + \frac{KB}{v_2} = \frac{\sqrt{1 + x^2 - 2x \text{sen } i}}{v_1} + \frac{\sqrt{1 + x^2 + 2x \text{sen } r}}{v_2} . \end{aligned} \quad (3.23)$$

La condizione da verificare è quindi

$$\Delta t_{ACB} < \Delta t_{AKB} \quad \longrightarrow \quad \frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2} < \frac{\sqrt{1 + x^2 - 2x \text{sen } i}}{v_1} + \frac{\sqrt{1 + x^2 + 2x \text{sen } r}}{v_2} \quad (3.24)$$

e quindi

$$\frac{\sqrt{1 + x^2 - 2x \text{sen } i} - 1}{v_1} + \frac{\sqrt{1 + x^2 + 2x \text{sen } r} - 1}{v_2} > 0 \quad (3.25)$$

A questo punto, visto che  $K$  è molto vicino a  $C$  e quindi  $x \ll 1$  si usa l'approssimazione vista nella nota 4 della sezione 2.12 con  $\alpha = 1/2$  visto che le quantità  $-2x \text{sen } i + x^2$  e  $2x \text{sen } r + x^2$ , per  $x$  piccolo, sono senz'altro piccole. Quindi, con questa approssimazione, l'equazione precedente diventa

$$\frac{x^2 - 2x \text{sen } i}{2v_1} + \frac{x^2 + 2x \text{sen } r}{2v_2} > 0 \quad \longrightarrow \quad \frac{1}{2} x^2 \left( \frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2} \right) > x \left( \frac{\text{sen } i}{v_1} - \frac{\text{sen } r}{v_2} \right) \quad (3.26)$$

che, se vale la (3.20), è certamente verificata, visto che il primo membro è certamente positivo ed il secondo membro si annulla.

Il rapporto fra le velocità della luce in due mezzi è anche detto **indice di rifrazione relativo** dei due mezzi e si indica con il simbolo

$$n_{12} = \frac{v_1}{v_2} . \quad (3.27)$$

In questo modo la legge della rifrazione diventa

$$\frac{\text{sen } i}{\text{sen } r} = n_{12} . \quad (3.28)$$

Molto utile è riferire l'indice di rifrazione di ogni mezzo al vuoto, ove la velocità della luce è la massima possibile. Si definisce quindi l'*indice di rifrazione assoluto* di un mezzo ove la luce si propaghi con velocità  $v$  con il rapporto di  $c$  su  $v$ :

$$n = \frac{c}{v} . \quad (3.29)$$

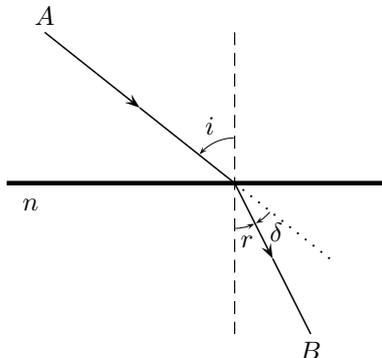
### Osservazioni

1. Si noti che valgono le seguenti relazioni fra indici di rifrazione relativi ed assoluti:

$$n_{12} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{c}{v_2} \cdot \frac{v_1}{c} = \frac{n_2}{n_1} . \quad (3.30)$$

2. Per trovare la condizione di brachistocrona, chi conosce l'analisi infinitesimale troverà che fare una derivata è molto più semplice che seguire il ragionamento qui proposto; inoltre, ragionando in termini di infinitesimi, avrà maggiormente sotto controllo le approssimazioni fatte.
3. Nel passare da un mezzo ad un altro la luce devia in modo tale che l'angolo rispetto alla normale sia maggiore nel mezzo ove la velocità è maggiore o, che è lo stesso, ove l'indice di rifrazione assoluto è minore; quindi, per esempio, passando dall'aria all'acqua la velocità diminuisce e quindi il raggio rifratto si avvicina alla perpendicolare. Il contrario accade nel passaggio dall'acqua all'aria.

4. È istruttivo ricavare la relazione che fornisce la deviazione  $\delta$  del raggio luminoso a causa di una rifrazione. Si considera qui il caso di un raggio luminoso che passa dal vuoto ad un mezzo con indice di rifrazione assoluto  $n$ .  
Si osservi che vale  $\delta = i - r$  e la legge di Snell diventa  $\text{sen } i = n \text{sen } r$ , da cui sottraendo ad



**Figura 3.19:** Deviazione dovuta alla rifrazione.

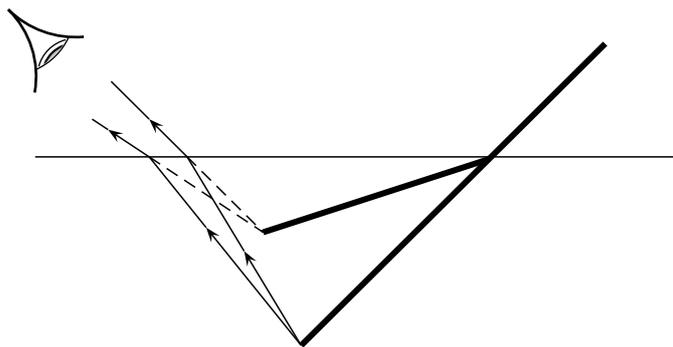
entrambi i membri  $\text{sen } r$  e usando le formule di prostaferesi, si può scrivere

$$\text{sen } i - \text{sen } r = (n - 1) \text{sen } r \quad \longrightarrow \quad 2 \text{sen } \frac{i - r}{2} \cos \frac{i + r}{2} = (n - 1) \text{sen } r \quad (3.31)$$

quindi, con facili passaggi

$$\text{sen } \frac{\delta}{2} = \frac{n - 1}{2} \frac{\text{sen } r}{\cos \frac{i + r}{2}} = \frac{n - 1}{2n} \frac{\text{sen } i}{\cos \frac{i + r}{2}}. \quad (3.32)$$

Si ricorda che, per angoli minori di angoli retti (com'è certamente il nostro caso), il seno è funzione crescente dell'angolo ed il coseno è funzione decrescente dell'angolo, quindi all'aumentare di  $i$ , cresce  $r$  e quindi cresce il numeratore e decresce il denominatore dell'ultima frazione scritta e quindi la frazione cresce. Se ne conclude che *la deviazione  $\delta$  aumenta all'aumentare dell'angolo di incidenza.*



**Figura 3.20:** Illusione ottica del bastone spezzato.

#### ILLUSIONI OTTICHE

La rifrazione è causa di alcune illusioni ottiche, la più comune delle quali è l'impressione di vedere un bastone spezzato se parzialmente immerso in acqua. Questa illusione, come illustrato in figura 3.20, è dovuta al fatto che i raggi che raggiungono l'occhio provenendo dalla parte immersa del bastone sono deviati al passaggio dall'acqua all'aria, mentre i raggi provenienti dalla parte emersa non lo sono; da qui l'impressione della spezzatura. Un'altra illusione molto comune è quella del **miraggio**; si verifica per esempio che durante una giornata estiva molto calda che, in lontananza

lungo una strada, si veda dell'acqua; questa illusione è dovuta al fatto che l'asfalto sotto i raggi del sole raggiunge una temperatura molto elevata; l'asfalto così arroventato scalda gli strati bassi dell'aria; l'aria scaldandosi diminuisce la sua densità; il risultato quindi è che l'aria si dispone a strati sempre meno densi a mano a mano che si avvicina al suolo.



Figura 3.21: Illusione ottica del miraggio.

La luce si muove con velocità maggiore negli strati più rarefatti e quindi tende a incurvare la propria traiettoria, come in figura 3.21, a causa del principio di Fermat. L'occhio quindi percepisce un raggio luminoso che proviene dal suolo ma che in realtà è un raggio che viene dal cielo ed è stato deviato: quella che sembra acqua quindi è l'immagine del cielo.

RIFLESSIONE TOTALE.

Non sempre il raggio luminoso può rifrangere e passare da un mezzo ad un altro. In effetti se un raggio luminoso passa da un mezzo più denso ad uno meno denso, cioè da uno con indice di rifrazione assoluto  $n_1$  ad un altro con indice di rifrazione assoluto  $n_2 < n_1$ , vi è un angolo di incidenza oltre il quale non vi è rifrazione. Facendo aumentare l'angolo di incidenza, come in figura 3.22, l'angolo di rifrazione aumenta di conseguenza. Osservando che l'angolo di rifrazione è maggiore di quello di incidenza, si vede che quando l'angolo di incidenza raggiunge un certo angolo, detto **angolo limite**  $i_0$ , l'angolo di rifrazione è retto e quindi il raggio rifratto si muove lungo la superficie.

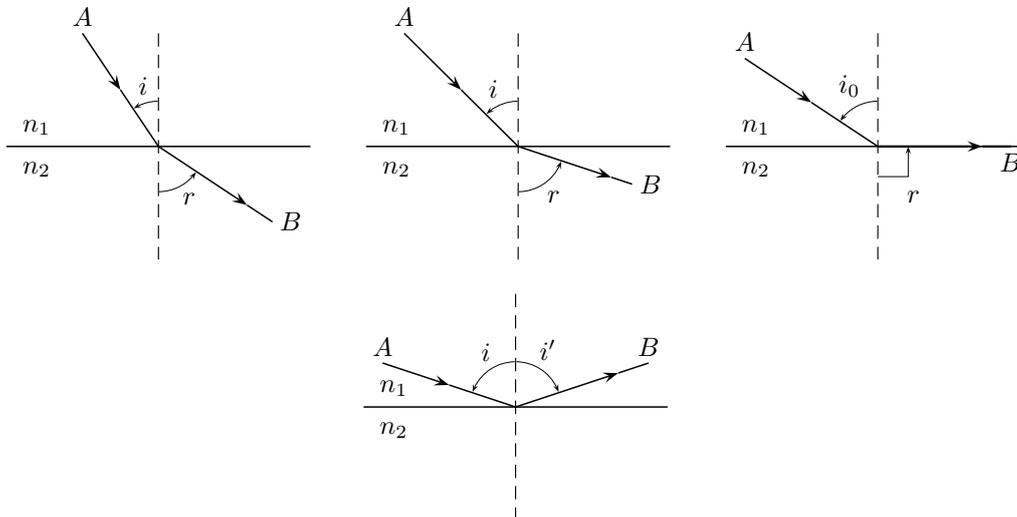


Figura 3.22: La riflessione totale.

Se l'angolo di incidenza è maggiore dell'angolo limite, il raggio incidente non riesce a passare ma si riflette indietro seguendo le usuali leggi della riflessione. Il valore di  $i_0$  si ricava facilmente dalla condizione  $r = 90^\circ$ , e quindi  $\text{sen } r = 1$  per cui dalla legge di Snell-Descartes si ottiene

$$\text{sen } i_0 = \frac{n_2}{n_1} \tag{3.33}$$

Questo fenomeno è detto **riflessione totale**. Per avere un'idea qualitativa di quel che accade, si consideri che l'acqua ha indice di rifrazione assoluto  $n = 1.33$ , quindi nel passare dall'acqua

all'aria (che ha indice di rifrazione praticamente uguale a 1) i raggi luminosi trovano un angolo limite pari a

$$i_0 = \arcsin \frac{1}{1.33} = 48.75^\circ . \quad (3.34)$$

Non sarà forse inutile sottolineare ancora che la rifrazione totale si può avere solo quando la luce passa da un mezzo più denso ad un mezzo meno denso.

#### LAMINA TRASPARENTE.

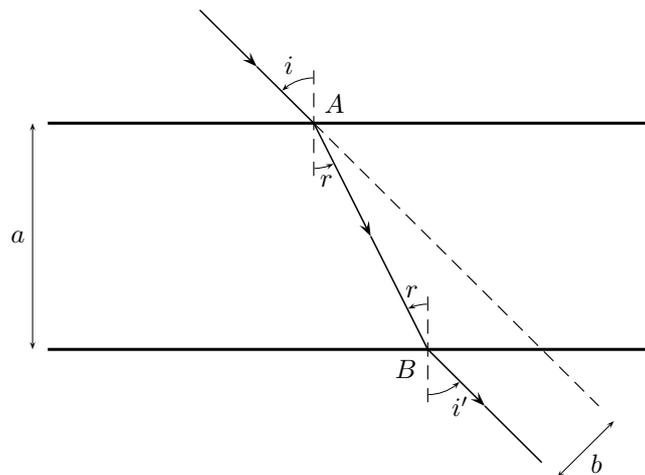
Si studia ora che accade quando la luce incide su di una lamina trasparente di indice di rifrazione assoluto  $n$  a facce parallele come quella rappresentata in figura. Si supponga che un raggio luminoso incida sulla lamina nel punto  $A$ , che prosegua all'interno della lamina fino al punto  $B$  e che quindi emerga nuovamente. Evidentemente se l'angolo di incidenza in  $A$  è  $i$  risulta un angolo di rifrazione  $r$  tale che sia

$$\text{sen } r = \frac{1}{n} \text{sen } i \quad (3.35)$$

Poiché le facce della lamina sono parallele, il raggio giunge in  $B$  con un angolo di incidenza uguale a  $r$ , l'angolo di rifrazione  $i'$  con cui il raggio emerge dalla lamina è dunque tale sia

$$\text{sen } i' = n \text{sen } r = n \frac{1}{n} \text{sen } i = \text{sen } i \quad \longleftrightarrow \quad i' = i . \quad (3.36)$$

Quindi il raggio incidente ed il raggio emergente formano con le due facce parallele della lamina lo stesso angolo  $i$ , quindi sono paralleli. In altre parole un raggio luminoso che attraversi una lamina a facce parallele non subisce una deviazione angolare ma viene semplicemente traslato di una quantità  $b$  che dipende dallo spessore  $a$  della lamina e dall'angolo di incidenza.



**Figura 3.23:** Deviazione della luce per mezzo di una lamina a facce parallele.

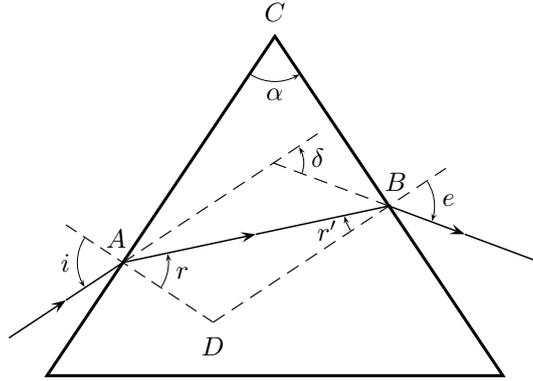
Per determinare  $b$ , con riferimento alla figura 3.23, si osservi che  $a = AB \cos r$  e che  $b = AB \text{sen}(i - r)$  si può così concludere che:

$$b = a \frac{\text{sen}(i - r)}{\cos r} . \quad (3.37)$$

#### PRISMA.

Diversa è la situazione quando le due facce della lamina non sono parallele. Un dispositivo di questo tipo è detto **prisma** ed è rappresentato in figura 3.24. In questa situazione il raggio luminoso subisce una deviazione  $\delta$  che dipende, oltre che dall'angolo di incidenza  $i$ , anche dall'angolo  $\alpha$  formato dalle due facce opposte.

Si osservi innanzitutto che il quadrilatero  $ADBC$  ha due angoli retti in  $A$  ed in  $B$ , quindi gli



**Figura 3.24:** La deviazione di un raggio luminoso dovuta al prisma.

angoli in  $C$  ed in  $D$  sono supplementari; pertanto  $\alpha = r + r'$  perché entrambi supplementari dello stesso angolo  $\hat{A}DB$ . Ora per il teorema dell'angolo esterno vale

$$\delta = (i - r) + (e - r') = i + e - (r + r') = i + e - \alpha \tag{3.38}$$

Tale deviazione è minima quando il raggio  $AB$  è perpendicolare alla bisettrice di  $\alpha$ ; questo si verifica quando  $i = e$  ed  $r = r'$ .

**Dimostrazione.**

Supponendo che il prisma sia di un materiale trasparente con indice di rifrazione assoluto  $n$  e che all'esterno l'indice di rifrazione assoluto sia 1, si considerino le due leggi applicate alle rifrazioni nei punti  $A$  e  $B$ .

$$\text{sen } i = n \text{ sen } r \quad , \quad \text{sen } e = n \text{ sen } r' \tag{3.39}$$

Sommando queste due membro a membro e utilizzando le formule di prostaferesi, si trova

$$\text{sen } i + \text{sen } e = n(\text{sen } r + \text{sen } r') \quad \longrightarrow \quad \text{sen } \frac{i + e}{2} \cos \frac{i - e}{2} = n \text{ sen } \frac{r + r'}{2} \cos \frac{r - r'}{2} \tag{3.40}$$

e quindi

$$\text{sen } \frac{i + e}{2} = n \text{ sen } \frac{\alpha}{2} \frac{\cos \frac{r - r'}{2}}{\cos \frac{i - e}{2}} . \tag{3.41}$$

Si supponga ora che sia  $i > e$ . Allora, considerando questi due angoli come angoli di incidenza (invocando, per  $e$ , l'invertibilità dei cammini ottici), la deviazione corrispondente a  $i$  deve essere maggiore della deviazione corrispondente a  $e$  (si veda la precedente osservazione 4), quindi

$$i - r > e - r' \tag{3.42}$$

da cui segue

$$i - e > r - r' . \tag{3.43}$$

Allo stesso modo, se  $e > i$  si deduce

$$e - i > r' - r . \tag{3.44}$$

Visto che il coseno è funzione decrescente dell'angolo, si ottiene, in entrambi i casi,

$$\cos \frac{r - r'}{2} > \cos \frac{i - e}{2} . \tag{3.45}$$

Quindi la frazione in (3.41) è sempre maggiore di 1 tranne che per  $e = i$ , nel qual caso anche  $r = r'$  ed essa diviene uguale a 1. Questo corrisponde evidentemente al valore minimo di  $\text{sen } \frac{i+e}{2}$  e quindi al valore minimo di  $i + e$  cioè, per  $\alpha$  fissato, al valore minimo  $\delta_m$  della deviazione.

Nel caso di deviazione minima risulta quindi  $i = e$  e quindi

$$r = r' = \frac{\alpha}{2} \quad , \quad \delta_m = 2i - \alpha . \tag{3.46}$$

Inoltre si osservi che dalla (3.41) si ottiene

$$\operatorname{sen} \frac{\alpha + \delta_m}{2} = n \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2}. \quad (3.47)$$

Quest'ultima relazione può essere utilizzata per misurare sperimentalmente l'indice di rifrazione assoluto della sostanza di cui è fatto il prisma. O, con un prisma cavo costruito con lastre di vetro a facce parallele riempito di un liquido, può essere usato per la determinazione dell'indice di rifrazione assoluto del liquido.

### 3.5 DIOTTRI SFERICI.

Si comincia qui lo studio delle lenti; la presente sezione getta le basi per una dimostrazione della formula delle lenti sottili; il lettore non interessato a tale dimostrazione può interrompere qui la lettura e riprenderla dall'equazione (3.67).

Si definisce *diottro sferico* una calotta sferica di separazione fra due mezzi trasparenti diversi di indici di rifrazione assoluti  $n$  ed  $n'$ .

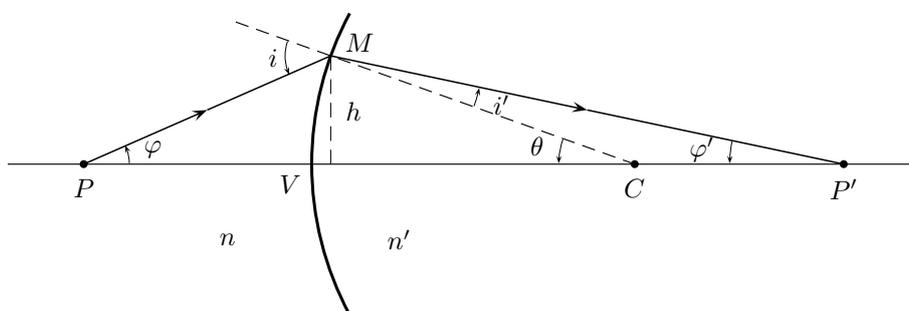


Figura 3.25: Diottro sferico.

Si definisce *asse ottico* l'asse di simmetria del diottro che passa per il centro di curvatura  $C$  della calotta e si definisce *vertice*  $V$  il punto di intersezione fra l'asse ottico e la calotta. Si consideri un punto  $P$  sull'asse ottico dalla parte del mezzo di indice di rifrazione  $n$ ; si costruisca un raggio che incida la calotta in un punto  $M$  e si rifranga fino a incontrare nuovamente l'asse ottico nel punto  $P'$  (si veda figura 3.25, ove si è scelto di rappresentare il caso  $n' > n$ ). Si ponga  $\widehat{MPV} = \varphi$ ,  $\widehat{MCV} = \theta$ ,  $\widehat{MP'V} = \varphi'$  e siano  $i$  ed  $i'$  gli angoli di incidenza e di rifrazione e sia  $h$  la distanza del punto di incidenza  $M$  dall'asse ottico; allora per le leggi della rifrazione vale la relazione

$$n \operatorname{sen} i = n' \operatorname{sen} i'. \quad (3.48)$$

Nell'usuale approssimazione di angoli piccoli vale  $\operatorname{sen} i \simeq i$  e  $\operatorname{sen} i' \simeq i'$ , quindi la precedente relazione diventa

$$ni = n'i'. \quad (3.49)$$

Con una approssimazione simile a quella che ci ha portato alla legge dei punti coniugati, si può scrivere

$$\varphi = \frac{h}{p}, \quad \varphi' = \frac{h}{p'}, \quad \theta = \frac{h}{r}. \quad (3.50)$$

Ora, utilizzando il teorema dell'angolo esterno, si può scrivere

$$i = \varphi + \theta, \quad i' = \theta - \varphi' \quad (3.51)$$

che, sostituita nella (3.49), dà

$$n(\varphi + \theta) = n'(\theta - \varphi') \quad \longrightarrow \quad n \frac{h}{p} + n \frac{h}{r} = n' \frac{h}{r} - n' \frac{h}{p'} \quad (3.52)$$

da cui si ricava

$$\boxed{\frac{n}{p} + \frac{n'}{p'} = \frac{n' - n}{r}} . \quad (3.53)$$

Poiché questa relazione, detta **equazione del diottro** è indipendente dal valore di  $\varphi$ , è chiaro che tutti i raggi uscenti da  $P$  vanno a finire in  $P'$  che, quindi è il punto immagine di  $P$ , cioè nella approssimazione di angoli piccoli il diottro sferico è un dispositivo stigmatico.

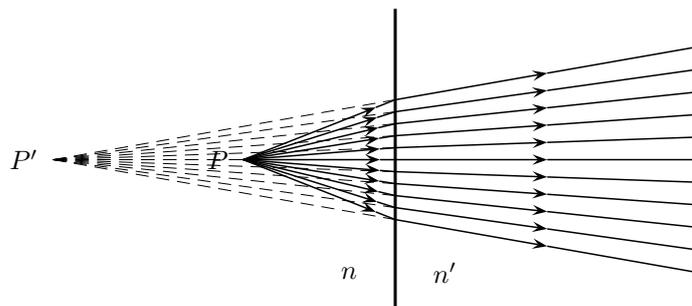
Conviene fare anche qui, come per gli specchi, una convenzione sui segni delle distanze degli oggetti dal vertice; una scelta molto comune è quella di legare la convenzione al verso di propagazione della luce;

- si considera  $p > 0$  se l'oggetto corrispondente si trova nel primo mezzo attraversato dalla luce, detto *mezzo d'incidenza*, e  $p < 0$  se si trova nel secondo mezzo, detto *mezzo di trasmissione* (questa seconda situazione capita quando si ha a che fare con sistema composti da più diottri consecutivi, si veda oltre);
- si considera  $p' > 0$  se l'immagine corrispondente si forma nel mezzo di trasmissione e  $p' < 0$  se si forma nel mezzo di incidenza;
- si considera  $r > 0$  se il centro di curvatura del diottro cade nel mezzo di trasmissione e  $r < 0$  se cade nel mezzo d'incidenza.

Con questa convenzione l'equazione (3.53) è valida per qualunque posizione dell'oggetto. Dalle prime due delle (3.50), si ottiene

$$\frac{\varphi'}{\varphi} = \frac{p}{p'} = C \quad (3.54)$$

ma, evidentemente, una volta posizionato  $P$  il rapporto fra  $p$  e  $p'$  resta costante; quindi *il rapporto fra gli angoli  $\varphi$  e  $\varphi'$  per ogni coppia di raggi coniugati è costante*. Tale costante  $C$  è detta **rapporto di convergenza**.



**Figura 3.26:** Diottro piano.

Se in particolare  $r \rightarrow \infty$  il diottro sferico diventa un diottro piano e vale

$$\frac{n}{p} + \frac{n'}{p'} = 0 \quad (3.55)$$

da cui si vede facilmente che  $p' < 0$ , cioè che l'immagine  $P'$  è virtuale (si veda la figura 3.26.) Ma si torni all'equazione (3.53). Se il punto  $P$  è molto lontano dal diottro, cosa convenzionalmente si indica con il simbolo  $p \rightarrow \infty$ , la frazione con  $p$  al denominatore è trascurabile e si ottiene

$$\frac{n'}{p'} = \frac{n' - n}{r} \quad \longrightarrow \quad p' = \frac{n'r}{n' - n} \equiv f' . \quad (3.56)$$

Viceversa se  $p' \rightarrow \infty$ , si ottiene

$$\frac{n}{p} = \frac{n' - n}{r} \quad \longrightarrow \quad p = \frac{nr}{n' - n} \equiv f . \quad (3.57)$$

Le grandezze  $f$  ed  $f'$  così definite sono la **distanza focale** anteriore e posteriore del diottro. Si osservi che vale

$$\frac{f}{f'} = \frac{n}{n'} , \quad (3.58)$$

cioè il rapporto fra l'indice di rifrazione di un mezzo e la distanza focale relativa è costante; tale costante si indica con  $D$  ed è detta **potere diottrico** del diottro; vale dunque

$$\frac{n}{f} = \frac{n'}{f'} \equiv D \quad (3.59)$$

L'unità di misura del potere diottrico è detta **diottria**. Dividendo per  $(n' - n)/r$ , l'equazione (3.53) si può scrivere nella forma:

$$\boxed{\frac{f}{p} + \frac{f'}{p'} = 1 .} \quad (3.60)$$

### 3.6 LENTI SOTTILI.

Una lente è un dispositivo trasparente delimitata da due calotte sferiche. Può essere considerata come una successione di due diottri sferici di centri  $C_1$  e  $C_2$  raggi  $r_1 = C_1V_1$  ed  $r_2 = C_2V_2$ .

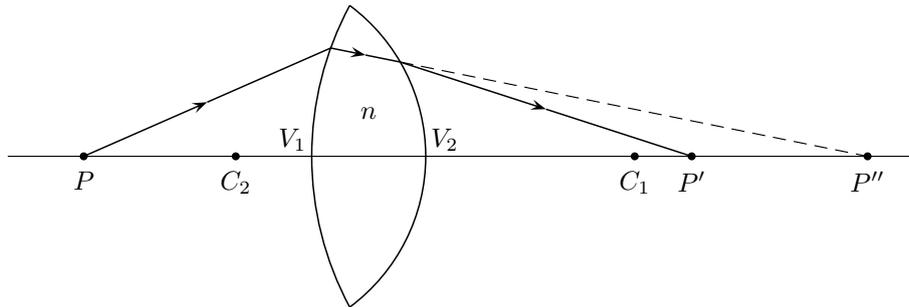


Figura 3.27: Lente.

Sia  $n$  l'indice di rifrazione assoluto della lente e sia 1 quello dell'esterno; allora le equazioni dei due diottri sono

$$\frac{1}{p_1} + \frac{n}{p'_1} = \frac{n-1}{r_1} \quad , \quad \frac{n}{p_2} + \frac{1}{p'_2} = \frac{1-n}{r_2} , \quad (3.61)$$

ove  $p_1, p'_1, p_2$  e  $p'_2$  sono rispettivamente le distanze dell'oggetto e dell'immagine dai vertici della prima e della seconda superficie diottrica. In figura 3.27, sono rappresentati tutti gli elementi di una lente. In particolare sono rappresentati il punto oggetto  $P$ , il punto immagine del primo diottro  $P''$  ed il punto immagine del secondo diottro  $P'$ . Si osservi che l'immagine  $P''$  del primo diottro funge da oggetto per il secondo, cioè  $p'_1 = V_1P''$  e  $p_2 = V_2P''$ ; quindi se l'immagine del primo diottro è reale, cioè  $p'_1 > 0$ , questa costituisce un oggetto virtuale per il secondo diottro e quindi  $p_2 < 0$ ; viceversa se l'immagine del primo diottro è virtuale, cioè  $p'_1 < 0$ , questa costituisce un oggetto reale per il secondo diottro e quindi  $p_2 > 0$ ;  $p'_1$  e  $p_2$  sono quindi sempre discordi<sup>5</sup>. Nel caso rappresentato in figura 3.27, ad esempio, si ha  $p_1 > 0, p'_1 > 0, r_1 > 0$  e  $p_2 < 0, p'_2 > 0, r_2 < 0$ .

<sup>5</sup> Si osservi che è possibile che l'immagine del primo diottro si formi dentro la lente; in questo caso sarebbero reali sia l'immagine del primo diottro che l'oggetto del secondo; una simile eventualità si verifica per lenti molto spesse e qui non viene considerato.

Se la lente è sottile i due vertici possono essere considerati, con buona approssimazione, coincidenti e quindi vale, in ogni caso,  $p_2 = -p'_1$  quindi la seconda delle precedenti equazioni può essere riscritta nella forma

$$-\frac{n}{p'_1} + \frac{1}{p_2} = \frac{1-n}{r_2}. \quad (3.62)$$

Sommando la prima delle (3.61) e la (3.62), si ottiene l'**equazione dei punti coniugati di una lente sottile** che è nota anche come *equazione del fabbricante di lenti*.

$$\boxed{\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = (n-1) \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)}, \quad (3.63)$$

ove si sono tralasciati gli oramai inutili pedici numerici. Si osservi che la quantità a secondo membro non è nulla poiché  $r_1$  ed  $r_2$  sono discordi.

Si ricorda che, per il principio di invertibilità dei cammini  $P$  e  $P'$  sono ciascuno l'immagine dell'altro. Se il punto oggetto  $P$  viene molto allontanato dalla lente, dalla parte sinistra, cioè se  $p \rightarrow \infty$  e  $1/p \rightarrow 0$  si trova

$$p' = \frac{1}{n-1} \frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1}. \quad (3.64)$$

Simmetricamente, se il punto oggetto  $P'$  si trova a grande distanza dalla lente, dalla parte destra, cioè se  $p' \rightarrow \infty$  e  $1/p' \rightarrow 0$  si trova

$$p = \frac{1}{n-1} \frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1}. \quad (3.65)$$

La grandezza

$$f = \frac{1}{n-1} \frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1} \quad (3.66)$$

è detta **distanza focale** della lente e, come si vede, è la stessa dalle due parti della lente, nonostante questa non sia simmetrica. La lente ha quindi due fuochi uno per lato alla stessa distanza.

La 3.63 può dunque essere riscritta nella più familiare forma

$$\boxed{\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = \frac{1}{f}}. \quad (3.67)$$

La quantità

$$D = \frac{1}{f} \quad (3.68)$$

è, come per il diottero sferico, detto potere diottrico (o potere convergente) della lente e viene anch'esso misurato in **diottrie**; per esempio una lente con distanza focale  $f = 20$  cm ha un potere diottrico  $D = 1/0.2 = 5$  diottrie.

A seconda del segno di  $D$  si dà la seguente classificazione delle lenti sottili, rappresentate nelle figure 3.28 e 3.29. Per la convenzione dei segni, si supponga che la luce si propaghi da sinistra verso destra.

1.  $D > 0$ . Corrisponde al caso della lente convergente e si presenta nei tre sottocasi:

- a)  $r_2 < 0$  e  $r_1 > 0$ : lente biconvessa;
- b)  $r_1 > 0$  e  $r_2 \rightarrow \infty$ : lente convesso-piana;
- c)  $0 < r_1 < r_2$ : lente convesso-concava.

2.  $D < 0$ . Corrisponde al caso della lente divergente e si presenta nei tre sottocasi:

- a)  $r_1 < 0$  e  $r_2 > 0$ : lente biconcava;

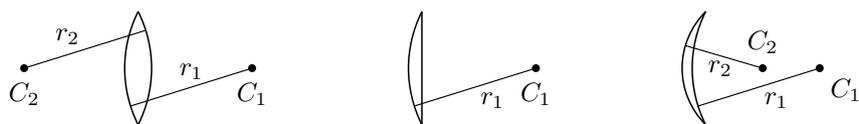


Figura 3.28: I diversi tipi di lenti convergenti.

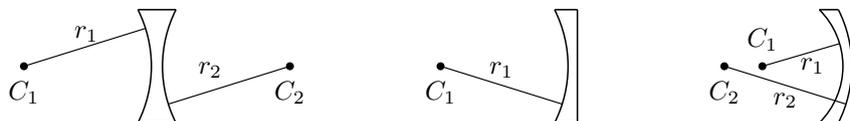


Figura 3.29: I diversi tipi di lenti divergenti.

- b)  $r_1 < 0$  e  $r_2 \rightarrow \infty$ : lente piano-concava;
- c)  $r_1 < r_2 < 0$  lente concavo-concava.

L'equazione (3.67) è formalmente identica alla (3.9); pertanto la costruzione delle immagine per le lenti è completamente analoga alla costruzione delle immagini già vista per gli specchi; per questo qui si eviterà di ripetere quanto già detto sopra, cercando di mettere in evidenza le analogie e le differenze

LENTE CONVERGENTE.

Come esempio di lente convergente si consideri una lente biconvessa simmetrica, cioè tale che valga la relazione  $r_1 = -r_2 \equiv r$ , allora

$$f = \frac{1}{n-1} \frac{r}{2} \quad , \quad D = 2(n-1) \frac{1}{r} . \tag{3.69}$$

Si osservi che l'indice di rifrazione di qualunque mezzo diverso dal vuoto è maggiore di 1, quindi per la nostra lente convergente vale  $f > 0$  e  $D > 0$ , come previsto.

Per l'ingrandimento trasversale è possibile dimostrare in modo perfettamente analogo (e quindi qui non si ripete) a quanto visto per gli specchi che vale

$$I = \frac{p'}{p} \tag{3.70}$$

quindi

$$I = \frac{1}{p} \left( \frac{1}{f} - \frac{1}{p} \right)^{-1} = \frac{1}{p} \frac{pf}{p-f} = \frac{f}{p-f} . \tag{3.71}$$

Quindi  $I$  è maggiore di 1 se  $f < p < 2f$ , è uguale a 1 se  $p = 2f$  ed è minore di 1 se  $p < f$  o  $p > 2f$ .

Si veda ora, con qualche esempio, come costruire le immagini prodotte dalle lenti.

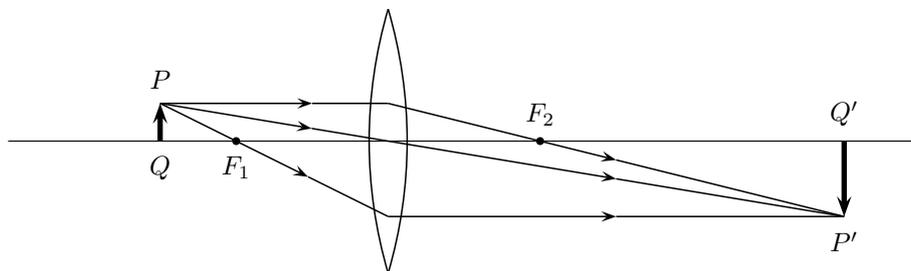
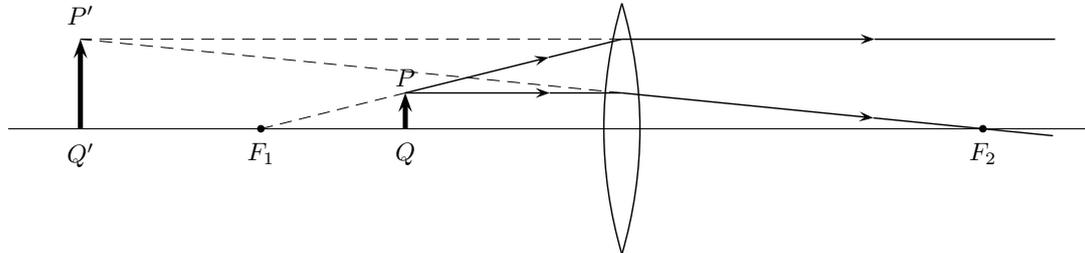


Figura 3.30: Formazione di un'immagine reale per mezzo di una lente biconvessa.

Si consideri per cominciare una lente biconvessa e si consideri un oggetto posto oltre il fuoco, cioè tale che sia  $p > f$ ; in tal caso, usando la 3.67, si ottiene

$$p - p' = p - \frac{fp}{p-f} = \frac{p(p-2f)}{p-f} ; \tag{3.72}$$

visto che il denominatore è positivo per ipotesi,  $p$  risulta maggiore o minore di  $p'$  a seconda che  $p$  sia maggiore o minore di  $2f$ . Questa, si noti, è la stessa situazione che già trovata discutendo gli specchi sferici. La differenza è ora che a distanza  $2f$  dalla lente non c'è il centro, la cui posizione si può ricavare dalla prima delle (3.69). La situazione è rappresentata in figura 3.30, ove, si noti, il raggio che arriva alla lente passando per il fuoco emerge parallelo all'asse ottico; similmente (più precisamente in virtù del principio di invertibilità dei cammini ottici) un raggio incidente parallelo all'asse ottico emerge passando per il fuoco.



**Figura 3.31:** Formazione di un'immagine virtuale per mezzo di una lente biconvessa.

Poiché il dispositivo è supposto stigmatico, questi due raggi bastano a costruire l'immagine cercata, tuttavia, per completezza, in figura è stata riportata anche il raggio passante per il centro della lente.

Se  $0 < p < f$ , analogamente al caso dello specchio concavo, si ottengono immagini virtuali diritte e ingrandite, come esemplificato in figura 3.31.

#### LENTE DIVERGENTE.

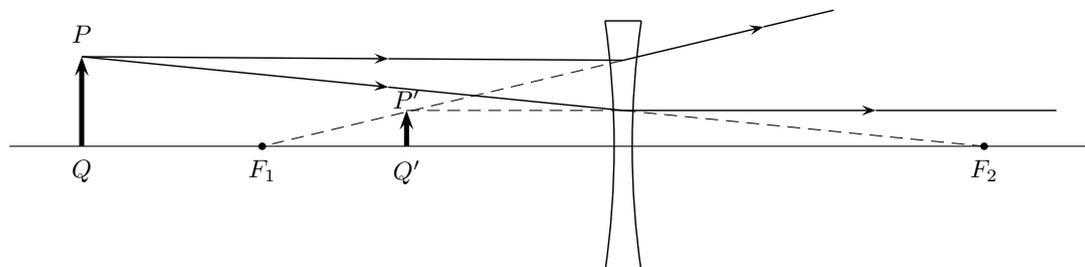
Similmente al caso della lente convergente si consideri qui una lente biconcava simmetrica, per cui quindi valga  $r_1 = -r_2 \equiv r$ . La distanza focale diventa allora

$$f = -\frac{1}{n-1} \frac{r}{2}, \quad D = -2(n-1) \frac{1}{r}. \quad (3.73)$$

Se la distanza focale è negativa, l'unica possibilità consentita dalla 3.67 è che sia  $p' < 0$  e  $|p'| < 0$ , il che significa che l'immagine è virtuale e rimpicciolita. Quest'ultima affermazione è anche confortata dal calcolo di  $I$ . Come per le lenti convergenti vale la relazione

$$I = \frac{f}{p-f}, \quad (3.74)$$

ma in questo caso il denominatore è positivo ed il numeratore è un numero negativo con valore assoluto minore del denominatore, quindi la  $-1 < I < 0$  e quindi l'immagine è rimpicciolita. Per maggior chiarezza si rappresenta la situazione con un disegno.



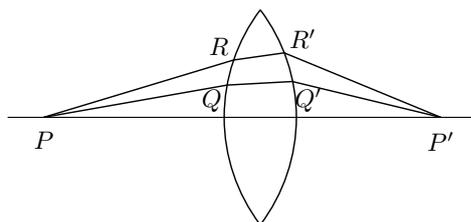
**Figura 3.32:** Formazione dell'immagine per mezzo di una lente biconcava.

Il raggio uscente da  $P$  parallelo all'asse ottico diverge in modo che il suo prolungamento si diretto verso il fuoco (qui, come si è visto sopra, la distanza focale è negativa e quindi il fuoco è virtuale). L'altro raggio rappresentato è diretto verso l'altro fuoco ed emerge parallelo all'asse ottico. I raggi

emergenti sono quindi divergenti; si incontrano i loro prolungamenti. Il dispositivo è supposto stigmatico quindi questi due raggi bastano a disegnare l'immagine che risulta virtuale, dritta e rimpicciolita.

### Osservazioni

1. In una lente sottile le porzioni di superficie della lente attorno al vertice sono con ottima approssimazione parallele; quindi un raggio luminoso che incida la lente sul vertice non subisce una deviazione angolare e, fino a che la lente è sottile anche  $b$  risulta trascurabile. In definitiva, un raggio che passi per il vertice di una lente sottile la attraversa senza deviazioni di sorta. Spesso è utile utilizzare questa proprietà nella costruzioni delle immagini.
2. La proprietà delle lenti convergenti (ma discorso analogo si potrebbe ripetere per le lenti divergenti) si può capire anche in termini del principio di Fermat.

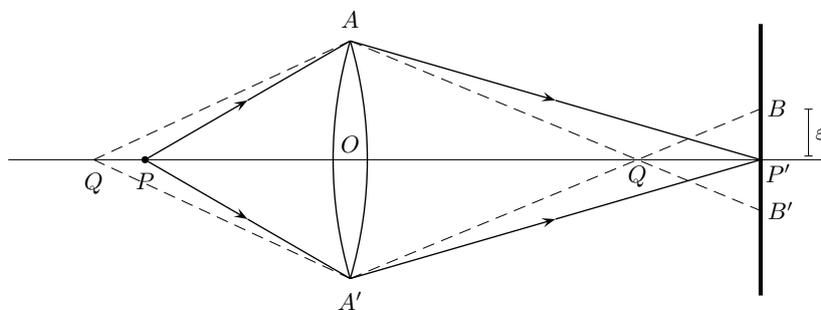


**Figura 3.33:** Proprietà della lente convergente in termini del principio di Fermat.

Si supponga infatti di voler costruire un dispositivo che faccia convergere tutti i raggi uscenti da una sorgente luminosa posta in  $P$  verso un punto  $P'$ . Per far ciò, visto che la luce sceglie sempre il percorso per il quale impiega il tempo minimo, è necessario che per tutti i percorsi la luce impieghi lo stesso tempo. Quindi un tale dispositivo deve rallentare la luce sui percorsi più brevi rispetto a quelli più lunghi in modo adeguato a che il tempo di percorrenza sia effettivamente lo stesso. Una lente convergente, come quella di figura 3.33 fa proprio questo. Infatti lungo il percorso più breve  $PQQ'P'$  la luce attraversa più vetro e quindi viene maggiormente rallentata che lungo il percorso  $PRR'P'$  e quindi, se calcolata opportunamente la forma del profilo della lente, la luce impiega esattamente lo stesso tempo per i due percorsi. Similmente accade per ogni altro possibile percorso. Quindi ogni raggio incidente la lente provenendo da  $P$  converge in  $P'$ .

### 3.7 PROFONDITÀ DI CAMPO.

Il problema che viene affrontato in questo paragrafo è quello di determinare quando l'immagine di un oggetto esteso longitudinalmente si formi su uno schermo, che, per fissare le idee, potrebbe essere una lastra fotografica.



**Figura 3.34:** Profondità di campo

Si consideri una lente convergente biconvessa di distanza focale  $f$  e sia  $P$  un punto oggetto

sull'asse ottico della lente ad una distanza  $p$  dal centro  $O$  della lente; la sua immagine, reale, si formi nel punto  $P'$  a distanza  $p'$  da  $O$  per cui vale la legge dei punti coniugati

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = \frac{1}{f}. \quad (3.75)$$

Si chiede in quali condizioni l'immagine di un secondo punto  $Q$ , che si trovi anch'esso sull'asse ottico ad una distanza  $\Delta p$  da  $P$ , si formi alla stessa distanza  $p'$  da  $O$ .

Evidentemente come risulta dallo studio precedente, e come è illustrato dalla figura 3.34, l'immagine  $Q'$  di  $Q$  non può formarsi alla stessa distanza; al contrario se l'oggetto si allontana dalla lente l'immagine si avvicina al fuoco (quindi alla stessa lente). Si vuole qui determinare, qual è la massima distanza fra  $P$  e  $Q$  oltre la quale le immagini dei due punti, che come detto si formano a distanze diverse, sono anche visti a distanze diverse. In altre parole, usando un linguaggio preso dalla pratica fotografica, si chiede quale sia la distanza fra  $P$  e  $Q$  oltre la quale  $P$  risulta a fuoco sullo schermo e  $Q$  no.

Sia quindi  $\Delta p$  la distanza fra  $P$  e  $Q$  e sia  $\Delta p'$  la distanza fra le due immagini  $P'$  e  $Q'$ . Come si vede dalla figura 3.34, la proiezione dell'immagine  $Q'$  sullo schermo a distanza  $p'$  dalla lente è una macchia compresa fra  $B$  e  $B'$  di raggio  $\varepsilon$ . Per la legge dei punti coniugati applicata a  $Q$  vale

$$\frac{1}{p + \Delta p} + \frac{1}{p' - \Delta p'} = \frac{1}{f}. \quad (3.76)$$

Sottraendo membro a membro le (3.75) e (3.76), si ottiene

$$\frac{1}{p + \Delta p} - \frac{1}{p} + \frac{1}{p' - \Delta p'} - \frac{1}{p'} = 0 \quad \longrightarrow \quad \frac{-\Delta p}{p^2 + p \Delta p} + \frac{\Delta p'}{p'^2 + p' \Delta p'} = 0 \quad (3.77)$$

se, come qui si suppone,  $p \gg \Delta p$  e  $p' \gg \Delta p'$  la precedente equazione si approssima in

$$-\frac{\Delta p}{p^2} + \frac{\Delta p'}{p'^2} = 0 \quad \longrightarrow \quad \Delta p = \frac{p^2}{p'^2} \Delta p'. \quad (3.78)$$

Si fa ora l'ipotesi aggiuntiva, sicuramente vera nel caso di una macchina fotografica: si suppone che  $P$  sia distante rispetto alla distanza focale, in tal caso vale con buona approssimazione

$$p' \simeq f \quad (3.79)$$

e quindi

$$\Delta p \simeq \frac{p^2}{f^2} \Delta p'. \quad (3.80)$$

Osservando che i triangoli isosceli  $AA'Q'$  e  $BB'Q'$  sono simili, valgono le proporzioni

$$\frac{P'B}{P'Q'} = \frac{OA}{OQ'}; \quad (3.81)$$

indicando con  $h$  il raggio  $OA$  della lente e osservando che valgono  $P'B = \varepsilon$ ,  $P'Q' = \Delta p'$ ,  $OQ' = f$ , la precedente equazione può essere scritta nella forma

$$\frac{\varepsilon}{\Delta p'} = \frac{h}{f} \quad \longrightarrow \quad \Delta p' = \frac{f}{h} \varepsilon \quad (3.82)$$

e quindi

$$\Delta p = \frac{p^2}{fh} \varepsilon. \quad (3.83)$$

Se  $\varepsilon_M$  è il massimo valore tollerabile perché l'immagine di  $Q$  non appaia sfocata, si possono considerare a fuoco tutti i punti che distano da  $P$  non più di

$$\Delta p_M = \frac{p^2}{fh} \varepsilon_M, \quad (3.84)$$

cioè quelli compresi fra  $p - \Delta p_M$  e  $p + \Delta p_M$ . La distanza  $2\Delta p_M$  è detta **profondità di campo**. La valutazione del parametro  $\varepsilon_M$  dipende dalla fisiologia dell'occhio. La retina è costituita da elementi sensibili disposti in modo discreto (da cui il nome); quindi due oggetti sono percepiti come distinti se le rispettive immagini si formano su elementi sensibili diversi della retina. Risulta che appaiono distinti due punti che giungono alla retina con un angolo maggiore di  $\alpha = 1' \simeq 3 \times 10^{-4}$  rad. Quindi l'immagine di  $Q$  non appare sfuocata se la macchia di diametro  $2\varepsilon$  appare cioè indistinguibile da un punto se è vista dall'occhio sotto un angolo minore di  $\alpha$ . Per esempio da una distanza pari a quella della visione distinta (definita nella prossima sezione) l'immagine di  $Q$  appare a fuoco se

$$\varepsilon_M = d_0 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \simeq d_0 \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2} 0.25 \cdot 3 \times 10^{-4} = 3.75 \times 10^{-5} . \quad (3.85)$$

Quindi nel caso di una lente di raggio  $h = 0.02$  m, e distanza focale  $f = 0.1$  m per un oggetto alla distanza di  $p = 5$  m si ha una profondità di campo pari a

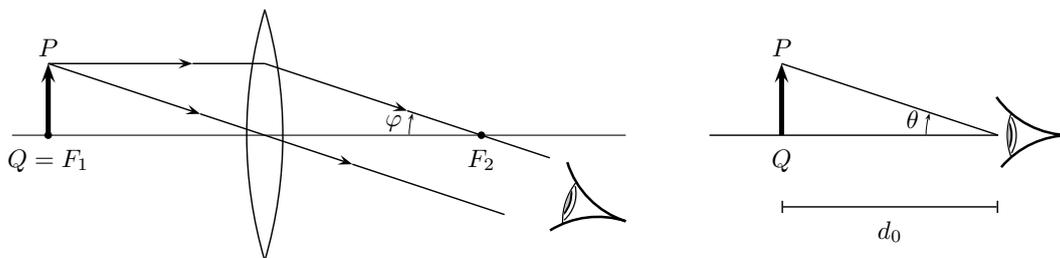
$$2\Delta p_M = \frac{p^2}{fh} d_0 \alpha \simeq 0.94 \text{ m} . \quad (3.86)$$

### 3.8 STRUMENTI OTTICI.

L'occhio umano normale, cioè non miope né ipermetrope<sup>6</sup>, distingue con chiarezza i particolari, anche minimi, di un oggetto quando questo è posto ad una distanza  $d_0$  che, in condizioni di illuminazione sufficiente, è circa di 25 cm. Tale distanza è detta **distanza della visione distinta**. Per distanze minori di  $d_0$  la precisione della percezione cala poiché non è possibile accomodare l'occhio (più precisamente non è possibile accomodare il **cristallino**). Per esaminare un oggetto in condizioni più favorevoli si utilizzano degli strumenti ottici, alcuni dei quali vengono descritti qui di seguito.

#### LENTE D'INGRANDIMENTO.

Detta anche *microscopio semplice*, si tratta di una lente convergente biconvessa utilizzata ponendo l'oggetto sul fuoco  $F$  in modo che l'immagine reale si formi all'infinito e l'occhio possa percepirla senza accomodare e quindi *senza fatica*.



**Figura 3.35:** Visione dell'oggetto con e senza lente d'ingrandimento

Si definisce allora **ingrandimento angolare** o *visuale* il rapporto  $J$  fra la tangente dell'angolo  $\varphi$  sotto cui è vista l'immagine mediante l'uso della lente d'ingrandimento e la tangente dell'angolo  $\theta$ , sotto cui l'oggetto sarebbe visto, senza strumento, se posto alla distanza della visione distinta  $d_0$ . Valgono le relazioni  $\operatorname{tg} \varphi = AB/f$  e  $\operatorname{tg} \theta = AB/d_0$  e si ottiene

$$J = \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\operatorname{tg} \theta} = \frac{d_0}{f} . \quad (3.87)$$

#### MICROSCOPIO

Detto anche *microscopio composto*, si tratta di un dispositivo costituito da due lenti convergenti

<sup>6</sup> Disturbi della visione per le quali si rimanda ad un testo di biologia.

biconvesse: l'**obiettivo**, posto piú vicino all'oggetto e l'**oculare**, posto piú vicino all'occhio. Siano  $f_1$  ed  $f_2$  le distanze focali rispettivamente di obiettivo ed oculare e sia  $D$  la distanza fra i due fuochi interni  $F_1$  ed  $F_2$ , in modo che sia  $f_1 + D + f_2$  la distanza fra le due lenti. L'oggetto  $AB$  da ingrandire viene posto poco oltre il fuoco  $F'_1$  dell'obiettivo, e la distanza  $D$  viene regolata in modo che l'immagine  $A'B'$  prodotta dall'obiettivo si formi sul fuoco dell'oculare.

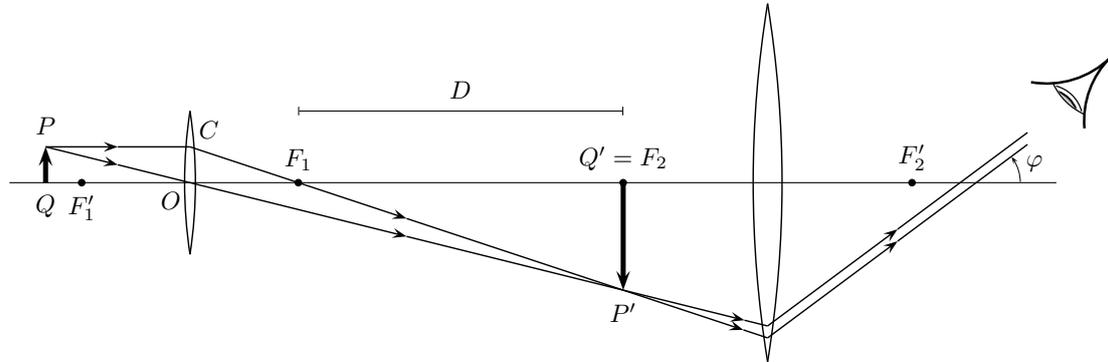


Figura 3.36: Microscopio.

In questo modo l'immagine finale si forma all'infinito e l'occhio la può vedere senza accomodare sotto un angolo  $\varphi$  dato da  $\text{tg } \varphi = A'B'/f_2$ . Si osservi ora che i due triangoli  $COF_1$  e  $A'B'F_1$  sono simili e quindi vale la proporzione

$$\frac{A'B'}{OC} = \frac{F_1B'}{OF_1} \quad \rightarrow \quad \frac{A'B'}{AB} = \frac{D}{f_1} \quad \rightarrow \quad A'B' = \frac{D}{f_1} AB ; \quad (3.88)$$

quindi

$$\text{tg } \varphi = \frac{A'B'}{f_2} = AB \frac{D}{f_1 f_2} . \quad (3.89)$$

D'altra parte senza microscopio l'angolo  $\theta$  sotto cui è visto l'oggetto a distanza della visione distinta è, come visto sopra,  $\text{tg } \theta = AB/d_0$ . Quindi

$$J = \frac{Dd_0}{f_1 f_2} . \quad (3.90)$$

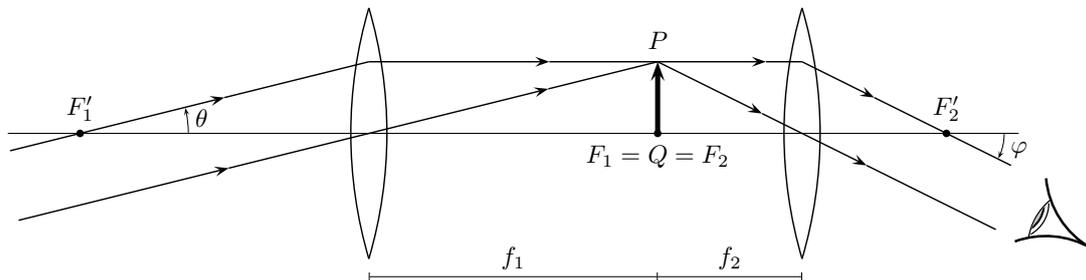


Figura 3.37: Cannocchiale.

CANNOCCHIALE

È uno strumento utilizzato vedere gli oggetti a grande distanza. È costituito, come il microscopio, da due lenti, un obiettivo e un oculare, si veda la figura 3.37. Queste due lenti sono montate in modo che i loro due fuochi coincidano. In questo modo l'immagine dell'obiettivo, di un oggetto molto lontano, si forma sul fuoco; questa immagine, a sua volta, fa da oggetto per l'oculare che

forma un'immagine all'infinito in modo tale da poter essere vista dall'occhio senza sforzo.  
Vale allora

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{AB}{f_1} \quad , \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{AB}{f_2} \quad (3.91)$$

quindi

$$J = \frac{f_1}{f_2} . \quad (3.92)$$

# 4

## OTTICA ONDULATORIA.

---

Il modello corpuscolare che sta alla base dell'ottica geometrica sopra studiata, non basta a rendere conto di tutti i fenomeni ottici. Si rende quindi necessaria l'introduzione di un modello alternativo: questo è il modello ondulatorio.

Tale modello prevede che la luce consista nella propagazione di un'onda che si propaga a partire da una sorgente in tutte le direzioni secondo il principio di Huygens. L'energia per unità di tempo emessa dalla sorgente è detta **potenza irradiata** ed è proporzionale al quadrato dell'ampiezza dell'onda secondo l'equazione (2.23) della parte II; si definisce **intensità luminosa** la potenza irradiata per unità di angolo solido<sup>1</sup> quindi:

$$I = \frac{P}{4\pi} = \frac{1}{8\pi} \kappa A^2 \quad (4.1)$$

L'intensità luminosa quindi è proporzionale al quadrato dell'ampiezza luminosa. L'unità di misura dell'intensità luminosa è una delle unità fondamentali del Sistema Internazionale ed è detta **candela**, simbolo cd.<sup>2</sup>

Nel seguito si analizzano i fenomeni in cui si manifesta la natura ondulatoria della luce e che non rientrano nell'ambito del modello dell'ottica geometrica. Si segnala che nelle figure, per chiarezza, si è scelto di disegnare le rette che indicano la direzione di propagazione delle onde, queste sono in ogni punto perpendicolari al fronte d'onda.

### 4.1 INTERFERENZA.

Le onde luminose, come tutte le onde, interferiscono fra loro; questa proprietà può venir mostrata mediante vari esperimenti; in quel che segue se ne descrivono alcuni dei più celebri.

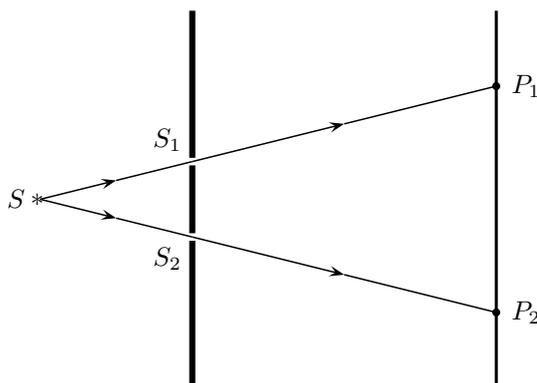
#### FORI DI YOUNG

L'esperimento che per primo ha mostrato che la luce si comporta come onde è dovuto a Thomas Young. Una sorgente luminosa puntiforme  $S$  è posta di fronte ad uno schermo opaco con due piccole fenditure  $S_1$  ed  $S_2$  equidistanti da  $S$ . A destra dello schermo c'è uno spazio non illuminato da altro se non dalla luce che passa da  $S_1$  ed  $S_2$ . Sulla parete di fronte non si formano due strisce luminose nei punti  $P_1$  e  $P_2$  (si veda la figura 4.1) come sarebbe da aspettarsi utilizzando le regole dell'ottica geometrica e quindi il modello corpuscolare che le sta a fondamento. Quello che si vede è una serie di strisce alternate luminose e scure. Il fenomeno è perfettamente spiegabile in termini del modello ondulatorio. Per vederlo si supponga ora che  $S$  sia la sorgente di onde luminose sferiche; quando il fronte d'onda raggiunge lo schermo, per il principio di Huygens,  $S_1$  ed  $S_2$  si comportano come sorgenti secondarie di onde luminose aventi la stessa ampiezza e la frequenza dell'onda primaria; se  $S_1$  ed  $S_2$  sono esattamente equidistanti da  $S$  le due onde secondarie hanno la stessa fase, altrimenti risultano sfasate per una fase  $\theta$  costante nel tempo.

<sup>1</sup> Si dice angolo solido  $\Omega$  di vertice  $V$  la generalizzazione nello spazio del concetto di angolo piano; può essere definito come la porzione di spazio racchiusa da un cono avente il vertice in  $V$ ; l'unità di misura dell'angolo solido è detto **steradiano** (simbolo sr) ed è il rapporto fra la superficie della calotta sferica individuata dal cono sulla superficie di una sfera con centro in  $V$  e il quadrato del raggio della sfera; nella situazione presente è utile determinare l'angolo solido corrispondente all'intera sfera, per cui vale

$$\Omega = \frac{4\pi r^2}{r^2} = 4\pi \text{ sr}.$$

<sup>2</sup> La candela è l'intensità luminosa, in una data direzione, di una sorgente che emette radiazione di frequenza  $\nu = 540 \times 10^{12}$  Hz con una potenza di  $1/683 \text{ W sr}^{-1}$ .

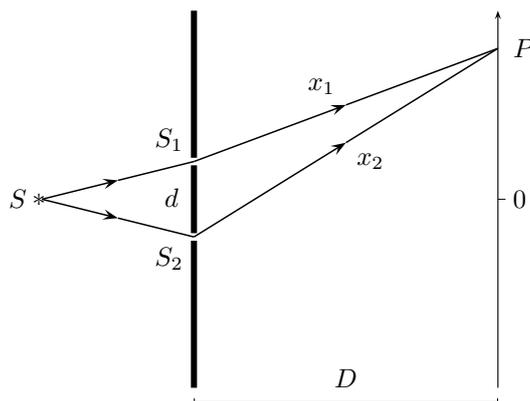


**Figura 4.1:** I fori di Young.

Due sorgenti di onde che abbiano differenza di fase iniziale costante nel tempo si dicono **coerenti**. In generale quindi le equazioni delle due onde emesse da  $S_1$  ed  $S_2$  sono

$$y_1(t, x) = A \cos \left[ \omega \left( t - \frac{x}{v} \right) \right] \quad , \quad y_2(t, x) = A \cos \left[ \omega \left( t - \frac{x}{v} \right) + \theta \right] \quad , \quad (4.2)$$

Per semplicità, in quel che segue, senza diminuire la generalità dell'argomento, si suppone che la differenza di fase iniziale  $\theta$  sia nulla.



**Figura 4.2:** I percorsi della luce dalle due sorgenti.

Si introduca un asse cartesiano sullo schermo che si suppone distante  $D$  dalle fenditure; si ora  $P$  di coordinate  $(D, y)$  un punto sullo schermo distante rispettivamente  $x_1$  ed  $x_2$  dalle sorgenti  $S_1$  ed  $S_2$ . In  $P$  le due onde interferiscono dando origine all'onda di equazione (al solito si usa la formula di prostaferesi)

$$\begin{aligned} y_1(t, x_1) + y_2(t, x_2) &= A \cos \left[ \omega \left( t - \frac{x_1}{v} \right) \right] + A \cos \left[ \omega \left( t - \frac{x_2}{v} \right) \right] = \\ &= 2A \cos \left( \omega \frac{x_2 - x_1}{2v} \right) \cos \left[ \omega \left( t - \frac{x_2 + x_1}{2v} \right) \right] . \end{aligned} \quad (4.3)$$

L'ampiezza di quest'onda è

$$2A \cos \left( \omega \frac{x_2 - x_1}{2v} \right) ; \quad (4.4)$$

si noti che dipende dalla differenza  $\Delta x = x_2 - x_1$ . Indicando con  $n$  l'indice di rifrazione assoluto del mezzo in cui si propaga la luce, con  $c$  la velocità della luce nel vuoto e notando che  $c/v = n$ , si può riscrivere l'argomento del coseno dell'ultima equazione nella forma seguente

$$\omega \frac{x_2 - x_1}{2v} = \frac{\pi}{cT} n \Delta x = \frac{\pi}{\lambda} n \Delta x . \quad (4.5)$$

Qui  $\lambda$  è la lunghezza dell'onda luminosa nel vuoto. Da questa discussione segue che si ha interferenza costruttiva quando

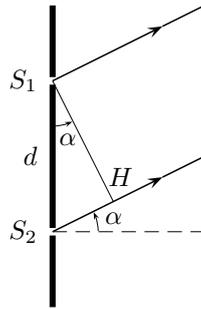
$$\frac{\pi}{\lambda} n \Delta x = k\pi \quad \longrightarrow \quad n \Delta x = k\lambda ; \quad (4.6)$$

si ha invece interferenza distruttiva quando

$$\frac{\pi}{\lambda} n \Delta x = (2k + 1) \frac{\pi}{2} \quad \longrightarrow \quad n \Delta x = (2k + 1) \frac{\lambda}{2} . \quad (4.7)$$

Avere interferenza costruttiva o distruttiva dipende quindi dal fatto che  $n\Delta x$  sia uguale ad un numero intero di lunghezze d'onda o di mezze lunghezze d'onda. La quantità  $n\Delta x$  è detta **differenza dei cammini ottici**. Si osservi che se  $\Delta x$  è la distanza percorsa dalla luce alla velocità  $v$ ,  $n\Delta x$  è la distanza percorsa, nello stesso tempo, dalla luce nel vuoto; infatti nel tempo  $\Delta x/v$  in cui a velocità  $v$  si percorre la distanza  $\Delta x$ , a velocità  $c$  si percorre la distanza  $c\Delta x/v = n\Delta x$ . Si può quindi fare la seguente affermazione di validità generale.

*Qualunque sia il mezzo in cui la luce si propaga, in tempi uguali vengono percorsi cammini ottici uguali.*



**Figura 4.3:** La differenza dei due percorsi.

Osservando ora la figura 4.3, si vede che, detta  $d$  la distanza fra i fori  $S_1$  ed  $S_2$ , e indicando con  $\alpha$  l'angolo di uscita della luce dai fori, la differenza  $\Delta x = x_2 - x_1$  è data dal segmento  $S_2H$  e quindi può essere scritta nella forma  $\Delta x = d \sin \alpha$  e quindi si ha interferenza costruttiva, e quindi le strisce luminose, quando l'angolo  $\alpha$  verifica la relazione

$$nd \sin \alpha = k\lambda ; \quad (4.8)$$

mentre si ha interferenza distruttiva, e quindi le strisce scure, quando l'angolo  $\alpha$  verifica la relazione

$$nd \sin \alpha = (2k + 1) \frac{\lambda}{2} . \quad (4.9)$$

Indicando con  $D$  la distanza fra lo schermo ove si trovano i fori e quello ove si formano le figure di interferenza, si può, con buona approssimazione e per angoli non troppo grandi, porre  $\sin \alpha = y/D$  (si veda la figura 4.2), se  $y$  è la distanza del punto sullo schermo ove si forma la figura d'interferenza dal punto centrale. Allora le posizioni sullo schermo ove si formano rispettivamente le strisce luminose e scure sono date dalle relazioni

$$y_{MAX} = \frac{D}{nd} k\lambda \quad , \quad y_{MIN} = \frac{D}{nd} (2k + 1) \frac{\lambda}{2} . \quad (4.10)$$

### Osservazioni

1. Si vede quindi che il modello ondulatorio diversamente da quello corpuscolare, rende conto del comportamento della luce nell'esperimento di Young, proprio grazie all'interferenza. L'accordo fra le previsioni della teoria e l'esperimento è ottimo.
2. Le relazioni (4.8), (4.9) e (4.10) vengono solitamente utilizzate per la determinazione una lunghezza d'onda ignota, misurando l'angolo  $\alpha$  o la distanza  $y$ .
3. È il caso di sottolineare a questo punto il ruolo fondamentale dell'ipotesi di coerenza della sorgenti  $S_1$  ed  $S_2$ . In mancanza di tale coerenza infatti, la differenza di fase fra le due onde varia così velocemente da far sí che in ogni istante l'interferenza costruttiva si venga a formare in punti diversi dello schermo, distruggendo completamente la figura d'interferenza.
4. Si precisa qui qualcosa che è già implicito in quanto visto sopra, ma che, per maggiore chiarezza, conviene esplicitare: esiste una precisa relazione fra la differenza di cammini ottici fra le onde generate da due sorgenti coerenti e la loro differenza di fase. In particolare si supponga che sia  $\delta$  la differenza dei cammini ottici; questa risulta in una *traslazione* di  $\delta$  di un'onda rispetto all'altra. Quindi se un'onda ha la funzione data, per esempio, dalla prima delle (4.2), la seconda funzione d'onda diviene

$$A \cos \left[ \omega \left( t - \frac{x - \delta}{v} \right) \right] = A \cos \left[ \omega \left( t - \frac{x}{v} \right) + \frac{\omega \delta}{v} \right] ; \quad (4.11)$$

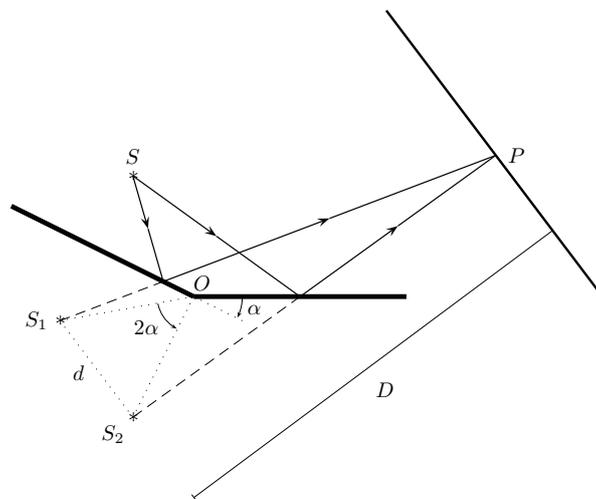
si ha quindi uno sfasamento  $\varphi = \omega \delta / v$ . Ricordando che

$$\frac{\omega \delta}{v} = \frac{2\pi}{vT} \delta = \frac{2\pi}{\lambda} \delta , \quad (4.12)$$

si può concludere che la relazione fra la differenza  $\delta$  di cammini ottici e la differenza di fase  $\varphi$  fra le onde prodotte da due sorgenti coerenti è data dall'equazione

$$\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} \delta . \quad (4.13)$$

Di seguito sono proposti, in carattere tipografico minore, alcuni dispositivi classici che usano l'interferenza della luce.



**Figura 4.4:** Gli specchi di Fresnel.

SPECCHI DI FRESNEL.

Due sorgenti coerenti possono essere facilmente ottenute mediante il dispositivo chiamato *specchi di Fresnel*. Si considerino due specchi piani, disposti in modo che i loro piani formino un angolo  $\alpha$  come in figura 4.4. Allora una sorgente  $S$  forma due immagini virtuali  $S_1$  ed  $S_2$ ; queste due immagini, in quanto copie identiche di  $S$ , sono due sorgenti coerenti; sia  $d$  la loro distanza, come in figura 4.4. Se di fronte ai due specchi si pone uno schermo opaco parallelo allo spigolo  $O$  formato dai due specchi e a distanza  $D$  da  $S_1$  ed  $S_2$ , su di esso si formano delle frange di interferenza. Lasciando al lettore studioso la dimostrazione che  $S_1\tilde{O}S_2 = 2\alpha$ , si ricava

$$d = 2h \operatorname{sen} \alpha . \tag{4.14}$$

A questo punto il dispositivo è equivalente ai fori di Young discussi sopra ed è possibile usare le formule (4.10).

LAMINA SOTTILE.

Si consideri una lamina a facce piane e parallele distanti  $h$  costituita da un materiale perfettamente trasparente di indice di rifrazione  $n$ . Si supponga che un raggio luminoso incida perpendicolarmente sulla superficie superiore.

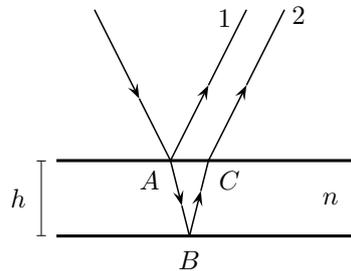


Figura 4.5: Doppia riflessione su una lamina sottile.

In figura 4.5 il raggio è rappresentato obliquo per consentire la rappresentazione pittorica non sovrapposta di tutti i raggi; si può pensare che comunque la validità del ragionamento si mantenga per angoli di incidenza piccoli. Quello che si osserva guardando dall'alto, se la lamina è sufficientemente sottile, è una serie di righe luminose e scure: il fenomeno si spiega ancora con l'interferenza.

Il raggio, quando incontra la superficie della lamina in  $A$ , parte si riflette e parte si trasmette. Il raggio riflesso segue le normali leggi della riflessione, ma utilizzando il modello ondulatorio, va considerato un'onda che si riflette incidendo su un mezzo più denso; quello che succede qui è uguale a quanto discusso per la riflessione di un'onda su una corda con l'estremo fissato (si veda la sezione 2.5 della parte I); l'onda scambia creste con ventri, viene cioè sfasata di mezza lunghezza d'onda.

L'onda trasmessa va a riflettersi sulla seconda superficie della lamina in  $B$ ; qui la riflessione avviene incidendo su una superficie meno densa e quindi, come per la riflessione dell'onda su una corda con estremo non fissato, si riflette identica all'onda incidente; quindi risale e va ad interferire con la prima onda riflessa in  $C$ . Questa seconda viene sfasata a causa del maggiore cammino ottico percorso. Riassumendo, i cammini ottici percorsi dalle due onde dal punto  $A$  fino alla loro interferenza sono quindi, nell'approssimazione  $AB = BC \simeq h$ ,

$$x_1 = \frac{\lambda}{2} \quad , \quad x_2 = 2nh \tag{4.15}$$

e quindi la differenza di cammini ottici è

$$\Delta x = x_2 - x_1 = 2nh - \frac{\lambda}{2} . \tag{4.16}$$

Si ha pertanto interferenza costruttiva, e quindi strisce luminose, quando la differenza dei cammini ottici è pari a un numero intero di lunghezze d'onda, cioè quando

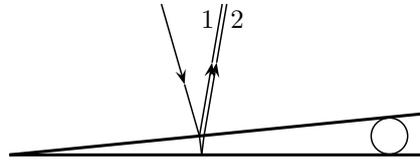
$$2nh - \frac{\lambda}{2} = k\lambda \quad \longrightarrow \quad 2nh = \frac{2k+1}{2}\lambda \tag{4.17}$$

e si ha interferenza distruttiva, e quindi strisce scure, quando la differenza dei cammini ottici è pari ad un numero dispari di mezza lunghezze d'onda, cioè quando

$$2nh - \frac{\lambda}{2} = \frac{2k-1}{2}\lambda \quad \longrightarrow \quad 2nh = k\lambda . \tag{4.18}$$

## CUNEO D'ARIA.

Un dispositivo simile al precedente è costituito da due lamine di vetro spesse affacciate e messe a contatto ad un estremo, mentre all'altro sono mantenute distanti tramite uno spessore; basta poco per ottenere l'effetto desiderato: un capello.



**Figura 4.6:** Il cuneo d'aria.

In figura 4.6 sono rappresentate solo le due superfici affacciantesi. Anche in questo caso si vedono formarsi delle frange a causa dell'interferenza fra raggi adiacenti. Il primo raggio riflesso sulla superficie superiore viene ad interferire con quello incidente nella faccia inferiore che percorre uno spazio in più pari a due volte lo spessore  $h$  del cuneo d'aria in quel punto; inoltre esso viene sfasato di mezza lunghezza d'onda riflettendosi su una superficie che separa un mezzo meno denso da uno più denso. La differenza dei cammini ottici è quindi

$$\Delta x = x_2 - x_1 = 2h + \frac{\lambda}{2}. \quad (4.19)$$

Si hanno quindi frange chiare per

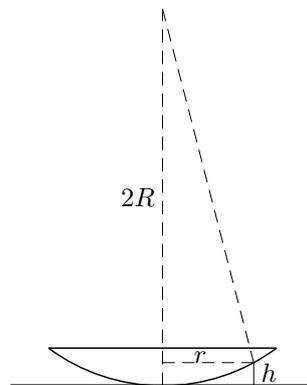
$$2h + \frac{\lambda}{2} = k\lambda \quad \longrightarrow \quad h = \frac{2k-1}{4}\lambda \quad (4.20)$$

e frange scure per

$$2h + \frac{\lambda}{2} = \frac{2k+1}{2}\lambda \quad \longrightarrow \quad h = k\frac{\lambda}{2}. \quad (4.21)$$

## ANELLI DI NEWTON.

Si consideri una calotta sferica di raggio  $R$  costituita di vetro di indice rifrazione  $n$  appoggiata su un piano orizzontale anche di vetro. Il sistema si comporta come il cuneo d'aria discusso sopra.



**Figura 4.7:** Gli anelli di Newton.

Usando il secondo teorema di Euclide per i triangoli rettangoli si può scrivere

$$r^2 = h(2R - h) = 2Rh - h^2. \quad (4.22)$$

Se la calotta sferica è sufficientemente piccola si può supporre  $2Rh \gg h^2$  e quindi approssimare  $r^2 \simeq 2Rh$ . In tal caso, facendo riferimento alle formule ottenute sopra per il cuneo d'aria si trova interferenza costruttiva per

$$2h = \frac{2k-1}{2}\lambda \quad (4.23)$$

si hanno quindi circonferenze chiare di raggio

$$r = \sqrt{\frac{2k-1}{2}R\lambda} \quad (4.24)$$

e interferenza distruttiva per

$$2h = k\lambda \quad (4.25)$$

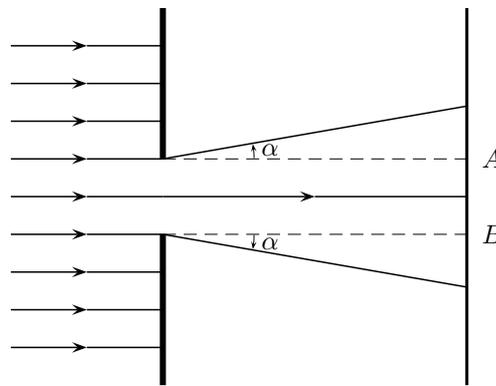
e quindi circonferenze scure di raggio

$$r = \sqrt{kR\lambda}. \quad (4.26)$$

Le circonferenze chiare e scure quindi hanno raggi che crescono come la radice quadrata dei numeri naturali, quindi non sono equidistanti ma si infittiscono all'aumentare del raggio.

## 4.2 DIFFRAZIONE.

Per continuare nell'analisi dei fenomeni luminosi che trovano la loro spiegazione solo nell'ambito del modello ondulatorio, si consideri un fascio di raggi luminosi paralleli (per esempio perché giungono da una sorgente molto lontana, come il Sole) che, dopo essere passati attraverso una fenditura larga  $h$  terminano su di uno schermo opaco.



**Figura 4.8:** Passaggio della luce attraverso la fenditura.

Se il modello corpuscolare fosse adeguato si troverebbe sullo schermo una striscia luminosa netta di fronte alla fenditura, in figura 4.8 rappresentata dalla zona compresa fra i due punti  $A$  e  $B$ . Invece attorno alla striscia luminosa la striscia luminosa è allargata oltre i punti  $A$  e  $B$  di un angolo  $\alpha$  e vi è la formazione di altre frange laterali, che sono tanto più distinte quanto più ridotte sono le dimensioni della fenditura. Questo comportamento è comprensibile solo per mezzo del modello ondulatorio e viene tradizionalmente chiamato *diffrazione*.

In effetti, utilizzando il principio di Huygens, è possibile pensare a tutti i punti sulla fenditura come sorgenti secondarie coerenti. Con questo modello in testa si cerchi di costruire una matematica adatta allo scopo. Si supponga quindi di avere  $n$  sorgenti di ugual ampiezza e frequenza e fra loro sfasate di una stessa fase  $\varphi$ . La loro sovrapposizione può essere scritta nella forma

$$A [\cos \omega t + \cos(\omega t + \varphi) + \cos(\omega t + 2\varphi) + \dots + \cos(\omega t + n\varphi)] = R \cos(\omega t + \theta). \quad (4.27)$$

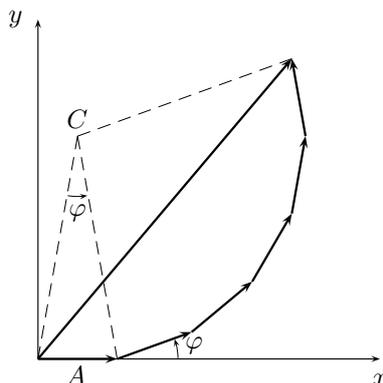
Per fare la somma conviene affidarsi al metodo del vettore rotante imparato studiando la sovrapposizione delle oscillazioni armoniche e riferirsi alla figura 4.9.

Gli  $n$  vettori rotanti sono rappresentati uno di seguito all'altro come corde di una circonferenza (in figura 4.9 è rappresentato il caso con  $n = 6$ ); detto  $C$  il centro di tale circonferenza e  $r$  il raggio, osservando il triangolo formato da due raggi e da una delle corde di lunghezza  $A$ , vale

$$A = 2r \operatorname{sen} \frac{\varphi}{2} \quad (4.28)$$

A questo punto il vettore risultante  $R$  è una corda sottesa ad un angolo al centro pari a  $n\varphi$ , quindi

$$R = 2r \operatorname{sen} \frac{n\varphi}{2} \quad (4.29)$$



**Figura 4.9:** Le sorgenti coerenti rappresentate come vettori rotanti.

Confrontando le ultime due equazioni si arriva a

$$R = A \frac{\text{sen } \frac{n\varphi}{2}}{\text{sen } \frac{\varphi}{2}} . \tag{4.30}$$

Si lascia al lettore studioso la dimostrazione che

$$\theta = (n - 1) \frac{\varphi}{2} . \tag{4.31}$$

Dalla (4.30), ricordando che l'intensità di un'onda è proporzionale al quadrato dell'ampiezza, si può scrivere l'intensità totale nella seguente forma

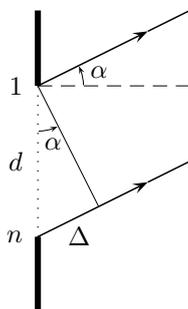
$$I = I_1 \frac{\text{sen}^2 \frac{n\varphi}{2}}{\text{sen}^2 \frac{\varphi}{2}} \tag{4.32}$$

ove  $I_1$  è l'intensità per una sola sorgente.

Se le sorgenti sono tutte in fase si ha  $\varphi = 0$  e quindi<sup>3</sup>  $I = n^2 I_1$ . Il primo minimo si ha quando

$$\text{sen } n \frac{\varphi}{2} = 0 \quad \longrightarrow \quad n \frac{\varphi}{2} = \pi \quad \longrightarrow \quad \varphi = \frac{2\pi}{n} \tag{4.33}$$

il che evidentemente corrisponde alla situazione in cui i vettori della figura 4.9 compiono un giro completo tornando all'origine e dando risultante nulla.



**Figura 4.10:** La differenza di cammini fra la prima e l'ultima sorgente.

In questa situazione la prima e l'ultima sorgente risultano sfasate di  $2\pi$  quindi le onde generate da esse hanno una differenza di cammini ottici pari a una lunghezza d'onda; ma, si veda la figura

<sup>3</sup> Il lettore studioso cerchi costruire il ragionamento che porta dalla precedente equazione a questa conclusione.

4.10, questa differenza di cammini è  $\Delta = d \operatorname{sen} \alpha$ , essendo  $\alpha$  l'angolo di allargamento del fascio. Il primo minimo lo si ha quindi per

$$\lambda = d \operatorname{sen} \alpha ; \quad (4.34)$$

in altre parole la striscia luminosa centrale si allarga di un angolo  $\alpha$  tale che

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{\lambda}{d} \quad (4.35)$$

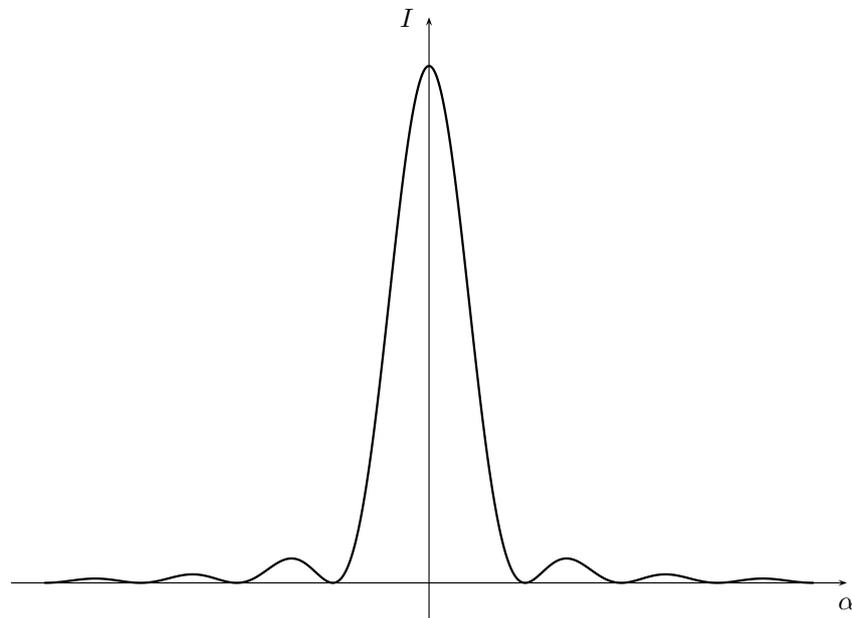
l'effetto è quindi tanto piú visibile quanto piú  $d$  è paragonabile a  $\lambda$ ; tenendo conto del fatto che per la luce visibile i valori di  $\lambda$  sono all'incirca compresi fra i 380 ed i 750 nm, si capisce che l'effetto diventa visibile solo per fenditure dell'ordine di qualche millesimo di millimetro. Il primo massimo laterale successivo a quello per  $\varphi = 0$  si ha quando i vettori compiono un giro e mezzo, in altre parole quando

$$n \frac{\varphi}{2} = \frac{3}{2} \pi \quad \longrightarrow \quad \varphi = \frac{3\pi}{n} . \quad (4.36)$$

Si osservi che sostituendo questo valore in (4.32) si può determinare l'intensità di questo primo massimo laterale

$$I = I_1 \frac{\operatorname{sen}^2 \frac{3}{2} \pi}{\operatorname{sen}^2 \frac{3\pi}{2n}} \simeq \frac{1}{\left(\frac{3\pi}{2n}\right)^2} I_1 = \frac{4n^2}{9\pi^2} \simeq \frac{n^2 I_1}{25} \quad (4.37)$$

ma, come si è visto,  $n^2 I_1$  è l'intensità del massimo centrale senza sfasamento, quindi il primo massimo laterale ha una intensità che un venticinquesimo di quello centrale che quindi è di gran lunga il piú intenso.



**Figura 4.11:** L'intensità della diffrazione in funzione dell'angolo  $\alpha$ .

In altre parole la figura di interferenza dovuta alla diffrazione ha un massimo centrale molto intenso circondato da altri massimi laterali molto piú deboli e di intensità decrescente. Un grafico della dipendenza dell'intensità dall'angolo  $\alpha$  è rappresentata, in una scala arbitraria, nella figura 4.11. Questo modello quindi spiega in maniera soddisfacente, anche quantitativamente, il fenomeno osservato.

### 4.3 POTERE RISOLVENTE DI UNALENTE.

Questa sezione e la seguente trattano argomenti un po' tecnici: sono stati inseriti per completezza e possono essere ignorati senza pregiudizio per la comprensione di quel che segue. Per questo appaiono in carattere tipografico minore.

La diffrazione pone dei limiti alla formazione di immagini distinte. In particolare, la diffrazione causata dalla luce che attraversa uno strumento ottico, per esempio una lente, fa sí che l'immagine di un punto luminoso non possa mai essere esattamente un punto; piuttosto, ad un oggetto puntiforme corrisponde un'immagine che è una figura di diffrazione le cui dimensioni sono tanto piú piccole quanto piú è grande la sezione dello strumento utilizzato. Questa figura di diffrazione, come visto sopra, consiste essenzialmente di un massimo centrale di intensità circondato da altri massimi di intensità via via minore e, qui, trascurabili. L'ampiezza angolare del massimo centrale è uguale all'angolo sotto cui sono visti i primi minimi laterali; usando la (4.34), tale ampiezza angolare è  $2\alpha$ , con

$$\text{sen } \alpha = \frac{\lambda}{d}, \quad (4.38)$$

ove  $\lambda$  è la lunghezza d'onda della luce utilizzata e  $d$  il diametro della fenditura. Se  $\alpha$  è piccolo, vale l'approssimazione  $\text{sen } \alpha \simeq \alpha$  e quindi la precedente equazione si semplifica in

$$2\alpha = \frac{2\lambda}{d}. \quad (4.39)$$

Se la fenditura è circolare, per esempio una lente, occorre modificare questa relazione introducendo il coefficiente numerico 1.22, la cui origine è troppo complessa per essere descritta in questa sede; in tal caso, quindi, l'ampiezza angolare del massimo centrale diviene

$$2\alpha = 1.22 \frac{2\lambda}{d}.$$

Nel seguito si userà l'equazione senza il coefficiente qui introdotto; sarà facile inserirlo all'occorrenza. Affinché le immagini di due punti diversi siano percepite come distinte si è soliti utilizzare il *criterio di Rayleigh*<sup>4</sup> che afferma che due massimi di intensità luminosa sono distinguibili quando sono sufficientemente distanti spazialmente da far sí che il massimo del secondo cada in corrispondenza del minimo del primo; altrimenti i due massimi si percepiscono sovrapposti e non sono distinguibili. La distanza angolare fra i due massimi deve quindi essere almeno uguale a mezza ampiezza del massimo centrale di una delle due figure di diffrazione; la distanza angolare minima rilevabile è quindi

$$\alpha_0 = \frac{\lambda}{d}. \quad (4.40)$$

Il reciproco di questo angolo

$$\frac{1}{\alpha_0} = \frac{d}{\lambda} \quad (4.41)$$

è detto **potere risolvete** della lente in questione.

Si noti che il potere risolvete dipende solo dall'apertura della fenditura e non dalla distanza focale né, quindi, dall'ingrandimento.

### 4.4 PROFONDITÀ DI CAMPO (2).

<sup>5</sup>Limitandosi all'ottica geometrica, si veda il paragrafo 3.7, la profondità di campo dell'immagine prodotta da una lente dipende solo dalle dimensioni e dalla distanza focale della lente. Inoltre la formula trovata precedentemente, equazione (3.84), dipende da un parametro arbitrario  $\varepsilon_M$  definito come il 'massimo valore tollerabile'. È chiaro che questa espressione è generica ed arbitraria.

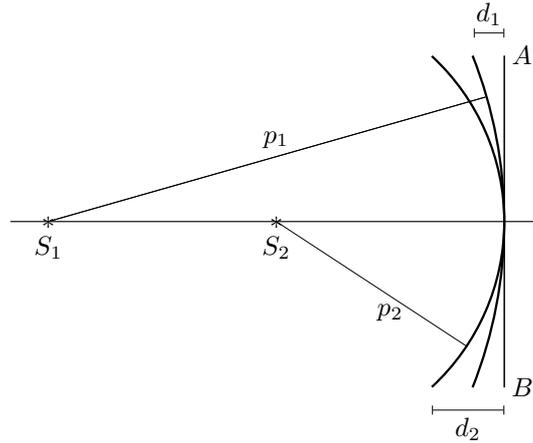
In realtà la natura ondulatoria della luce, e precisamente il fenomeno della diffrazione che ne deriva, costituisce il principio fisico che sta alla base del concetto di profondità di campo.

<sup>6</sup>Per chiarire questo punto, si considerino due sorgenti di onde luminose sferiche  $S_1$  ed  $S_2$  poste sull'asse di una lente convergente di raggio  $h$ , si veda la figura 4.12. Siano  $p_1$  e  $p_2$  le rispettive distanze delle due

<sup>4</sup> John William Strutt, Lord Rayleigh (1842-1919), fisico inglese.

<sup>5</sup> Ringrazio Fabio Maria Antoniali che ha rivolto la mia riottosa attenzione all'importanza della trattazione dell'argomento svolto in questa sezione.

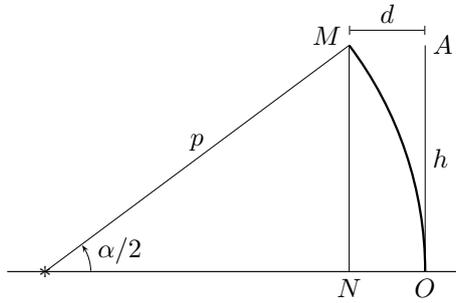
<sup>6</sup> La seguente presentazione ha un grosso debito con il testo *Le onde e la luce* di A. Bettini, Zanichelli.



**Figura 4.12:** Le due onde sferiche incidono sulla lente.

sorgenti dalla lente. La lente è supposta molto sottile rispetto alle altre dimensioni in gioco ed in figura è rappresentata mediante il segmento  $AB$ . Le due onde, quando raggiungono la lente, sono due calotte sferiche di raggi  $p_1$  e  $p_2$ . Queste sono indistinguibili, e quindi la lente le focalizza nello stesso punto, se non danno origine a interferenza distruttiva in nessun punto; poiché ciò avviene quando la differenza dei cammini ottici è pari a mezza lunghezza d’onda, si dicono indistinguibili le due onde se nel punto di massima separazione la loro distanza non supera un quarto di lunghezza d’onda. Questo criterio di indistinguibilità è noto come **criterio del quarto d’onda** ed è dovuto a Rayleigh.

Ora, il punto di massima separazione fra le due onde si ha sui bordi della lente, ove i fronti d’onda distano dalla questa rispettivamente  $d_1$  e  $d_2$ . La distanza che le separa in questa situazione è quindi  $d = d_2 - d_1$ . Per valutare  $d_1$  e  $d_2$ , si consideri un solo fronte d’onda come in figura 4.13 che si origina in  $S$  di raggio  $p$  e una lente di raggio  $h$ .



**Figura 4.13:** Il calcolo di  $d$ .

Quando il fronte d’onda raggiunge la lente in  $O$ , la sua massima distanza dalla lente è

$$d = MA = SO - SN = p - \sqrt{p^2 - h^2} = p - p \sqrt{1 - \left(\frac{h}{p}\right)^2} \simeq p - p \left(1 - \frac{1}{2} \frac{h^2}{p^2}\right) = \frac{h^2}{2p}. \quad (4.42)$$

è stata usata qui l’approssimazione  $(1 + x)^\alpha \simeq 1 + \alpha x$ . Quindi, utilizzando questo risultato il criterio del quarto d’onda richiede

$$d_2 - d_1 = \frac{h^2}{2p_2} - \frac{h^2}{2p_1} = \frac{h^2}{2} \frac{p_1 - p_2}{p_1 p_2} < \frac{\lambda}{4}; \quad (4.43)$$

Se  $p_1$  e  $p_2$  sono molto simili, il denominatore di questa equazione può essere approssimato in  $p^2$ , quindi, posto  $\Delta p = p_1 - p_2$  si trova

$$\frac{h^2}{2} \frac{\Delta p}{p^2} < \frac{\lambda}{4}. \quad (4.44)$$

Le sorgenti  $S_1$  ed  $S_2$  risultano quindi entrambe a fuoco se la loro distanza  $\Delta p$  soddisfa la relazione

$$\Delta p > \frac{p^2}{h^2} \frac{\lambda}{2}. \quad (4.45)$$

Il massimo consentito per la distanza è quindi

$$\Delta p_M = \frac{p^2}{h^2} \frac{\lambda}{2}. \quad (4.46)$$

Quindi se  $S$  che si trova a distanza  $p$  dalla lente ha un'immagine a fuoco, risultano altresì a fuoco tutti i punti le cui distanze dalla lente siano comprese fra  $p - \Delta p_M$  e  $p + \Delta p_M$ . La quantità

$$2\Delta p_M = \frac{p^2}{h^2} \lambda \quad (4.47)$$

è quindi la **profondità di campo**.

Si osservi che

$$\frac{p}{h} = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \quad (4.48)$$

ove  $\alpha$  è l'angolo sotto cui la lente è vista dalla sorgente  $S$ . La profondità di campo della lente quindi dipende dalla lunghezza d'onda della luce utilizzata e dall'angolo sotto cui è vista dalla sorgente.

Per fare un esempio numerico, si consideri una lente di raggio  $h = 0.02$  m che forma l'immagine di un oggetto posto a distanza  $p = 5$  m; usando luce con lunghezza  $\lambda = 5 \cdot 10^{-7}$  m si ottiene la profondità di campo

$$2\Delta p_M = \frac{25}{4 \cdot 10^{-4}} 5 \cdot 10^{-7} \simeq 0.031 \text{ m}. \quad (4.49)$$

Se la sorgente  $S_1$  è all'infinito la sua immagine si forma nel fuoco. La condizione per cui anche l'immagine di  $S_2$  si formi nel fuoco si ottiene, utilizzando la (4.43) per  $p_1 \rightarrow +\infty$ ,

$$\frac{h^2}{2p_2} < \frac{\lambda}{4} \quad \longrightarrow \quad p_2 > \frac{2h^2}{\lambda}; \quad (4.50)$$

quindi tutti i punti che distano dalla lente più di  $2h^2/\lambda$  hanno l'immagine sul fuoco, cioè la lente non li distingue da punti all'infinito. La  $2h^2/\lambda$  è detta **distanza iperfocale della lente**.

### Osservazioni

1. Si noti che questa trattazione della profondità di campo, diversamente da quella vista alla sezione 3.7, si può applicare non solo alle lenti ma a qualunque fenditura, anche in assenza di qualsiasi dispositivo ottico. Quindi mentre in quell'occasione si è analizzato un fenomeno di origine geometrica, qui se ne è studiato uno la cui origine sta nella natura ondulatoria e quindi *fisica* della luce.

## 4.5 RETICOLO DI DIFFRAZIONE.

La fisica e la matematica sviluppate nella sezione precedente sono adeguate per spiegare il funzionamento del dispositivo descritto di seguito costituito da un numero molto grande di fenditure vicine e parallele; tale dispositivo viene detto **reticolo**. Può essere realizzato per esempio mediante una lastra di vetro su cui siano prodotte delle sottilissime e vicinissime incisioni mediante una punta di diamante, in questo modo ciascuna parte di vetro separata da due incisioni successive costituisce una fenditura del reticolo.

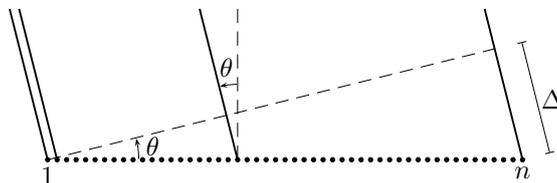


Figura 4.14: Il reticolo di diffrazione.

Si considerino quindi  $n$  sorgenti, tutte in fase e disposte su una retta a distanza  $d$  una dall'altra, di una luce di lunghezza d'onda  $\lambda$ . Lungo una direzione di propagazione formante un angolo  $\theta$  con la perpendicolare, le sorgenti emettono onde luminose i cui cammini ottici differiscono fra loro tutti per la medesima quantità  $\delta = d \operatorname{sen} \theta$  cui corrisponde una differenza di fase uguale a

$$\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} \delta = \frac{2\pi d}{\lambda} \operatorname{sen} \theta. \quad (4.51)$$

La situazione è quindi esattamente la stessa affrontata nella sezione precedente. Il massimo centrale si ha quindi quando tutti le sorgenti sono in fase, cioè quando  $\varphi = 0$  e quindi  $\theta = 0$ ; il primo minimo si ha, coerentemente con quanto trovato sopra, quando

$$\varphi = \frac{2\pi}{n} \quad \longrightarrow \quad \frac{2\pi d}{\lambda} \operatorname{sen} \theta = \frac{2\pi}{n} \quad \longrightarrow \quad nd \operatorname{sen} \theta = \lambda . \quad (4.52)$$

Questa la matematica. Si cerchi anche di capire cosa ciò significhi fisicamente. Si osservi che vale la relazione  $\Delta = nd \operatorname{sen} \theta$  ove  $\Delta$  (si veda la figura 4.14) è la differenza dei cammini ottici fra le onde emesse dalla prima e dall'ultima sorgente; quando  $\Delta$  è uguale a una lunghezza d'onda, evidentemente, la sorgente 1 emette un'onda che ha una differenza di cammino ottico pari a  $\lambda/2$  con l'onda emessa dalla  $n/2$ -esima sorgente, la sorgente 2 con la  $(n/2 + 1)$ -esima e così via; si capisce così che le prime  $n/2$  sorgenti emettono onde che interferiscono distruttivamente con le altre  $n/2$  sorgenti e questo comporta il minimo di intensità.

Il primo massimo secondario si ha, come visto sopra, quando

$$\varphi = \frac{3\pi}{n} \quad \longrightarrow \quad \frac{2\pi d}{\lambda} \operatorname{sen} \theta = \frac{3\pi}{n} \quad \longrightarrow \quad nd \operatorname{sen} \theta = \frac{3}{2}\lambda , \quad (4.53)$$

e così via segue la famiglia dei massimi e minimi secondari.

Si osservi ora però che tutto si riproduce uguale quando  $\varphi$  è uguale ad un numero intero di  $2\pi$ , infatti avere uno sfasamento di  $2m\pi$  e non avere alcuno sfasamento sono situazioni indistinguibili.

Vi sono quindi molti massimi principali di intensità corrispondenti a

$$\frac{2\pi d}{\lambda} \operatorname{sen} \theta = 2m\pi \quad \longrightarrow \quad d \operatorname{sen} \theta = m\lambda \quad (4.54)$$

attorno a ciascuno di questi massimi principali si trovano, come discusso sopra, tutta la famiglia di massimi e minimi secondari. Per esempio, il minimo successivo al massimo principale di ordine  $m$  si ha quando (si tenga presente la discussione svolta nella sezione 4.2) rispetto a tale massimo vi è un ulteriore sfasamento di  $2\pi/n$  il che corrisponde ad un  $n$ -esimo di lunghezza d'onda:  $\lambda/n$ . Pertanto il primo minimo di ordine  $m$  si ha quando

$$d \operatorname{sen} \theta = m\lambda + \frac{\lambda}{n} \quad (4.55)$$

ragionando analogamente si possono trovare tutti i massimi e minimi secondari attorno a ciascun massimo principale.

Il reticolo di diffrazione viene spesso usato per l'analisi degli spettri in lunghezza d'onda della luce; è importante quindi determinare qual è la minima differenza di lunghezza d'onda che un reticolo riesce a risolvere. Per tale risoluzione si usa il criterio di Rayleigh. È stata qui sviluppata tutta la teoria necessaria alla determinazione del **potere risolvante** di un reticolo di diffrazione che è definito come il rapporto fra la lunghezza d'onda osservata e la minima differenza di lunghezza d'onda risolvibile, cioè:

$$R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} . \quad (4.56)$$

Quindi il massimo di ordine  $m$  per una lunghezza d'onda  $\lambda'$  e per un certo angolo  $\theta$  è dato dalla relazione (4.54), la lunghezza d'onda  $\lambda$  viene percepita come distinta se il suo primo minimo attorno al massimo di ordine  $m$  si sovrappone al precedente, e quindi vale la (4.55) per lo stesso valore di  $\theta$ . Insomma devono valere

$$d \operatorname{sen} \theta = m\lambda' \quad \text{e} \quad d \operatorname{sen} \theta = m\lambda + \frac{\lambda}{n} ; \quad (4.57)$$

sottraendo queste due equazioni membro a membro, si ottiene

$$m(\lambda' - \lambda) = m\Delta\lambda = \frac{\lambda}{n} \quad (4.58)$$

e quindi

$$R = mn . \quad (4.59)$$

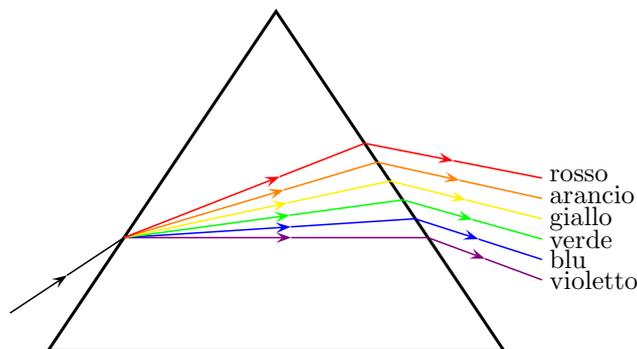
Pertanto il potere risolvante del reticolo aumenta all'aumentare del numero di sorgenti e con l'ordine dei massimi.

## 4.6 DISPERSIONE.

Un altro fenomeno per la cui descrizione è particolarmente adatto il modello ondulatorio della luce è la *dispersione* della luce solare: se un raggio di luce solare viene fatto passare attraverso un prisma, non emerge un solo raggio rifratto ma una banda di colori di cui il violetto è quello maggiormente deviato ed il rosso quello meno deviato. In effetti, per una interpretazione microscopica del fenomeno della rifrazione, occorre analizzare, cosa che va ben oltre i limiti di queste note, l'interazione fra l'onda luminosa incidente e gli elettroni presenti negli atomi del materiale, per esempio del vetro; questa interazione è infatti la responsabile della rifrazione. Quel che accade, detto in maniera puramente descrittiva, è che l'onda luminosa incidente mette in oscillazione gli elettroni presenti negli atomi del vetro; questi, legati ai loro nuclei, si comportano come oscillatori armonici di pulsazione  $\omega_0$  tipica del materiale in questione. Se la luce incidente è un'onda di pulsazione  $\omega$ , si può dimostrare che l'indice di rifrazione è dato da

$$n = 1 + \frac{k}{\omega_0^2 - \omega^2}, \quad (4.60)$$

ove  $k$  è una costante che dipende dalle proprietà fisiche del materiale attraversato dalla luce.



**Figura 4.15:** Dispersione della luce solare per mezzo di un prisma.

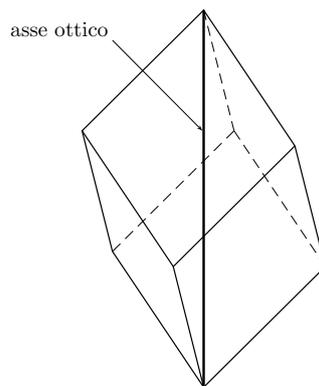
Nella luce visibile, onde di pulsazione, e quindi frequenza, diversa corrispondono a colori diversi: si passa con continuità per tutti i colori dell'arcobaleno dal rosso al violetto aumentando la frequenza della luce da circa  $4.3 \times 10^{14}$  Hz a circa  $7.5 \times 10^{14}$  Hz, mentre la frequenza diminuisce da circa 700 nm a circa 400 nm.

Quindi la dispersione della luce solare viene interpretata supponendo che essa sia composta da molte onde con tutte le frequenze corrispondenti alla luce visibile, poiché ciascuna delle onde vede il materiale con un indice di rifrazione diverso secondo la legge scritta sopra, queste vengono deviate con angoli di rifrazione diversi. In altre parole il prisma permette un'analisi delle diverse frequenze delle onde che compongono la luce solare.

La figura ottenuta mediante dispersione della luce di una sorgente, utilizzando un prisma o un reticolo, si dice **spettro** della sorgente. Come accennato sopra, lo spettro della luce solare è continuo, come anche lo spettro delle comuni lampadine a incandescenza. Le lampade a gas, per esempio a neon, presentano invece uno spettro a righe discrete. Questo accade perché gli atomi (si vedrà oltre il motivo di ciò) emettono solo certe frequenze e quindi il loro spettro è composto dalle sole righe corrispondenti alle frequenze emesse.

## 4.7 POLARIZZAZIONE.

Fino ad ora è stato supposto, alquanto implicitamente, che le onde responsabili della propagazione della luce si muovessero in un preciso, e fino ad ora imprecisato, piano di oscillazione; in aggiunta, sempre implicitamente, si è supposto che i mezzi in cui la luce si propaga siano isotropi, cioè esibiscano le medesime proprietà fisiche in tutte le direzioni. Ma le cose non stanno esattamente così.



**Figura 4.16:** Un cristallo di calcite

Il primo a rendersi conto che le cose non vanno così lisce fu Bartholin<sup>7</sup> che, nel 1669, si accorse che l'immagine di un oggetto risultava sdoppiata se osservato attraverso un minerale di calcite,  $\text{CaCO}_3$ , trasparente detto *spato d'Islanda*. In effetti analizzando bene il fenomeno si vede che un sottile fascio luminoso incide su un cristallo di spato d'Islanda ne fuoriescono due fasci rifratti: uno, detto *raggio ordinario* che segue le normali leggi della rifrazione, un secondo, detto *raggio straordinario* che non segue le normali leggi della rifrazione. Questo fenomeno è noto con il nome di **doppia rifrazione**.

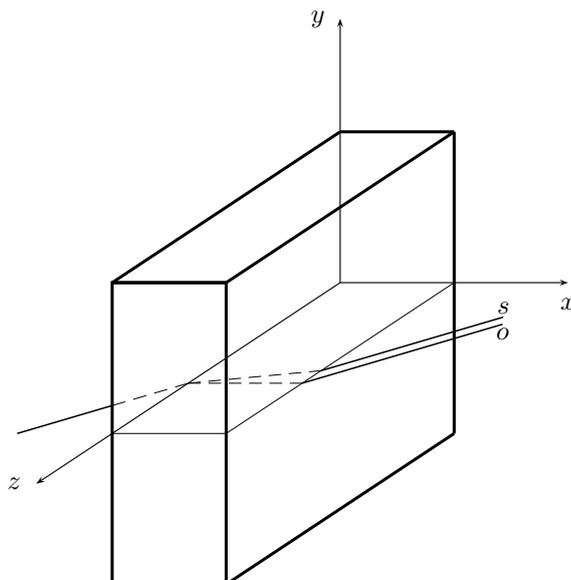
Ma il fenomeno della rifrazione dipende dalla differenza di velocità di propagazione nei diversi mezzi, quindi evidentemente, se un materiale presenta due diverse rifrazioni deve trattarsi di un materiale non isotropo in grado di mettere in risalto le caratteristiche non isotropiche dell'oscillazione delle onde luminose<sup>8</sup>.

Il primo a fare degli esperimenti a riguardo è stato Newton che, per capirci qualcosa, ha provato a far passare un raggio luminoso attraverso due cristalli di spato. Facendo passare attraverso il secondo cristallo solo il raggio ordinario osservò che non si verificava la doppia rifrazione se il secondo cristallo era orientato esattamente come il primo; facendo ruotare il secondo cristallo rispetto al primo cominciava a progressivamente comparire il raggio straordinario e a scomparire quello ordinario, finché dopo una rotazione di  $90^\circ$  il raggio ordinario era completamente scomparso. L'interpretazione oggi ritenuta corretta del fenomeno descritto è la seguente. Cristalli come lo spato d'Islanda sono fortemente anisotropi, hanno *un* asse di simmetria detto **asse ottico** e per questo motivo vengono detti cristalli *uniassici*. Tenuto conto di questo fatto si osserva che se il raggio incidente è perpendicolare all'asse ottico si verifica il fenomeno della doppia rifrazione come sopra descritto, mentre vi è la rifrazione usuale se il raggio incidente è parallelo all'asse ottico. Ma se la forma allungata delle molecole deve avere un ruolo in tutto è lecito aspettarsi che la direzione di oscillazione debba avvenire nella direzione delle molecole, cioè nella direzione parallela all'asse ottico; ma ancora l'effetto dell'anisotropia è presente solo quando la luce si propaga perpendicolarmente all'asse ottico. Questi fatti ci portano a due conseguenze:

- a. Le onde luminose sono trasversali, cioè la direzione di oscillazione è perpendicolare alla direzione di propagazione.
- b. Devono essere presenti due direzioni di oscillazione perpendicolari in modo che quando una oscilla lungo l'asse ottico e ne sente l'effetto dando origine al raggio straordinario, l'altra oscilla perpendicolarmente all'asse ottico, non ne sente l'effetto e dà origine al raggio ordinario.

<sup>7</sup> Erasmus Bartholin (1625-1698), medico danese.

<sup>8</sup> Lo spato d'Islanda è un cristallo che appartiene al sistema trigonale, classe ditrigonale scalenoedrica, forma romboedrica, avente un asse di simmetria ternario, e tre assi di simmetria binari; è costituito da sei facce rombiche, sei spigoli laterali a zig-zag uguali e sei spigoli che convergono verso l'asse ternario, tre sopra e tre sotto; gli assi binari passano per i punti di mezzo dei lati opposti a zig-zag. L'angolo fra le facce è di  $74^\circ 55'$ ; gli angoli ottusi dei rombi sono di  $101^\circ 54'$ .



**Figura 4.17:** Il raggio ordinario ed il raggio straordinario.

È evidente che se la direzione dell'onda incidente è parallelo all'asse ottico, entrambe le direzioni di oscillazione, trasversali, risultano perpendicolari all'asse ottico e quindi nessuna delle due dà origine al raggio straordinario. Si faccia riferimento alla figura 4.17 ove l'asse ottico è diretto lungo l'asse  $y$  e la direzione di propagazione si trova sul piano  $xz$ .

Si passi ora alla matematica. Il modello che rende conto dei fenomeni sopra descritti è il seguente. Si suppone che l'onda luminosa sia composta di due onde diverse oscillanti perpendicolarmente alla direzione di propagazione aventi la stessa frequenza e lunghezza ma, in generale, ampiezza e fase differenti. Sia pertanto  $x$  la direzione di propagazione e siano  $y$  e  $z$  le due direzioni di oscillazione. Quindi si hanno le seguenti due onde:

$$A_y = A_1 \cos \left( \omega t - \frac{2\pi}{\lambda} x \right) \quad , \quad A_z = A_2 \cos \left( \omega t - \frac{2\pi}{\lambda} x + \varphi \right) . \quad (4.61)$$

Si può, usando un po' trigonometria che si lascia al lettore studioso, dimostrare che vale

$$\left( \frac{A_y}{A_1} \right)^2 + \left( \frac{A_z}{A_2} \right)^2 - 2 \frac{A_y A_z}{A_1 A_2} \cos \varphi = \sin^2 \varphi , \quad (4.62)$$

che è l'equazione di un'ellisse della forma

$$\frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} - 2 \frac{yz}{ab} c = d . \quad (4.63)$$

Insomma, tutte le volte che le due componenti perpendicolari dell'onda luminosa hanno una differenza di fase costante il vettore  $\mathbf{A}$  che ha componenti  $A_y$  e  $A_z$  descrive un'ellisse; si parla allora di **polarizzazione ellittica** (si veda la figura 4.18 a).

Nel caso particolare in cui  $\sin \varphi = 0$  cioè  $\varphi = 0$  o  $\varphi = \pi$ , l'ellisse degenera in un segmento:

$$\left( \frac{A_y}{A_1} \pm \frac{A_z}{A_2} \right)^2 = 0 \quad \longrightarrow \quad A_z = \pm \frac{A_2}{A_1} A_y ; \quad (4.64)$$

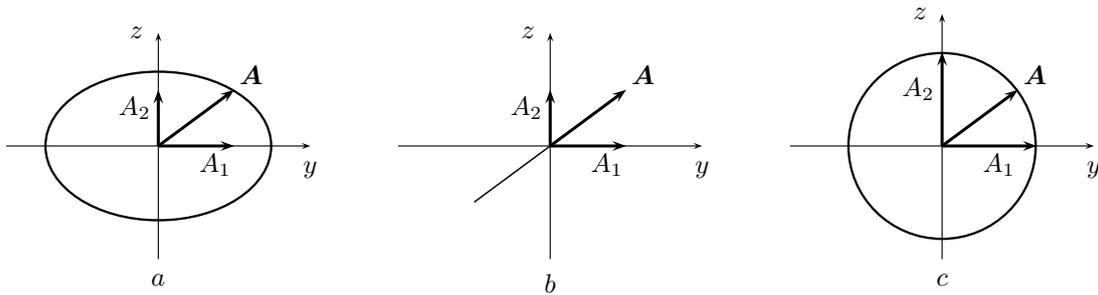
in questo caso si parla di **polarizzazione rettilinea** (si veda la figura 4.18 b).

Nel caso particolare in cui  $\varphi = \pi/2$ ,  $A_1^2 = A_2^2 \equiv A^2$ , l'ellisse diventa una circonferenza di equazione

$$A_y^2 + A_z^2 = A^2 ; \quad (4.65)$$

si parla allora di **polarizzazione circolare** (si veda la figura 4.18 c).

Un'onda luminosa propagantesi lungo l'asse  $x$ , quindi, può sempre essere pensata come una

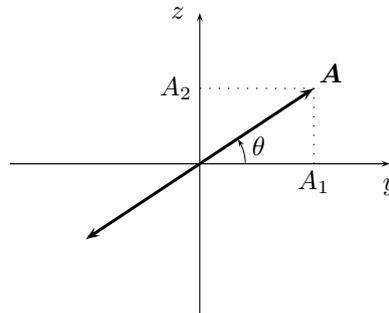


**Figura 4.18:** Le diverse polarizzazioni.

sovrapposizione di due onde: una oscillante sul piano  $xy$  ed una oscillante sul piano perpendicolare  $xz$  ciascuna delle quali, trasporta un'intensità luminosa proporzionale al quadrato della sua ampiezza; quindi nel caso della polarizzazione ellittica si ha

$$I = I_y + I_z = k(A_1^2 + A_2^2) \quad (4.66)$$

ove  $k$  è un'opportuna costante il cui valore non rileva qui alcuna importanza.



**Figura 4.19:** Polarizzazione rettilinea.

Nel caso di polarizzazione rettilinea lungo una direzione che forma un angolo  $\theta$  con l'asse ottico, che in figura 4.19 è rappresentato dall'asse  $y$ , mentre l'asse  $x$ , direzione di propagazione, è diretto verso il lettore, l'equazione (4.66) diviene

$$I = I_y + I_z = k(A_1^2 + A_2^2) = kA^2(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = kA^2 \quad (4.67)$$

Nel caso di onde polarizzate circolarmente si ha semplicemente

$$I = I_y + I_z = k(A_1^2 + A_2^2) = 2kA^2 \quad (4.68)$$

Se l'onda luminosa non è polarizzata significa che le due componenti dell'onda vibrano con una differenza di fase variabile in modo casuale, in tale caso, per simmetria, le due componenti forniscono ciascuna metà dell'intensità. Quindi

$$I_y = I_z = \frac{1}{2}I \quad (4.69)$$

Alla luce di quanto detto si può interpretare il comportamento dello spato d'Islanda nel seguente modo. Si consideri una lamina di spato con la superficie lungo il piano  $yz$  con l'asse ottico disposto lungo l'asse  $y$  e perpendicolare al piano d'incidenza. In questo caso le due componenti dell'onda incidente oscillano una perpendicolare al piano d'incidenza, e quindi parallela all'asse ottico, ed una sul piano di incidenza; il primo dei due risente dell'anisotropia del cristallo ed ha il comportamento anomalo. Si possono quindi riassumere come segue le caratteristiche dei due raggi rifratti.

- hanno la direzione di propagazione contenuta nel piano d'incidenza;
- sono polarizzati uno nel piano d'incidenza e uno in un piano diverso passante per la direzione di propagazione e l'asse ottico, i due piani di polarizzazione sono quindi perpendicolari;
- si propagano nel cristallo con velocità diversa e quindi vedono il cristallo con due indici di rifrazione diversi  $n_o$  ed  $n_s$ . Quindi i due raggi si propagano in direzioni diverse dentro la lamina per poi proseguire paralleli quando ne fuoriescono.
- se l'onda incidente non è polarizzata, l'intensità dei due raggi rifratti è uguale ed è, per ciascuno la metà dell'intensità dell'onda incidente.

Se l'onda incidente si propaga parallelamente all'asse ottico, cioè lungo l'asse  $y$ , non vi è doppia rifrazione, infatti le due componenti sono entrambe perpendicolari all'asse ottico e quindi non presentano comportamenti differenti.

### Osservazioni

1. Esistono cristalli che hanno due assi privilegiati e vengono detti **biassici**; il loro comportamento è molto complesso e non viene trattato qui.
2. Non è stato specificato quale sia il meccanismo fisico per cui la componente dell'onda polarizzata nella direzione dell'asse ottico abbia un comportamento anomalo; si tratta di una interazione elettromagnetica fra l'onda e le particelle elettricamente cariche che costituiscono le molecole del cristallo di cui non verrà detta neanche una parola.
3. Alcuni cristalli uniassici, come la *tormalina*, hanno la proprietà di assorbire in modo diverso le due onde polarizzate che si propagano dentro di essi; tale fenomeno è detto **dicroismo**. Se si dispone di uno spessore sufficiente, pochi centimetri, una delle due componenti viene completamente assorbita e l'unico raggio che esce dal cristallo risulta polarizzato linearmente.

Con riferimento all'ultima osservazione si consideri cosa accade quando si faccia passare un raggio luminoso attraverso due cristalli dicroici consecutivi. Si noti preliminarmente che questo procedimento è perfettamente analogo a quello utilizzato da Newton e descritto all'inizio. Si consideri un'onda luminosa monocromatica non polarizzata che si propaga nella direzione  $x$  e che incide su di un cristallo dicroico; si supponga inoltre che questo assorba completamente il raggio ordinario ed emetta solo il raggio straordinario polarizzato linearmente lungo l'asse ottico, che qui si suppone parallelo all'asse  $y$ . Sia  $I_0$  l'intensità e  $A$  l'ampiezza dell'onda così ottenuta; vale quindi

$$I_0 = kA^2 . \quad (4.70)$$

Si supponga ora che quest'onda si propaghi fino ad un secondo cristallo il cui asse ottico formi un angolo  $\theta$  con l'asse ottico del cristallo precedente (si veda la figura 4.20).

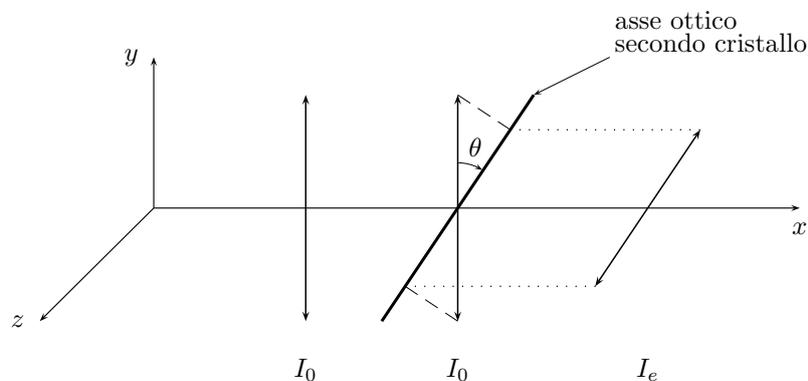


Figura 4.20: La legge di Malus.

L'onda che penetra nel secondo cristallo ha una componente  $A_s = A \cos \theta$  lungo l'asse ottico (il raggio straordinario) ed una componente  $A_o = A \sin \theta$  perpendicolare all'asse ottico (il raggio ordinario); il secondo cristallo assorbe completamente la componente  $A_o$  e trasmette solamente la componente  $A_s$ . Quindi l'intensità  $I_e$  dell'onda emessa dal secondo cristallo è data da

$$I_e = kA_s^2 = kA^2 \cos^2 \theta , \quad (4.71)$$

quindi vale

$$\boxed{I_e = I_0 \cos^2 \theta .} \quad (4.72)$$

Questa equazione è detta **legge di Malus**.<sup>9</sup>

Se i due assi ottici sono paralleli, cioè se  $\theta = 0$ , l'intensità dell'onda emessa coincide con quella dell'onda incidente. Tale intensità diminuisce progressivamente all'aumentare dell'angolo fino ad annullarsi per  $\theta = 90^\circ$ . Quanto qui descritto è in perfetto accordo con gli esperimenti di Newton.

---

<sup>9</sup> Étienne-Louis Malus (1775-1812), fisico francese.

# 5

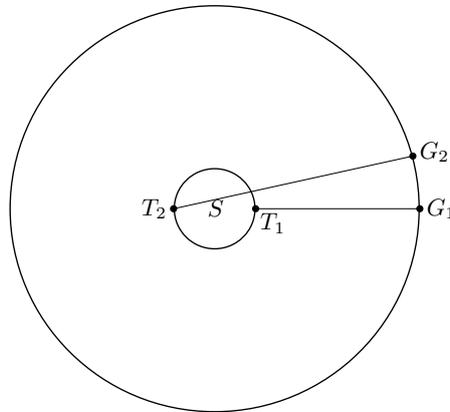
## VELOCITÀ DELLA LUCE.

---

Che si sappia il primo a porsi il problema della determinazione della velocità della luce, e se questa fosse finita od infinita, fu Galilei<sup>1</sup> il quale nella sua ultima opera scientifica (*Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze*, giornata prima) illustra il suo esperimento. Questo consistette nel disporre di due osservatori dotati ciascuno di una lanterna il cui lume possa facilmente coperto e scoperto; disposti i due sperimentatori ad una distanza sufficiente (“due o tre miglia”), di notte, uno dei due scopre il proprio lume e nell’istante in cui il secondo ne vede la luce scopre a sua volta il proprio lume; il primo, misurato il tempo che separa la sua scoperchiatura dal ricevimento del segnale dell’amico, può, supponendo nota la distanza che li separa, determinare la velocità del segnale luminoso. Non è dato sapere se Galilei abbia veramente realizzato l’esperimento che descrive con tanta precisione. Certamente non può aver trovato il risultato che cercava. Esperimenti successivi hanno mostrato che la luce si muove sí con velocità finita, ma troppo elevata per poter essere rilevata con un metodo così poco preciso.

### 5.1 MISURE ASTRONOMICHE.

Dal punto vista osservativo, le cose hanno cominciato a cambiare da quando Galilei ha guardato le stelle con il suo telescopio. E anche per la determinazione della velocità della luce hanno cominciato ad apparire delle osservazioni decisive.



**Figura 5.1:** Il ragionamento di Rømer.

#### LE OSSERVAZIONI DI RØMER.

Il primo ad avere dei risultati positivi fu Rømer<sup>2</sup> il quale osservando i satelliti di Giove (che proprio Galilei aveva visto per primo ed annunciato nel *Sidereus Nuncius*) si accorse che i loro periodi di rivoluzione attorno a Giove cambiavano nel corso dell’anno. Non potendo che credere che il periodo potesse variare, Rømer ipotizzò che la differenza dipendesse dal diverso percorso della luce nei diversi periodi dell’anno. Rømer osservò con il telescopio la sparizione di un satellite di Giove dietro il pianeta. Si supponga che, quando Giove e la Terra sono in congiunzione nelle posizioni  $G_1$  e  $T_1$  di figura 5.1, sulla Terra tale sparizione sia vista con un ritardo di un tempo  $t_1$ , cioè sia  $t_1$  il tempo impiegato dalla luce a percorrere la distanza  $G_1T_1$ . Dopo un tempo  $\tau$ , il periodo di rivoluzione del satellite attorno a Giove, esso scompare nuovamente; questa seconda

<sup>1</sup> Galileo Galilei (1564-1642), scienziato italiano.

<sup>2</sup> Ole Rømer (1644-1710), astronomo danese.

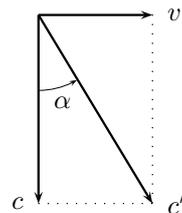
scomparsa è vista sulla Terra  $t_1 + \tau$  secondi dopo la prima. Dopo circa sei mesi, quando la Terra e Giove sono in opposizione, in  $G_2$  e  $T_2$ , ragionando analogamente si trova un periodo di rivoluzione pari a  $t_2 + \tau$ , se  $t_2$  è il tempo impiegato dalla luce a percorrere la distanza  $G_2T_2$ . La differenza di tali periodi è  $t_2 - t_1$  ed è il tempo impiegato dalla luce a percorrere un diametro dell'orbita terrestre allora noto con buona approssimazione. Con i dati di Rømer, Huygens calcolò per la velocità della luce il valore di circa  $214\,000 \text{ km s}^{-1}$ .

### L'ABERRAZIONE STELLARE.

Un'altra importante osservazione venne fatta nel 1725 da Bradley<sup>3</sup> che osservando la stella  $\gamma$  *draconis*, che si trovava allora allo zenit del suo punto di osservazione, vide che essa si muoveva lungo un'orbita circolare con un diametro angolare che sottendeva un angolo

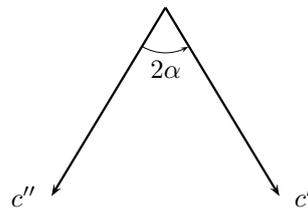
$$2\alpha = 40.5'' = 0.196 \times 10^{-4} \text{ rad} , \quad (5.1)$$

e il periodo di un anno. Quindi, osservando altre stelle che non si trovavano allo zenit, ne osservò un comportamento simile anche se su orbite ellittiche. Dopo qualche tempo di sconcerto, trovò una spiegazione del fenomeno. Esso è dovuto al moto della Terra e al fatto che la velocità della luce non è infinita. Si noti che la velocità della luce misurata dalla Terra va composta con la velocità della sorgente della luce, cioè della stella. In effetti, rispetto ad un sistema di riferimento sulla Terra la velocità  $c'$  della luce è data dalla somma della velocità  $c$  della luce rispetto alla stella che l'ha emessa e della velocità  $v$  della stella rispetto all'osservatore sulla Terra.



**Figura 5.2:** La composizione delle velocità.

Quindi la luce proveniente dalla stella, invece che apparire allo zenit, appare spostata di un angolo  $\alpha$  tale che  $\tan \alpha = v/c$ . Assumendo, ragionevolmente, la stella fissa, il suo moto apparente è dovuto al moto di rivoluzione della Terra attorno al Sole (ecco il perché del periodo di un anno). Rifacendo le misure sei mesi dopo la velocità apparente della stella ha cambiato verso e quindi la deviazione appare secondo un angolo opposto.



**Figura 5.3:** L'angolo misurato da Bradley.

La somma di questi due angoli è l'ampiezza angolare (5.1) misurata da Bradley. A quel tempo era già ben nota la velocità del moto di rivoluzione della Terra attorno al Sole  $v = 3 \times 10^4 \text{ m s}^{-1}$ ; Bradley ottenne così per il valore della velocità della luce il valore:

$$c = \frac{v}{\tan \alpha} = 305\,577 \text{ km s}^{-1} . \quad (5.2)$$

<sup>3</sup> James Bradley (1693-1762), astronomo inglese.

## 5.2 MISURE TERRESTRI.

Per le prime determinazioni non astronomiche della velocità della luce è necessario attendere fino alla metà dell'Ottocento ed i lavori di Fizeau e Foucault<sup>4</sup>.

### IL METODO DI FIZEAU.

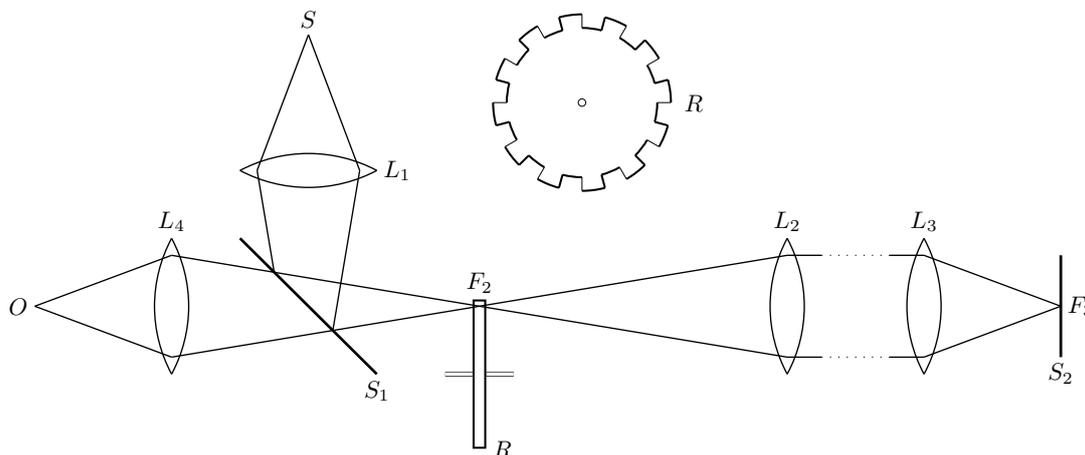


Figura 5.4: L'apparato sperimentale di Fizeau.

Nel 1849 Fizeau ha utilizzato il seguente dispositivo. La luce emergente da una sorgente luminosa  $S$  viene fatta convergere tramite la lente  $L_1$  verso lo specchio semiriflettente  $S_1$  e quindi nel fuoco  $F_2$  della lente  $L_2$ . Da questa lente emerge un fascio di raggi paralleli, questi, dopo un percorso adeguatamente lungo, vengono fatti convergere tramite la lente  $L_3$  sul suo fuoco  $F_3$  che si trova sullo specchio  $S_2$ . Il fascio quindi ritorna indietro, attraversa lo specchio semiriflettente e, tramite la lente  $L_4$  viene visto dall'osservatore in  $O$ . Sul fuoco  $F_2$  di  $L_2$  è stata posta la ruota dentata  $R$  in grado di girare attorno al proprio asse ad una frequenza controllata. Per chiarezza, in figura  $R$  è rappresentata sia di profilo che frontalmente. Se la ruota  $R$  è ferma su un foro l'osservatore  $O$  vede la luce e altrettanto se la velocità di rotazione non è troppo elevata poiché la luce riesce ad andare fino a  $F_3$ , tornare e ripassare dallo stesso foro. Aumentando la velocità di rotazione di  $R$  capita che la luce che passa da un foro trova al ritorno il dente successivo; crescendo ancora con la velocità di rotazione si rivede ancora la luce che sarà ora passata dal foro successivo. Si supponga che la ruota abbia  $n$  denti ( $n = 12$  in figura 5.4) e che ruoti con una frequenza di  $\nu$  giri al secondo quando la luce, dopo essere scomparsa ricompare allora, se  $\tau$  è il tempo impiegato dalla luce a percorrere il cammino  $F_2F_3F_2$ , cioè due volte la distanza  $d$  fra i fuochi  $F_2$  ed  $F_3$ , nel tempo  $\tau$  la ruota percorre  $1/n$  di giro e ci mette un tempo  $T/n$ ; si può così scrivere

$$\frac{1}{n\nu} = \frac{1}{n\nu} = \tau = \frac{2d}{c}; \quad (5.3)$$

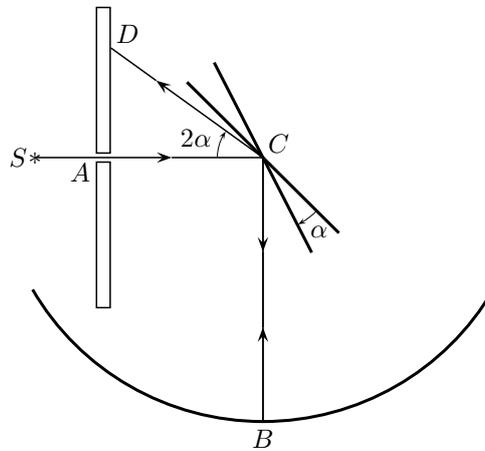
questa relazione, noti che siano  $\nu$ ,  $n$  e  $d$ , consente di misurare la velocità  $c$  della luce in aria. Con questo metodo Fizeau ottenne la velocità  $c = 313\,300 \text{ km s}^{-1}$ .

### IL METODO DI FOUCAULT.

La principale fonte di errore del metodo di Fizeau, stava nel fatto che la sparizione e la ricomparsa della luce al variare della frequenza della ruota dentata non sono eventi esattamente definiti, non sono pertanto quantità misurabili. A questo inconveniente rimediò Foucault che nel 1854 eseguì il seguente esperimento. La luce uscente dalla sorgente  $S$  viene fatta passare per la fenditura  $A$ ; il fascio collimato così ottenuto raggiunge  $C$  asse di rotazione di uno specchio piano e centro

<sup>4</sup> Armand Hippolyte Louis Fizeau (1819-1896), fisico francese. Léon Jean Bernard Foucault (1819-1868), fisico francese.

di uno specchio concavo sferico, di cui in figura ho rappresentato solo una porzione. Il raggio riflesso in  $C$  percorre il raggio  $CB$  e viene riflesso perpendicolarmente in  $B$  torna verso  $C$  e qui viene nuovamente riflesso.



**Figura 5.5:** L'apparato sperimentale di Foucault.

Nel tempo in cui la luce ha percorso due volte il raggio dello specchio sferico, lo specchio piano è ruotato di un angolo  $\alpha$ , quindi riflette un raggio ruotato di un angolo  $2\alpha$  rispetto al raggio inizialmente incidente ed arriva in  $D$  dove viene rilevato. Se ora lo specchio ruota con una frequenza  $\nu$ , l'angolo di cui è ruotato lo specchio nel tempo  $t$  in cui la luce percorre due volte la distanza  $r$  che separa  $C$  e  $B$ , è dato da

$$\alpha = 2\pi\nu t, \quad (5.4)$$

ma, indicando con  $c$  la velocità della luce che si vuole misurare, vale

$$t = \frac{2r}{c} \quad (5.5)$$

e quindi

$$c = \frac{4\pi\nu r}{\alpha}. \quad (5.6)$$

L'apparato usato da Foucault aveva le seguenti caratteristiche:  $\nu = 800$  Hz,  $r = 20$  m, e la misura della deviazione  $2\alpha$  ha dato il valore

$$2\alpha = \arctan \frac{AD}{AC} = 0.00135 \text{ rad}. \quad (5.7)$$

Con questi dati, come si può facilmente verificare, si ottiene per la velocità della luce in aria il valore

$$c = 2.98 \times 10^5 \text{ km s}^{-1}. \quad (5.8)$$

Nel 1926 Michelson<sup>5</sup>, con raffinamenti tecnici dello stesso apparato sperimentale usato da Foucault, ottenne il valore

$$c = 299\,796(4) \text{ km s}^{-1} \quad (5.9)$$

Il valore oggi accettato è un valore convenzionalmente dato come esatto ed è utilizzato per definire il metro. Esso vale, come già riportato nell'equazione (3.1):

$$c = 299\,792\,458 \text{ m s}^{-1}. \quad (5.10)$$

<sup>5</sup> Albert Abraham Michelson (1852-1931), fisico statunitense.

### 5.3 VELOCITÀ RISPETTO A COSA? IL PROBLEMA DELL'ETERE.

Si affronta ora il problema di stabilire rispetto a cosa la luce ha la velocità  $c$  sopra determinata. Analogamente a come le onde su una corda si muovono, *rispetto alla corda*, con un velocità definita il cui valore dipende solo dalle caratteristiche fisiche della corda stessa, così è parso naturale supporre che esistesse un mezzo rispetto al quale la velocità della luce fosse  $c$ . A tale mezzo fu dato il nome di **etere**. Questa sostanza si trovava ad avere proprietà alquanto peculiari, come una incredibile elasticità in grado di permettere in esso la vibrazione di onde elettromagnetiche con frequenze variabili da poche unità a miliardi di hertz; inoltre, poiché la luce si propaga in tutto l'universo, l'etere deve trovarsi ovunque, riempiendo ogni angolo remoto dell'universo. Nel 1881 Michelson si propose di misurare la composizione fra la velocità della luce rispetto all'etere e la velocità di un osservatore che si muova rispetto all'etere. D'altra parte, l'etere pervade tutto lo spazio dell'universo, quindi la Terra si muove attraverso di esso. Deve quindi essere possibile rilevare tale composizione di velocità fra la luce e la Terra rispetto all'etere. Michelson preparò il seguente dispositivo sperimentale.

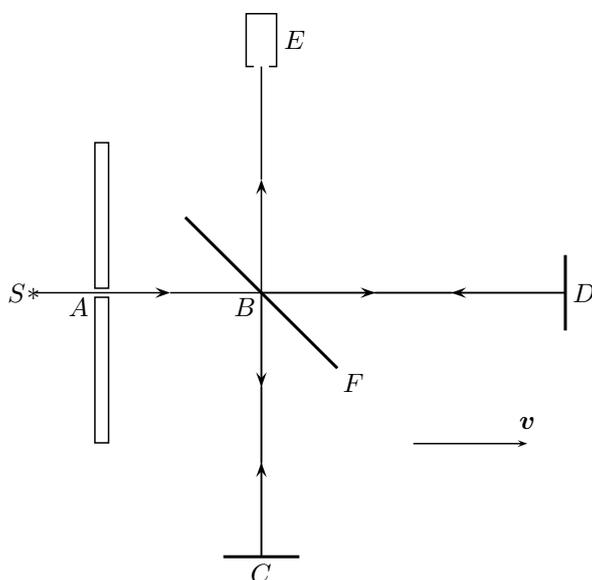


Figura 5.6: L'apparato sperimentale di Michelson.

La luce uscita da una sorgente viene fatta passare attraverso la fenditura  $A$  ottenendo un fascio collimato; questo incide in  $B$  su di uno specchio semiriflettente  $S$  e qui si divide in due parti. Una parte viene riflessa e giunge in  $C$  su uno specchio che la rimanda verso  $B$ , qui viene in parte trasmessa e giunge al rivelatore  $E$ . L'altra parte da  $B$  viene trasmessa verso  $D$  ove viene riflessa nuovamente verso  $B$  qui viene parzialmente riflessa verso il rivelatore  $E$ . I due raggi luminosi coerenti giungono in  $E$  e qui interferiscono dando origine a una figura a frange chiara e scure. Si osservi che la figura di interferenza prodotta dipende dal moto dell'apparato sperimentale rispetto all'etere. Si supponga infatti che, come indicato in figura 5.6, l'intero apparato sperimentale si muova con velocità  $v$  rispetto all'etere (ad esempio perché l'asse  $ABD$  è stato orientato secondo il moto della Terra attorno al Sole). Allora il tempo impiegato dalla luce a percorrere  $BDB$  si può calcolare nel modo seguente: il tempo per andare da  $B$  a  $D$  è

$$t_1 = \frac{\ell}{c - v} \quad (5.11)$$

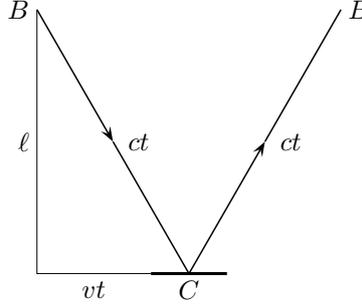
(qui si suppone per semplicità, ma l'ipotesi non è affatto necessaria, che siano  $BC = BD = \ell$ ); nel tornare il tempo impiegato è minore, visto che il punto  $B$  viene incontro alla luce con velocità  $v$ ; così  $DB$  viene percorso nel tempo

$$t_2 = \frac{\ell}{c + v} . \quad (5.12)$$

Quindi il tempo totale per il percorso  $BDB$  è

$$t_1 + t_2 = 2\ell \frac{c}{c^2 - v^2}. \quad (5.13)$$

Per calcolare il tempo impiegato dall'altro fascio sul percorso  $BCB$  conviene mettersi nel sistema di riferimento dell'etere, rispetto al quale ciò che accade è rappresentato in figura.



**Figura 5.7:** Il percorso del secondo raggio nel sistema di riferimento dell'etere.

Il percorso  $BC$  è  $ct = \sqrt{\ell^2 + v^2 t^2}$  da cui, con semplice algebra, si trova

$$t = \frac{\ell}{\sqrt{c^2 - v^2}}. \quad (5.14)$$

Il tempo totale per il percorso  $BCB$  è quindi

$$2t = \frac{2\ell}{\sqrt{c^2 - v^2}}. \quad (5.15)$$

la differenza dei tempi di percorrenza dei due fasci è quindi

$$\Delta t = 2\ell \left( \frac{c}{c^2 - v^2} - \frac{1}{\sqrt{c^2 - v^2}} \right) = \frac{2\ell}{c} \left( \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}} - \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right); \quad (5.16)$$

per  $c \gg v$  l'espressione ammette la seguente approssimazione

$$\Delta t \simeq \frac{2\ell}{c} \left[ 1 + \frac{v^2}{c^2} - \left( 1 + \frac{v^2}{2c^2} \right) \right] = \frac{\ell v^2}{c^3}. \quad (5.17)$$

Si è quindi trovato che il ritardo relativo dei due fasci e quindi la figura d'interferenza che producono, dipendono dalla velocità  $v$  della Terra rispetto all'etere.

Ruotando l'apparato sperimentale di  $90^\circ$  in modo che sia l'altro braccio  $BCE$  ad essere allineato con la direzione del moto della Terra, si trova una differenza di segno opposto e quindi fra i due casi si misura un ritardo relativo doppio; ora se la rotazione dell'apparato sperimentale producesse un ritardo relativo di un periodo  $T$  si avrebbe fra i due fasci una differenza di cammini ottici di una lunghezza d'onda e quindi lo spostamento di una frangia nella figura di interferenza; quindi per ogni ritardo di un periodo vi è lo spostamento di una frangia. Si può così concludere che un ritardo relativo pari a  $\Delta t$  produce uno spostamento di  $n$  frange con  $n$  dato da

$$n = \frac{\Delta t}{T} = \frac{2\ell}{cT} \frac{v^2}{c^2} = \frac{2\ell v^2}{Tc^3} = \frac{2\ell}{\lambda} \frac{v^2}{c^2}, \quad (5.18)$$

se  $\lambda$  è la lunghezza della luce utilizzata. Nell'esperimento del 1881 Michelson aveva a disposizione un apparato con le seguenti caratteristiche  $\ell = 1.2$  m,  $\lambda = 590$  nm; sapendo che la velocità della Terra rispetto al Sole (e quindi rispetto all'etere) è circa  $v = 29\,806$   $\text{ms}^{-1}$  e prendendo per  $c$  il valore (5.10), si trova uno spostamento di 0.04 frange, valore che era entro la sensibilità dello

strumento di Michelson. Nessuno spostamento fu però rilevato. Nel 1887 Michelson ripeté l'esperimento insieme a Morley<sup>6</sup> migliorando ulteriormente la sensibilità dell'apparato. Ma ancora non riuscirono a rilevare alcuno spostamento. In altre parole non è rilevabile alcun moto della Terra rispetto ad un etere fermo<sup>7</sup>. D'altra parte l'etere deve esistere, dal momento che le vibrazioni elettromagnetiche devono essere vibrazioni di un qualche mezzo. La prima risposta che fu tentata è che la Terra, nel suo moto in giro per il cosmo, trascina dietro di sé l'etere. Questo però, si è subito capito, è impossibile a causa del sopra discusso esperimento di Bradley: non si avrebbe infatti aberrazione in quanto le onde luminose si propagherebbero ora in un mezzo fermo rispetto alla Terra. Il risultato di Michelson e Morley rimase quindi incompreso in termini della fisica del loro tempo. Ai nostri occhi postumi appare uno degli indizi della crisi che la fisica ha attraversato alla fine del XIX secolo.

### Osservazioni

1. Il fatto che non sia stato possibile rilevare il moto della Terra rispetto all'etere, a ben guardare, è tutt'altro che sorprendente. In effetti l'etere gioca qui il ruolo di un sistema di riferimento assoluto; con questo si intende riferirsi ad un sistema assolutamente in quiete rispetto al quale sia possibile definire il moto assoluto della propagazione luminosa. Quello che hanno cercato Michelson e Morley era quindi il moto assoluto della Terra. Non è sorprendente che non l'abbiano trovato.

---

<sup>6</sup> Edward Williams Morley (1838-1923), fisico statunitense.

<sup>7</sup> Nelle parole di Michelson: *“la conseguenza di un etere stazionario risulta contraddetta dai fatti e se ne deve necessariamente concludere che l'ipotesi è falsa.”*

Parte III

ELETTROMAGNETISMO

# 6

## PRELIMINARI MATEMATICI.

---

In questo capitolo preliminare vengono forniti gli strumenti matematici necessari alla descrizione della teoria dell'elettromagnetismo.

### 6.1 IL CONCETTO DI CAMPO.

Come prima cosa si introduce il concetto di **campo**. Si definisce *campo scalare* una funzione che associa ad ogni punto dello spazio fisico un numero reale (uno scalare). Un campo scalare è quindi una funzione:

$$f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} , \quad (6.1)$$

dove il dominio  $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^3$  è l'insieme delle terne di numeri reali che, rispetto ad un sistema di assi cartesiani, rappresenta l'insieme dei punti dello spazio e il codominio  $\mathbb{R}$  è il numero reale che rappresenta il campo scalare. Per esempio è possibile definire un campo di temperatura associando ad ogni punto di uno spazio la temperatura dell'aria in quel punto; quindi la funzione  $T(\mathbf{r})$  risulta definita nel modo seguente:

$$T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, \quad T(\mathbf{r}) = T(x, y, z) , \quad (6.2)$$

ove  $\mathbf{r}$  è il vettore posizione di componenti  $(x, y, z)$ . Si definisce *campo vettoriale* una funzione che associa ad ogni punto dello spazio fisico un vettore. Si tratta quindi di una funzione:

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 , \quad (6.3)$$

dove ad ogni punto dell'insieme  $\mathbb{R}^3$ , cioè ad ogni punto dello spazio fisico, viene associata la terna delle componenti di un vettore. Per esempio è possibile definire il campo di velocità della corrente di un fiume, associando ad ogni punto interno alla corrente il vettore velocità della goccia d'acqua che passa per quel punto; si ha così la funzione  $\mathbf{v}(\mathbf{r})$  definita nel modo seguente:

$$\mathbf{v} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \mathbf{v}(\mathbf{r}) = (v_x(\mathbf{r}), v_y(\mathbf{r}), v_z(\mathbf{r})) . \quad (6.4)$$

Il concetto di campo è particolarmente utile, come si vedrà nei prossimi capitoli, per costruire un modello dell'azione a distanza. In effetti esistono in natura forze che non esercitano la loro azione a contatto con i corpi ma a distanza. Lasciando qui, doverosamente, inesplorata la questione non scientifica circa quale sia l'origine di tali forze a distanza, si cerca di darne una descrizione. Si consideri l'esempio dell'interazione gravitazionale. È ben noto che ogni corpo dotato di massa attira ogni altro corpo dotato di massa con una forza che dipende dall'inverso del quadrato della distanza, secondo la legge di Newton. Lo stesso Newton, com'è noto rinunciò a fornire una spiegazione dell'azione a distanza (*hypoteses non fingo*). Il modello che viene utilizzato è di immaginare che la presenza di una massa in un punto dello spazio modifica ogni altro punto dello spazio. Per farsi un'immagine pittorica dell'idea si pensi ad una superficie elastica orizzontale su cui venga deposto un massiccio corpo sferico, come in figura 6.1. Il corpo deforma la superficie elastica producendo un avvallamento. Una seconda sferetta che si trovi ad una data distanza dal corpo massiccio si trova quindi su di un piano inclinato e si muove verso il corpo massiccio. Si osservi che più la sferetta si trova vicina al corpo maggiore è la pendenza su cui si trova e maggiore è la velocità con cui si muove verso il corpo. Ora la sferetta si muove sotto l'azione della forza peso. Ma si supponga che l'esistenza di tale forza sia sconosciuta. Si osserva allora che la presenza del corpo massiccio modifica lo spazio tutto intorno e questa modificazione è tale da avere un'azione sui corpi che si trovino in tale spazio circostante.

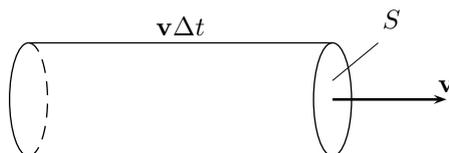


**Figura 6.1:** Modello ideale del campo gravitazionale.

Quindi, a causa della presenza di un corpo in un dato punto dello spazio (per esempio l'origine di un sistema di assi coordinati), si può associare ad ogni altro punto  $P$  dello spazio circostante una grandezza in grado di agire come forza sui corpi che si dovessero trovare in  $P$ . Questa grandezza, definita per ogni punto  $P$  dello spazio, è il campo.

### 6.2 FLUSSO DI UN CAMPO VETTORIALE.

Conviene, per introdurre il concetto piuttosto astratto di flusso, partire da un esempio. Si consideri a tale scopo un liquido ideale, e quindi incomprimibile (cioè di densità  $\rho$  costante), scorrente all'interno di un tubo. Si supponga di conoscere, in ogni punto, in campo di velocità del liquido e si cerchi di determinare quanto liquido scorre attraverso una data sezione, di area  $S$ , del tubo, nell'unità di tempo. Si consideri (figura 6.2), per cominciare, il caso più semplice in cui la sezione  $S$  sia in ogni punto perpendicolare alla velocità del liquido e che il modulo  $v$  della velocità del liquido sia costante in ogni punto di  $S$ .

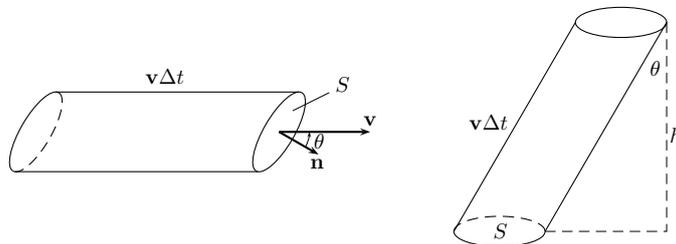


**Figura 6.2:** Flusso di un liquido attraverso una superficie perpendicolare alla velocità.

È facile rendersi conto del fatto che le particelle d'acqua che attraversano  $S$  nell'intervallo di tempo  $\Delta t$  sono quelle che si trovano nel cilindro retto di base  $S$  e altezza  $v\Delta t$ . Il volume di tale cilindro è  $\Delta V = vS\Delta t$ . Quindi il volume di liquido che attraversa la superficie  $S$  nel tempo  $\Delta t$  è  $\Delta V = Sv\Delta t$ . Quindi la massa  $\Delta m$  di liquido che attraversa  $S$  nell'unità di tempo è<sup>1</sup>:

$$\frac{\Delta m}{\Delta t} = \rho v S . \tag{6.5}$$

Si definisce allora flusso del campo vettoriale  $\mathbf{v}$  attraverso la superficie  $S$  la quantità  $vS$ . Le cose possono essere un po' più complicate. Sia ora la superficie  $S$  non perpendicolare alla



**Figura 6.3:** Flusso di un liquido attraverso una superficie non perpendicolare alla velocità.

velocità; allora il volume  $\Delta V$  di liquido che fluisce attraverso la superficie  $S$  nell'intervallo di tempo  $\Delta t$  è quello contenuto nel cilindro non retto in figura 6.3. Tale volume, com'è noto dalla geometria elementare, è pari all'area di base  $S$  per l'altezza  $h$ . Tale altezza  $h$  è la componente perpendicolare alla superficie  $S$  della generatrice  $v\Delta t$  del cilindro, cioè, indicando con  $\theta$  l'angolo

<sup>1</sup> Si noti che se la velocità varia nel tempo la seguente equazione diviene la derivata temporale di  $m$ .

formato da tale generatrice e l'altezza  $h$ , vale  $h = v\Delta t \cos \theta$ . Detto  $\mathbf{n}$  il vettore di modulo unitario perpendicolare alla superficie, vale  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = \cos \theta$ , quindi si può scrivere

$$h = \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \Delta t, \quad (6.6)$$

quindi la massa di liquido che attraversa  $S$  nel tempo  $\Delta t$  è

$$\Delta m = \rho S \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \Delta t. \quad (6.7)$$

Il flusso pertanto, ponendo  $\mathbf{S} = S\mathbf{n}$ , diviene

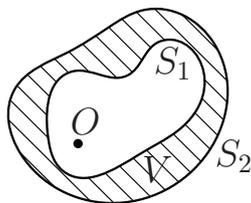
$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{S}. \quad (6.8)$$

Ancora piú complicato. Sia ora la superficie grande abbastanza da far sí che il modulo della velocità non possa essere considerato costante in ogni suo punto. Mi aspetto che fluisca una maggiore massa di fluido dove la velocità è maggiore. In queste condizioni conviene suddividere la superficie  $S$  in  $N$  porzioni sufficientemente piccole che in esse la velocità sia costante; tali porzioni verranno indicate con il simbolo  $\Delta S_i$  e i rispettivi vettori unitari perpendicolari con  $\mathbf{n}_i$  ( $i = 1 \cdots N$ ). Si può cosí calcolare per ogni porzione il flusso di  $\mathbf{v}$  usando l'equazione (6.8) e facendo poi la somma di tutti i singoli contributi. Pertanto il flusso del campo vettoriale  $\mathbf{v}$  attraverso la superficie generica  $S$ , posto ancora  $\Delta S_i = S_i \mathbf{n}_i$ , è definito dall'equazione seguente:

$$\sum_{i=1}^N \Delta S_i \cdot \mathbf{v}_i. \quad (6.9)$$

### Osservazioni

1. Data una sorgente  $O$  di liquido, il flusso che attraversa una qualunque superficie *chiusa* che racchiuda tale sorgente non dipende dalla superficie scelta, purché non siano presenti pozzi per i quali ci possa essere una perdita di liquido. Infatti prese due qualunque superfici  $S_1$  ed  $S_2$  che racchiudano la sorgente (si veda la figura 6.4), essendo il liquido incompressibile, il volume  $V$  da esse racchiuso contiene sempre la stessa massa di liquido; quindi la massa di liquido che, nel tempo  $\Delta t$ , entra in  $V$  attraverso  $S_1$  deve essere uguale al volume d'acqua che, nello stesso tempo, esce da  $V$  attraverso  $S_2$ : i due flussi sono quindi uguali.



**Figura 6.4:** Indipendenza del flusso dalla superficie scelta.

Non sarà forse inutile osservare che la superficie  $S$  attraverso la quale ho definito il flusso *non* è una superficie reale, materiale, ma una superficie matematica.

Sulla scorta dell'esempio ora visto, si può generalizzare il concetto di flusso per qualsiasi campo vettoriale. Si consideri ora il campo vettoriale  $\mathbf{A}$  e una qualsiasi superficie  $S$ ; si definisce **flusso** di  $\mathbf{A}$  attraverso la superficie  $S$  la quantità

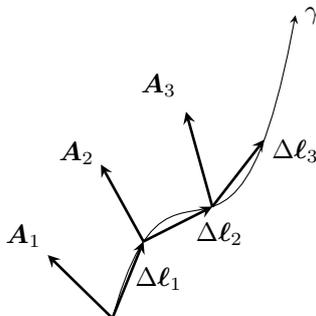
$$\Phi_S(\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^N \Delta S_i \cdot \mathbf{A}_i, \quad (6.10)$$

ove sono stati utilizzati gli stessi simboli visti sopra per il caso del flusso di un liquido. Prima di andare oltre, si osservi che nel caso particolare in cui il campo  $\mathbf{A}$  sia in ogni punto perpendicolare a  $S$  e sia ivi uniforme assumendo il valore costante  $A$ , la precedente equazione assume la forma particolarmente semplice

$$\Phi_S(\mathbf{A}) = AS. \quad (6.11)$$

### 6.3 CIRCUITAZIONE DI UN CAMPO VETTORIALE.

Si consideri, in una zona ove sia definito un campo vettoriale  $\mathbf{A}$ , una arbitraria curva orientata  $\gamma$ . Si suddivida  $\gamma$  in tante piccole porzioni orientate, sufficientemente piccole da far sí che siano ben approssimate da vettori spostamento  $\Delta\ell$ . Si consideri uno di questi vettori spostamento; esso è applicato in un punto di  $\gamma$ ; in questo punto, come in ogni altro punto dello spazio che si sta qui considerando, è definito il campo vettoriale  $\mathbf{A}$ .



**Figura 6.5:** Circuitazione del campo vettoriale  $\mathbf{A}$  lungo la curva  $\gamma$ .

Si può quindi eseguire il prodotto scalare fra i vettori  $\Delta\ell$  e  $\mathbf{A}$  applicati nello stesso punto. Si ripete la stessa operazione per tutti i vettori spostamento in cui è stata suddivisa la curva  $\gamma$  (in figura 6.5 sono riportati i primi tre vettori). Infine si sommano tutti i contributi. In questo modo si ottiene una quantità che è detta **circuitazione** del campo vettoriale  $\mathbf{A}$  lungo la curva  $\gamma$  e si indica con il simbolo:

$$\Gamma_{\gamma}(\mathbf{A}) = \sum \mathbf{A} \cdot \Delta\ell . \quad (6.12)$$

Si osservi che, nel caso particolare in cui il campo vettoriale è in ogni punto tangente alla curva  $\gamma$  ed assume in tutti i punti lo stesso valore  $A$ , la precedente relazione si può scrivere nella semplice forma

$$\Gamma_{\gamma}(\mathbf{A}) = A\ell , \quad (6.13)$$

indicando con  $\ell$  la lunghezza totale della curva.

#### Osservazioni

1. Come detto sopra per il flusso, anche qui è opportuno far notare che la curva  $\gamma$  utilizzata per definire la circuitazione di  $\mathbf{A}$  non è reale o materiale, ma un astratto oggetto matematico.
2. È possibile dimostrare, benché la dimostrazione sia fuori dai limiti di queste note, che un campo vettoriale è univocamente definito in tutti i punti dello spazio quando se ne conosca il flusso per ogni superficie chiusa e la circuitazione per ogni curva chiusa.

#### 6.3.1 IL LAVORO DI UNA FORZA.

Si consideri un corpo che, sotto l'azione del campo di forza  $\mathbf{F}$ , percorre la curva  $\gamma$ . Si vuole calcolare il lavoro compiuto dalla forza  $\mathbf{F}$  supponendo di trovarsi nel caso generale in cui la forza  $\mathbf{F}$  non è costante durante il moto del corpo ma può assumere in ogni punto un valore ed una direzione diversi. Allora è necessario suddividere il percorso  $\gamma$  in  $N$  spostamenti elementari che indico con il simbolo  $\Delta\ell_i$ , con  $i = 1, \dots, N$ ; questa suddivisione sia tale che gli spostamenti elementari siano abbastanza piccoli da far sí che durante ciascuno di loro la forza si possa assumere costante. In tal caso il lavoro fatto per ciascuno degli spostamenti è il prodotto scalare fra il vettore forza  $\mathbf{F}_i$  assunto costante e il corrispondente vettore spostamento  $\Delta\ell_i$ . Il lavoro fatto

percorrendo tutta la traiettoria  $\gamma$  è quindi la somma di tutti i lavori relativi ai singoli spostamenti elementari  $\Delta\ell_i$ ; vale cioè:

$$\mathcal{L} = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i \cdot \Delta\ell_i . \quad (6.14)$$

Il secondo membro dell'equazione ora scritta non è altro che la circuitazione del vettore  $\mathbf{F}$  lungo la curva  $\gamma$ . Quindi si è dimostrato in modo completamente generale che il lavoro di una forza lungo una traiettoria  $\gamma$  è uguale alla circuitazione di tale forza lungo  $\gamma$ , cioè vale:

$$\mathcal{L} = \Gamma_\gamma(\mathbf{F}) . \quad (6.15)$$

Nel caso di una forza conservativa il lavoro non dipende dal percorso ma solo dalle posizioni iniziali e finali assunte dal corpo in movimento, e tale lavoro è uguale al valore assunto dalla funzione energia potenziale nel punto iniziale meno il valore assunto nel punto finale. Nel caso particolare di una traiettoria chiusa, il punto iniziale e finale sono lo stesso punto, quindi la variazione di energia potenziale è nulla, quindi il lavoro compiuto da una forza conservativa per una traiettoria chiusa è nullo, quindi la circuitazione di una forza conservativa lungo una qualunque curva chiusa è zero. È possibile anche dimostrare la proposizione inversa. Vale quindi il seguente teorema.

*Una forza è conservativa se e solo se la sua circuitazione lungo qualunque curva chiusa è nulla*

### 6.3.2 CIRCUITAZIONE DI UN CAMPO DI VELOCITÀ LUNGO UN VORTICE.

Per fornire un'immagine visiva di che cosa sia la circuitazione, si mostra qui che, per un liquido che scorre, una circuitazione diversa da zero indica la presenza di vortici. Un vortice è una zona del fluido in cui tutte le particelle percorrono traiettorie circolari concentriche ciascuna con una velocità in modulo costante. Quindi il campo di velocità lungo una di queste circonferenze ha direzione tangente per modulo una costante. Per il calcolo della circuitazione del campo di velocità lungo la circonferenza di raggio  $r$  lungo la quale la velocità ha modulo  $v$ , si noti che si tratta proprio nel caso semplice per il quale la circuitazione può venire calcolata per mezzo della semplice formula (6.13). Quindi la circuitazione del campo  $\mathbf{v}$  in questo caso è uguale alla lunghezza della traiettoria per il modulo del vettore; trovo quindi:

$$\Gamma(\mathbf{v}) = 2\pi r v . \quad (6.16)$$

Questo porta a riconoscere che la condizione per la quale un liquido scorre senza formare vortici, e si dice che il suo moto è *irrotazionale*, se la circuitazione del suo campo di velocità lungo qualunque curva chiusa è nulla.

# 7

## ELETTROSTATICA.

---

Era già noto agli antichi che due corpi d'ambra se strofinati con un panno di lana acquistano la proprietà di respingersi l'un l'altro. La scoperta viene tradizionalmente attribuita a Talete<sup>1</sup>. Questa proprietà viene mantenuta per un certo tempo (anche dell'ordine di qualche ora) dopo lo sfregamento e viene perduta gradualmente.

Non è noto che qualcuno si sia interessato a questi fenomeni fino al '600, quindi circa duemila anni dopo Talete. In questo periodo infatti ricominciarono i primi esperimenti con l'ambra. Gilbert<sup>2</sup> per primo cercò di interpretare il comportamento dell'ambra in termini di un fluido, che egli chiamò *elettricità*, dal nome greco dell'ambra >'hlektron; von Guericke<sup>3</sup> vide che lo zolfo aveva un comportamento simile all'ambra e riuscì a mostrare che la proprietà attrattiva poteva propagarsi lungo fili metallici.

Il successivo passo avanti venne compiuto da Gray e da Dufay<sup>4 5</sup>. Il primo scoprì che certi corpi hanno la capacità di condurre l'elettricità meglio di altri pervenendo quindi alla distinzione fra *conduttori* ed *isolanti*. Fra i conduttori trovò i corpi metallici, il corpo umano, il suolo e qualunque corpo umido; fra gli isolanti trovò la resina, il vetro, la porcellana ed il legno e l'aria, se ben secchi. Il secondo chiarì il fenomeno osservato da Guericke affermando che ogni corpo può essere elettrificato per strofinio e l'elettricità può essere comunicata per contatto ad ogni corpo purché questo sia isolato. Dai suoi esperimenti apparve anche chiara la distinzione fra due tipi di elettricità. Osservò infatti che corpi di ambra, se elettrizzati per strofinio si respingono, ma attraggono i corpi di vetro, e similmente i corpi di vetro si respingono fra loro ma attraggono quelli di ambra. Osservò inoltre che tutti i corpi da lui sperimentati cadeva nell'una o nell'altra categoria. Quindi chiamò elettricità *resinosa* quella propria dell'ambra, ed elettricità *vetrosa* quella propria del vetro.

Un altro contributo importante è quello di Franklin<sup>6</sup> che fece molti esperimenti, in particolare sull'elettricità atmosferica, ed arrivò ad enunciare la teoria dell'unico fluido. Suppose che i corpi non elettrizzati possedessero una quantità naturale di fluido elettrico e che i due tipi di elettricità individuati da Dufay corrispondessero ad abbondanza o a mancanza di questo fluido. In particolare, Franklin suppose che l'elettricità vetrosa fosse abbondanza di fluido elettrico e l'elettricità resinosa fosse una mancanza di fluido elettrico; quindi chiamò *positiva* l'elettricità vetrosa e *negativa* l'elettricità resinosa. In questo ambito concettuale si può dire che due corpi carichi di elettricità dello stesso segno si respingono, mentre corpi carichi con elettricità di segno opposto si attraggono.

### 7.1 LA CARICA ELETTRICA.

Il modello che viene adottato in queste note si basa sulla acquisita conoscenza del modello atomico: tutti i corpi sono costituiti da atomi, i quali sono costituiti da un nucleo centrale positivo e da elettroni orbitanti intorno al nucleo carichi negativamente. In condizioni normali ogni atomo è neutro poiché le cariche elettriche nucleari positive eguagliano le cariche elettroniche negative. Accade però che in alcuni corpi gli elettroni possono venire rimossi dai loro atomi con un lavoro relativamente piccolo<sup>7</sup>. Quindi strofinando fra loro due corpi può accadere che uno dei due sottragga elettroni all'altro; in questo modo uno dei due corpi si carica negativamente e l'altro

<sup>1</sup> Talete (624-545 a. C.), matematico e filosofo di Mileto.

<sup>2</sup> William Gilbert (1540-1603), scienziato inglese.

<sup>3</sup> Otto von Guericke (1602-1686), scienziato tedesco.

<sup>4</sup> Stephen Gray (1666-1736), scienziato inglese.

<sup>5</sup> Charles-François de Cisternay Dufay (1698-1739), scienziato francese.

<sup>6</sup> Benjamin Franklin (1706-1790), scienziato statunitense.

<sup>7</sup> Dell'ordine di qualche decina di elettronvolt.

corpo si carica positivamente. Quindi la carica elettrica, nel modello che qui si sta usando, passa da un corpo ad un altro, ma non viene né creata né distrutta. Si può enunciare quindi il seguente postulato fondamentale, noto come **principio di conservazione della carica elettrica**.

*Nel corso di qualsiasi fenomeno fisico, la carica elettrica totale di un sistema isolato resta costante.*

Inoltre, la carica elettrica di un corpo è sempre un multiplo della carica dell'elettrone, nel senso che un corpo carico è sempre un corpo a cui sia stato tolto o ceduto un certo numero di elettroni. La carica elettrica quindi non fluisce in modo continuo, come nei modelli settecenteschi visti sopra, ma in un modo che si può definire granulare. La carica elettrica di un corpo dunque è sempre un multiplo intero, positivo o negativo, della carica elettrica dell'elettrone<sup>8</sup>:

$$e = 1.602\,176\,634 \times 10^{-19} \text{ C} . \quad (7.1)$$

L'unità di misura della carica elettrica, il cui simbolo è C, è detta coulomb<sup>9</sup> e verrà definita con precisione più avanti in termini della corrente elettrica.

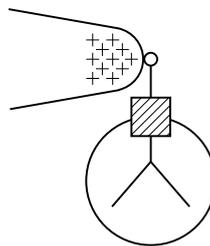
Il modello atomico riesce anche a dare una giustificazione del fatto che i corpi metallici conducano l'elettricità. In effetti all'interno di un metallo ogni atomo perde un numero di elettroni pari alla valenza e gli ioni che ne risultano vanno ad occupare ben definite posizioni nella struttura cristallina; gli elettroni perduti dagli atomi si distribuiscono uniformemente su tutto il metallo, condivisi da tutti gli ioni presenti. Questi elettroni sono responsabili della forza che tiene uniti gli atomi. Questo meccanismo di legame atomico è noto nella letteratura chimica con il nome di *legame metallico*. Questi elettroni inoltre, non essendo più legati ai singoli atomi sono liberi di muoversi per tutto il metallo garantendo così la conduzione elettrica; per questo sono detti *elettroni di conduzione*. Per giustificare la conduzione nei corpi umidi è necessario un modello diverso che verrà introdotto più avanti.

### Osservazioni

1. È opportuno insistere qui sul fatto che la carica elettrica non possa comparire con valori minori di  $e$ ; il che è lo stesso che postulare che l'elettrone sia una particella indivisibile.
2. Spesso si riassumono le caratteristiche della carica elettrica qui esaminate dicendo che la carica elettrica si conserva ed è quantizzata.<sup>10</sup>

#### 7.1.1 L'ELETTROSCOPIO.

Si discute qui un dispositivo in grado di rilevare se un corpo sia carico.



**Figura 7.1:** L'elettroscopio a foglie d'oro.

Si tratta di una scatola di vetro ove si trovano due foglioline metalliche sottilissime e leggerissime, solitamente d'oro, collegate tramite un'asticella metallica che attraversa un tappo isolante per

<sup>8</sup> Questo valore è preso da M. Tanabashi et al. (Particle Data Group) in *Physical Review D* **98**, 030001 (2018), il valore è considerato esatto.

<sup>9</sup> Charles-Augustin de Coulomb (1736-1806), fisico francese.

<sup>10</sup> Nessun esperimento di fisica delle particelle elementari ha mai messo in luce, finora, una violazione della conservazione e della quantizzazione della carica elettrica in particelle libere. Fanno eccezione certe particelle, finora sempre osservate legate a due o a tre, dette *quark*, di cui qui non è il caso di dire altro.

terminare all'esterno in una sferetta.

Se un corpo carico viene messo a contatto con la sferetta, parte della carica elettrica si distribuisce sulle foglioline che, ricevendo una carica elettrica dello stesso segno, si respingono e quindi si vedono divergere, come rappresentato in figura 7.1 (qui e nelle figure seguenti le parti isolanti sono rappresentate dal tratteggio). A questo punto è ragionevole assumere che le foglioline divergano tanto più quanto maggiore è la carica elettrica del corpo entrato in contatto con la sferetta.

### 7.1.2 ELETTRIZZAZIONE PER CONTATTO.

L'esperimento sopra descritto suggerisce che i corpi si possano elettrizzare per contatto.

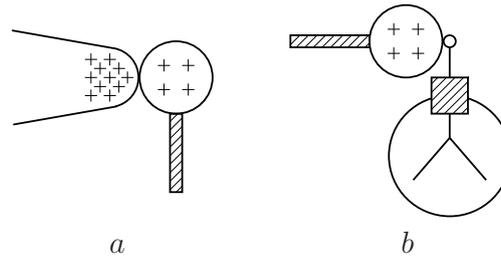


Figura 7.2: Elettrizzazione per contatto.

Per esplorare ulteriormente questo fatto si consideri un corpo di vetro elettrizzato per strofinio e lo si ponga a contatto con un secondo corpo conduttore metallico (figura 7.2a); successivamente si metta il conduttore a contatto della sferetta di un elettroscopio (figura 7.2b): le foglioline si separano. Per interpretare questo esperimento si suppone che al contatto fra il vetro ed il corpo conduttore il vetro attragga parte degli elettroni del conduttore, riducendo la propria carica elettrica positiva e lasciando il conduttore carico positivamente.

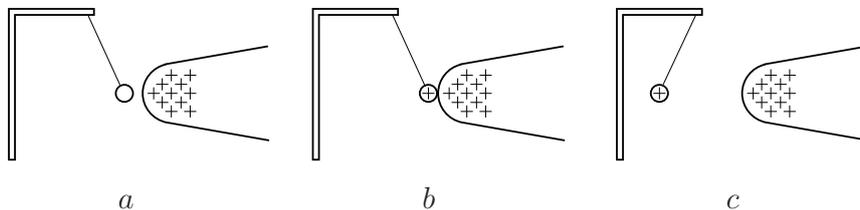


Figura 7.3: Esperimento con la sferetta metallica.

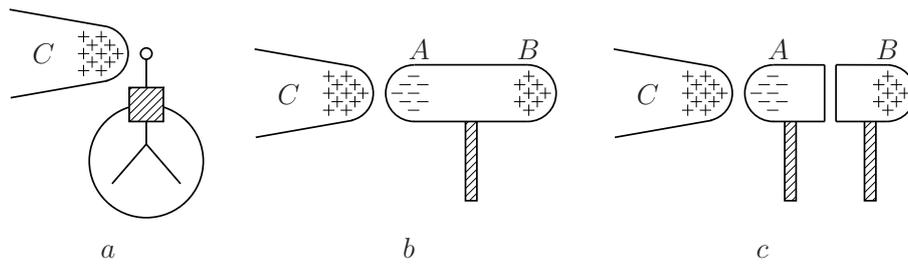
Si consideri anche il seguente esperimento; una pallina metallica è appesa ad un filo isolante; ad essa viene avvicinato (figura 7.3a) un corpo di vetro che sia stato elettrizzato per strofinio; prima che il corpo di vetro entri in contatto con la pallina questa ne è attratta (figura 7.3b), ma appena vi è contatto (figura 7.3c) la pallina viene immediatamente respinta. Anche qui il vetro sottrae elettroni alla sferetta, la lascia carica positivamente e quindi, essendo ora i due corpi elettrizzati con cariche elettriche dello stesso segno, la respinge.

Questi esperimenti portano a concludere che la carica elettrica passa da un corpo carico ad un altro quando questi siano messi a contatto; quindi, oltreché per strofinio è possibile elettrizzare un corpo **per contatto** con un altro corpo carico.

### 7.1.3 ELETTRIZZAZIONE PER INDUZIONE.

Nell'ultimo esperimento visto resta da capire perché mai la sferetta fosse attratta dal vetro *prima* del contatto. Per capirlo si consideri la situazione in cui un corpo  $C$  carico, per esempio positivamente, sia avvicinato alla sferetta di un elettroscopio senza però toccarla. Evidentemente non ci può essere elettrizzazione per delle foglioline per contatto.

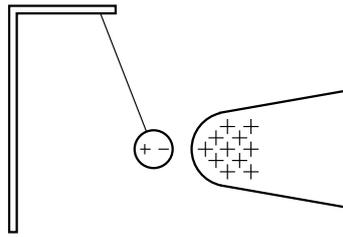
Tuttavia si vede (figura 7.4a) che queste si allontanano tanto maggiormente quanto più il corpo



**Figura 7.4:** Induzione elettrostatica.

carico viene avvicinato e tornano a riposo nella posizione verticale non appena il corpo carico venga allontanato. Per interpretare questo fatto, si consideri anche quest'altra situazione sperimentale. Avvicinando un corpo  $C$  ad un corpo conduttore neutro (figura 7.4b) si rileva la presenza di carica elettrica opposta in  $A$  e carica elettrica dello stesso in  $B$ .

Il modello atomico qui adottato permette la seguente interpretazione dei fatti descritti: la presenza del corpo  $C$  carico positivamente attira verso di sé gli elettroni di conduzione lasciando carichi positivi gli atomi più lontani. Questa interpretazione riceve conferma da un ulteriore esperimento. Si avvicini ora  $C$  ad un conduttore costituito da due corpi separabili (figura 7.4c). Mentre  $C$  è vicino esercitando la sua azione di attrazione i due corpi vengono separati: il corpo  $A$  risulta carico negativamente, mentre il corpo  $B$  positivamente. Questa modalità di elettrizzare un corpo conduttore senza metterlo in contatto con altri corpi carichi, ma solo inducendo la separazione delle sue cariche elettriche, è detto **elettrizzazione per induzione**.

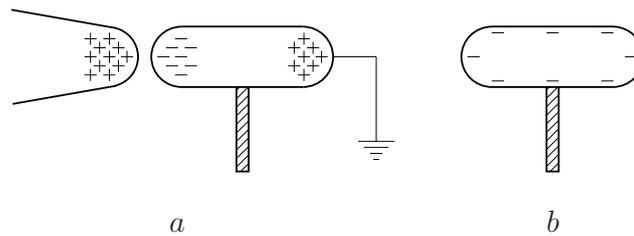


**Figura 7.5:** Induzione elettrostatica sulla sferetta conduttrice.

In questo modo, si capisce anche perché la sferetta metallica sopra discussa venisse attratta dal corpo di vetro prima di elettrizzarsi per contatto; la sferetta in quella condizione ha subito una induzione elettrostatica e quindi una separazione di cariche elettriche: le cariche elettriche negative si sono venute a trovare dalla parte del vetro dando luogo all'attrazione fra cariche elettriche di segno opposto (figura 7.5).

### Osservazioni

1. Si riassumono qui le modalità di elettrizzazione finora viste.
  - a) Elettrizzazione per strofinio: qualunque corpo se strofinato si elettrizza cedendo o acquistando elettroni.
  - b) Elettrizzazione per contatto: ogni corpo messo a contatto con un corpo carico rimane elettrizzato con cariche elettriche dello stesso segno.
  - c) Elettrizzazione per induzione: in ogni corpo conduttore avvicinato ad un corpo carico positivo (negativo) gli elettroni di conduzione si spostano per avvicinarsi al (allontanarsi dal) corpo inducente, generando una separazione di cariche elettriche. Le cariche elettriche positive o quelle negative così separate potranno essere rimosse (per esempio con un collegamento a terra) lasciando il corpo carico.
2. Pare opportuno sottolineare qui che l'elettrizzazione per induzione è possibile solo per corpi conduttori, mentre le elettrizzazioni per strofinio e per contatto sono possibili qualsiasi sia



**Figura 7.6:** Elettrizzazione per induzione.

il corpo: se il corpo è isolante la carica elettrica prodotta rimane localizzata nella zona dove è avvenuto lo strofinio o il contatto, se è conduttore si diffonde su tutto il corpo. In particolare se il corpo conduttore non viene mantenuto isolato dai corpi circostanti la carica elettrica si suddivide fra tutti i corpi a contatto e, in particolare, se il conduttore è a contatto con il suolo, per esempio attraverso il corpo dello sperimentatore, tutta la carica elettrica va dispersa a terra (figura 7.6).

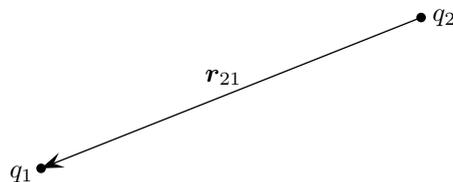
3. L'induzione elettrostatica viene detta **completa** se la carica elettrica indotta è in valore assoluto uguale alla carica elettrica inducente.

## 7.2 LA FORZA DI COULOMB.

Avendo stabilito che corpi elettrizzati con cariche elettriche dello stesso segno si respingono e corpi elettrizzati con cariche elettriche di segno opposto si attraggono, resta da capire che tipo di forza sia quella che agisce. Evidentemente si tratta di una forza a distanza. Si osserva che quanto più due corpi carichi fanno divergere le foglioline di un elettroscopio, tanto maggiore è la forza con cui interagiscono; quindi la forza aumenta all'aumentare delle cariche elettriche dei corpi in questione. Si osserva inoltre che diminuisce all'aumentare della distanza fra i corpi. Accurate misure portano alla seguente espressione, detta **legge di Coulomb**, per la forza di interazione fra due corpi elettrizzati con cariche elettriche  $q_1$  e  $q_2$ , che si trovino nel vuoto a distanza  $r_{12}$ :

$$\mathbf{F}_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q_1 q_2 \frac{\mathbf{r}_{21}}{r_{21}^3} = -\mathbf{F}_2, \quad (7.2)$$

ove  $\mathbf{F}_1$  è la forza agente su  $q_1$  ed  $\mathbf{F}_2$  è la forza agente su  $q_2$ ;  $\mathbf{r}_{21}$  è il vettore orientato da  $q_2$  a  $q_1$ . Con questa definizione le forze sono repulsive se le cariche elettriche sono di segno concorde ed attrattive se sono di segno discorde.



**Figura 7.7:** Il vettore  $\mathbf{r}_{21}$ .

I moduli di queste forze, uguali in virtù della terza legge di Newton, si possono scrivere nella forma

$$F_1 = F_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \quad (7.3)$$

Il modulo della forza di interazione delle cariche elettriche è quindi direttamente proporzionale al valore delle cariche elettriche dei due corpi ed inversamente proporzionale al quadrato della loro

distanza. Misurando la forza in newton, le cariche elettriche in coulomb e la distanza in metri, la costante di proporzionalità  $\frac{1}{4\pi\epsilon_0}$  vale

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 8.987\,551\,793 \times 10^9 \text{ N m}^2 \text{ C}^{-2} \simeq 9 \times 10^9 \text{ N m}^2 \text{ C}^{-2} \simeq 10^{10} \text{ N m}^2 \text{ C}^{-2} . \quad (7.4)$$

La costante  $\epsilon_0 = 8.854\,187\,812\,8(13) \times 10^{-12} \text{ C}^2 \text{ N}^{-1} \text{ m}^{-2}$  è detta **costante dielettrica del vuoto** e sul suo significato fisico si tornerà oltre. Il fattore  $4\pi$  è stato introdotto per futura comodità.

### Osservazioni

1. Le legge di Coulomb ora enunciata vale nella forma (7.2) solo se le dimensioni delle cariche elettriche sono trascurabili rispetto alla loro distanza: si parla allora di cariche elettriche *puntiformi* o anche *elementari*. In caso contrario non è ben definito il concetto di distanza fra corpi estesi. In ciò che segue, salvo diverso avviso, si supporrà sempre che i corpi in questione siano sufficientemente piccoli da poter utilizzare il modello di carica elettrica elementare e quindi utilizzare la legge di Coulomb nella forma data. In quel che segue le cariche elettriche elementari saranno sempre indicate con la lettera  $q$  minuscola.

#### 7.2.1 PRINCIPIO DI SOVRAPPOSIZIONE.

Se sono presenti più cariche elettriche la forza risultante agente sulla carica elettrica  $q_1$  è uguale alla somma vettoriale delle forze dovute alle singole cariche elettriche come se fossero le sole presenti. Ad esempio, la forza risultante agente sulla carica elettrica  $q_1$  dovuta alle cariche elettriche  $q_2 \dots q_N$  è data da

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_2 + \dots + \mathbf{F}_N = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=2}^N q_i \frac{\mathbf{r}_{i1}}{r_{i1}^3} . \quad (7.5)$$

Questa proprietà della forza di Coulomb, è nota come *principio di sovrapposizione*, e, com'è ben noto, è caratteristico di tutte le quantità vettoriali.

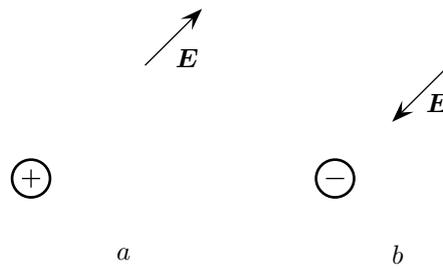
### 7.3 IL CAMPO ELETTRICO.

Con riferimento a quanto detto nel capitolo introduttivo a queste note circa l'utilità del concetto di campo nella descrizione delle interazioni a distanza, conviene introdurre qui il campo elettrico in un generico punto  $P$  dello spazio fisico. Si consideri quindi una carica elettrica positiva  $q$  che si trovi in  $P$  e sia  $\mathbf{F}$  la forza elettrica agente su  $q$ . Definisco **campo elettrico** in  $P$  il vettore  $\mathbf{E}$  definito da

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{F}}{q} . \quad (7.6)$$

La carica elettrica  $q$  si suole designare con il nome di *carica di prova*. Si osservi che i vettori  $\mathbf{E}$  ed  $\mathbf{F}$  sono proporzionali e quindi hanno la stessa direzione e, visto che la carica elettrica  $q$  è positiva, lo stesso verso (si veda la figura 7.8).

Inoltre, poiché il modulo di  $\mathbf{F}$  è direttamente proporzionale alla carica di prova  $q$ , equazione (7.5), il modulo di  $\mathbf{E}$  è indipendente dal valore di  $q$ . Quindi il campo elettrico non dipende dalla carica di prova scelta per definirlo, ma solamente dal punto in cui è stata collocata. È quindi possibile associare ad ogni punto dello spazio fisico un vettore  $\mathbf{E}$ . Si osservi che con la definizione data il vettore campo elettrico generato da una carica elettrica elementare è diretto in verso opposto ad essa se è positiva ed è diretto verso di essa se è negativa.



**Figura 7.8:** Campo generato da una carica elettrica elementare;  $a$ : positiva;  $b$ : negativa.

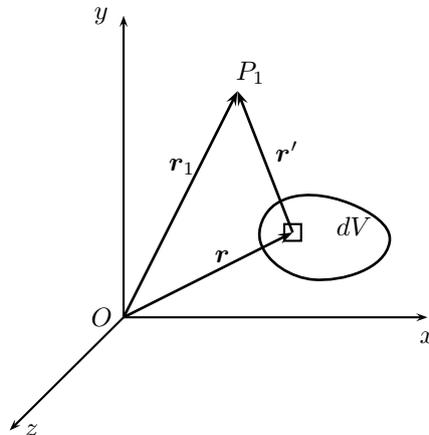
### 7.3.1 CAMPO ELETTRICO GENERATO DA UNA CARICA ELETTRICA ELEMENTARE.

Si consideri la carica elettrica positiva  $q_1$ , che si trova nel punto la cui posizione è data, rispetto al prescelto sistema di coordinate, dal vettore  $\mathbf{r}_1$ , e si voglia determinare il campo elettrico da essa generato in un generico  $\mathbf{r}_2$ . Secondo la definizione data, si collochi una carica di prova positiva  $q_2$  in  $\mathbf{r}_2$ ; la forza  $\mathbf{F}$  agente su di essa è data dall'equazione (7.2), quindi il campo elettrico in  $\mathbf{r}_2$  è dato da

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}_2) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{r_{12}^3} \mathbf{r}_{12}, \quad (7.7)$$

essendo  $\mathbf{r}_{12} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ . Il principio di sovrapposizione enunciato per la forza di Coulomb, si estende in modo naturale per il vettore campo elettrico: ove siano presenti più cariche elettriche elementari, il campo da loro generato è la somma vettoriale dei campi generati da ciascuna di loro come se fosse l'unica presente.

Se la carica elettrica  $Q$  che genera il campo non è elementare, la definizione di campo elettrico richiede la scomposizione di  $Q$  in parti sufficientemente piccole da essere considerate elementari.



**Figura 7.9:** Il calcolo del campo elettrico generato da una carica elettrica non elementare.

Il modo matematicamente corretto di farlo è di definire una densità di carica elettrica  $\rho(\mathbf{r})$  dipendente dalla posizione, in questo modo la carica elettrica del volume infinitesimo  $dV$  è  $\rho(\mathbf{r}) dV$  e il campo elettrico nel punto di coordinate  $\mathbf{r}_1$  è dato dall'integrale di volume

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}_1) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{r})}{r'^3} \mathbf{r}' dV, \quad (7.8)$$

con  $\mathbf{r}' = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}$ .

### 7.3.2 CAMPO ELETTRICO DI UN DIPOLO.

Come secondo esempio, si consideri il campo elettrico dovuto a due cariche elettriche uguali ed opposte poste a distanza  $2d$ . Inizialmente si limita il calcolo ai punti dell'asse del segmento avente

per estremi le due cariche elettriche. A tal fine si sceglie un sistema di riferimento cartesiano con l'origine nel punto medio fra le due cariche elettriche e gli assi orientati in modo tale che la carica elettrica positiva si trovi nel punto di coordinate  $(0, d)$  e la carica elettrica negativa nel punto di coordinate  $(0, -d)$  (si veda la figura 7.10). Si vuole calcolare il campo elettrico in un punto

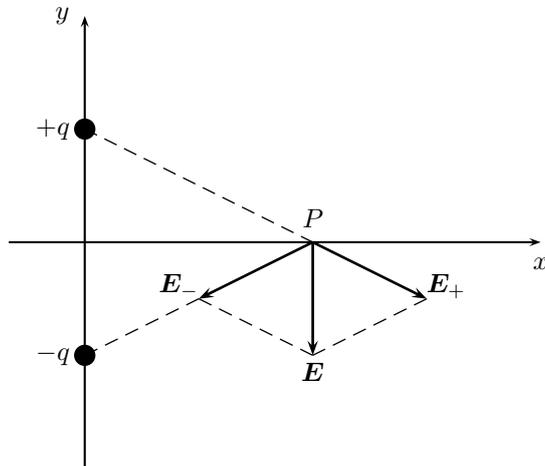


Figura 7.10: Il campo elettrico di un dipolo.

generico sull'asse delle ascisse, quindi un punto di coordinate  $P(x, 0)$ . In  $P$  il campo elettrico è la sovrapposizione dei due campi, indicati con  $\mathbf{E}_+$  e  $\mathbf{E}_-$  generati dalle due cariche elettriche. I moduli dei due campi sono dati dalla relazione

$$E_+ = E_- = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{d^2 + x^2}. \quad (7.9)$$

Per sommare i due contributi basta osservare che il triangolo avente per vertici le due cariche elettriche e  $P$  è simile al triangolo di vertici  $P$  e le punte dei vettori  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{E}_+$ . Quindi, la proporzionalità dei lati corrispondenti dà

$$\frac{E}{E_+} = \frac{2d}{\sqrt{d^2 + x^2}} \quad \longrightarrow \quad E = \frac{2d}{\sqrt{d^2 + x^2}} E_+ = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2dq}{(d^2 + x^2)^{3/2}}. \quad (7.10)$$

Se la distanza di  $P$  dalle cariche elettriche è paragonabile alla loro distanza reciproca, cioè se  $x \simeq d$  la relazione precedente diventa

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{q}{x^2}, \quad (7.11)$$

ove si noti la dipendenza dall'inverso del quadrato della distanza.

Se, viceversa, la distanza di  $P$  dalle cariche elettriche è molto maggiore della distanza fra di esse, cioè se  $x \gg d$ , la coppia di cariche elettriche prende il nome di **dipolo elettrico**. In questa approssimazione, detta *dipolare*, vale  $d^2 + x^2 \simeq x^2$  quindi il modulo del campo elettrico diventa

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p}{x^3}, \quad (7.12)$$

avendo definito *momento di dipolo* la quantità  $p = 2dq$  cioè il prodotto del valore delle cariche elettriche per la loro distanza. Si noti la dipendenza dall'inverso del cubo della distanza. Quindi spostandosi lungo l'asse del dipolo, la dipendenza dalla distanza passa, con continuità, dall'inverso del quadrato all'inverso del cubo.

Vale la pena di completare l'esercizio e calcolare il campo prodotto dalle due cariche elettriche nei punti dell'altro asse di simmetria del sistema, cioè della retta che passa per le due cariche elettriche; rispetto al sistema di riferimento scelto in figura 7.10, l'asse delle ordinate. Si limita

il calcolo del campo elettrico ai punti di ordinata maggiore di  $d^{11}$ ; in questa situazione i campi elettrici generati dalle due cariche elettriche si sottraggono e vale

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{(y-d)^2} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{(y+d)^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q \frac{(y+d)^2 - (y-d)^2}{(y-d)^2(y+d)^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{4d q y}{(y^2 - d^2)^2}. \quad (7.13)$$

Si vede ancora che se  $y \simeq 2d$  (non può essere  $y = d$ !) si trova

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{32 q}{9 y^2}, \quad (7.14)$$

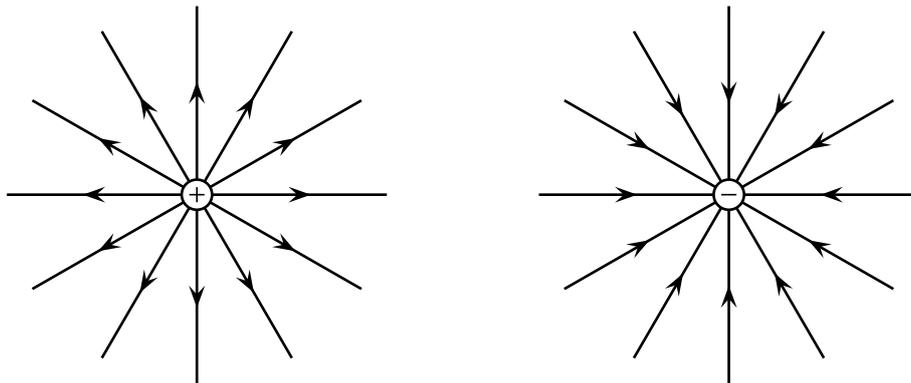
e quindi ancora dipendenza dall'inverso del quadrato della distanza. Mentre per  $y \gg d$  vale

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2p}{y^3}, \quad (7.15)$$

in cui si riconosce nuovamente la dipendenza dall'inverso del cubo della distanza, tipica del dipolo.

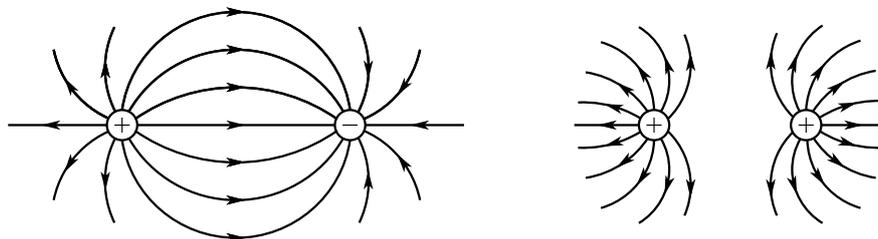
## 7.4 LE LINEE DI CAMPO.

Si definisce *linea di campo* una linea orientata tangente in ogni punto al vettore campo elettrico presente in quel punto.



**Figura 7.11:** Linee di campo per una carica elettrica elementare positiva e negativa.

Poiché, come già osservato, il vettore campo elettrico ha la stessa direzione e lo stesso verso del vettore forza elettrica agente su di una carica di prova positiva, una linea di campo viene spesso detta linea di forza<sup>12</sup>.



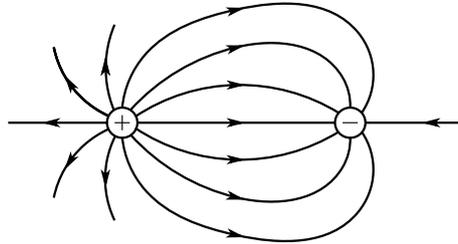
**Figura 7.12:** Linee di campo elettrico per due cariche elettriche uguali positive e per due opposte.

Le linee di campo costituiscono un'utile rappresentazione grafica del campo elettrico. Per costruirle si osservi che le linee di campo escono dalle cariche elettriche positive ed entrano in quelle negative.

<sup>11</sup> Si lascia al lettore studioso il compito di calcolare il campo nelle altre situazioni.

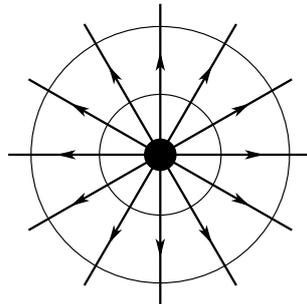
<sup>12</sup> Si noti che questo *non* è vero in generale, ma solo nel caso in cui il vettore campo sia proporzionale al vettore forza; più avanti si vedrà un esempio di un campo che non verifica questa condizione.

Si noti inoltre che due linee di campo non possono mai intersecarsi; altrimenti, infatti, nel punto di intersezione si avrebbero due campi elettrici tangenti alle due diverse linee, cosa assurda. Si usa inoltre adottare la convenzione che il numero di linee uscenti (entranti) da una carica elettrica positiva (negativa) sia proporzionale, secondo una costante arbitraria, alla carica elettrica in questione.



**Figura 7.13:** Linee di campo elettrico di due cariche diverse.

Per esempio, in figura 7.13 sono rappresentate le linee del campo elettrico generato da due cariche elettriche diverse: una positiva di 3 C e una negativa di 2 C; si noti che dalla carica elettrica positiva escono 12 linee mentre in quella negativa ne entrano 8. Si è quindi scelto 4 come costante di proporzionalità, cioè sono state disegnate quattro linee per ogni coulomb. Evidentemente, maggiore è questa costante di proporzionalità più accurata è la rappresentazione del campo elettrico. Dall'esame delle linee disegnate sembra che il campo sia più intenso dove le linee sono più fitte. Per dare consistenza a questa impressione, si esamina il caso del campo elettrico generato da una carica elettrica elementare positiva.



**Figura 7.14:** Invarianza del numero di linee che escono da una superficie sferica.

Si cerca di determinare, in questo semplice caso, da cosa dipenda la densità di linee che attraversa una superficie sferica centrata sulla carica elettrica. Si noti che il numero,  $N$ , di linee che attraversano una superficie sferica non dipende dal raggio  $r$ ; mentre all'aumentare di  $r$  l'area  $S$  della superficie sferica aumenta, com'è noto, secondo la legge  $S = 4\pi r^2$ . Quindi la densità  $n$  di linee che attraversano la superficie per unità di superficie è

$$n = \frac{N}{4\pi r^2} . \quad (7.16)$$

Quindi questa densità dipende dall'inverso del quadrato della distanza. D'altra parte anche il modulo del campo elettrico dipende dall'inverso del quadrato della distanza, cioè in tutti i punti della superficie sferica di raggio  $r$  vale

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} , \quad (7.17)$$

che si può riscrivere

$$E = \frac{q}{N\epsilon_0} n . \quad (7.18)$$

Quindi la densità delle linee di campo elettrico che attraversano una superficie è proporzionale al valore del modulo del campo elettrico sui punti di quella superficie. Si noti che la dimostrazione data qui vale solo per il campo prodotto da una carica elettrica elementare; è possibile tuttavia mostrarne la validità generale.

Si riassumono qui le proprietà delle linee di campo.

1. Le linee di campo escono dalle cariche elettriche positive ed entrano in quelle negative.
2. Due linee di campo non possono intersecarsi.
3. Il numero di linee di campo uscenti da, od entranti in, una carica elettrica è proporzionale al suo valore.
4. La densità di linee di campo su una superficie è proporzionale all'intensità del campo su quella superficie.

## 7.5 LA LEGGE DI GAUSS.

Si consideri ora il flusso del campo elettrico generato da una carica elettrica elementare  $q$  attraverso una superficie sferica centrata su di essa. In ogni punto della superficie il campo elettrico ha lo stesso valore, dato dalla (7.7), ed è in ogni punto perpendicolare alla superficie. Quindi si può calcolare il flusso utilizzando l'equazione (6.11);

$$\Phi_s(\mathbf{E}) = ES = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} 4\pi r^2 = \frac{q}{\epsilon_0} . \quad (7.19)$$

Si osservi che il flusso così calcolato non dipende dal raggio della sfera ma è proporzionale alla carica elettrica  $q$ . Ma dalle convenzioni adottate per la rappresentazione del campo elettrico in termini di linee di campo, anche il numero di linee uscenti dalla superficie non dipende dal raggio ed è proporzionale alla carica elettrica  $q$  secondo una costante arbitraria. Si può quindi individuare una relazione di proporzionalità fra il numero delle linee di campo uscenti e il flusso del campo elettrico uscente. Se  $k$  è la costante di proporzionalità arbitraria fra  $N$  e  $q$ , cioè se vale

$$N = kq \quad (7.20)$$

posso identificare il flusso del campo elettrico uscente con il numero delle linee di campo uscenti scegliendo

$$k = \frac{1}{\epsilon_0} ; \quad (7.21)$$

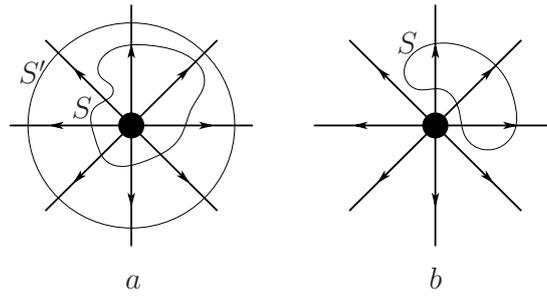
per tale scelta, infatti, vale

$$\Phi_s(\mathbf{E}) = N . \quad (7.22)$$

Questa relazione è stata qui dimostrata solamente nel caso, molto particolare, in cui si è considerato il flusso di un campo elettrico generato da una carica elettrica elementare attraverso una superficie sferica centrata in essa, ma quanto detto qui ha validità generale, cioè vale per qualsiasi distribuzione di carica elettrica e per qualsiasi superficie. Per una formulazione matematica rigorosa (ma un po' ostica) si veda oltre. Qui, per estendere un po' la comprensione del fenomeno, è possibile generalizzare ad ogni situazione l'identità fra flusso del campo elettrico uscente e numero di linee di campo uscenti (a meno di un'opportuna scelta della costante di proporzionalità  $k$ ). Si consideri quindi il flusso del campo elettrico generato da una carica elettrica elementare attraverso una superficie chiusa  $S$  qualsiasi.

Si cominci col supporre che la carica elettrica  $q$  sia interna alla superficie  $S$ . Si consideri una superficie sferica  $S'$  centrata nella carica elettrica  $q$  e sufficientemente grande da contenere  $S$ . Evidentemente ogni linea di campo che attraversa  $S$  attraversa anche  $S'$ , quindi il flusso uscente da  $S$  è uguale al flusso uscente da  $S'$ , ma questo, si è visto sopra (equazione (7.19)), dipende solo dalla carica elettrica  $q$  che genera il campo. Quindi il flusso del campo elettrico attraverso qualsiasi superficie chiusa che contenga la carica elettrica  $q$  è data da

$$\Phi_s = \frac{q}{\epsilon_0} . \quad (7.23)$$



**Figura 7.15:** Il flusso attraverso una superficie chiusa  $S$ ;  $a$ : carica interna;  $b$ : carica esterna.

Se d'altro canto la carica elettrica è esterna alla superficie  $S$ , ogni linea di campo elettrico entrante è anche uscente. Quindi il flusso totale attraverso  $S$  è nullo, come è nulla la carica elettrica interna. Quindi la relazione (7.23) sopra ricavata è vera sia che la carica elettrica sia interna sia che sia esterna alla superficie chiusa considerata.

Rimane da considerare che accade se nella superficie sono presenti più cariche elettriche elementari. Il ragionamento sopra svolto può essere ripetuto per ciascuna delle cariche elettriche presenti ed il principio di sovrapposizione ci garantisce che i flussi si sommano.

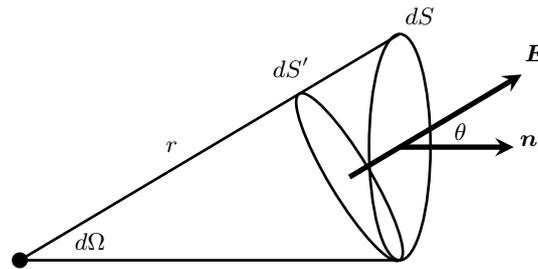
Esaminati tutti i casi possibili, si può enunciare la legge generale per il flusso del campo elettrico detta **legge di Gauss**<sup>13</sup>.

*Il flusso del campo elettrico attraverso qualsiasi superficie chiusa  $S$  è proporzionale alla carica elettrica totale  $Q$  presente all'interno della superficie.*

Vale infatti la relazione

$$\Phi_S(\mathbf{E}) = \frac{Q}{\epsilon_0}. \tag{7.24}$$

Una dimostrazione più rigorosa segue le linee seguenti. Si consideri una porzione infinitesima  $dS$  della superficie chiusa  $S$  distante  $r$  dalla carica elettrica  $q$ , e si consideri il cono di vertice in  $q$  e di base  $dS$ ; in generale non si tratta di un cono retto.



**Figura 7.16:** Il flusso attraverso una superficie infinitesima.

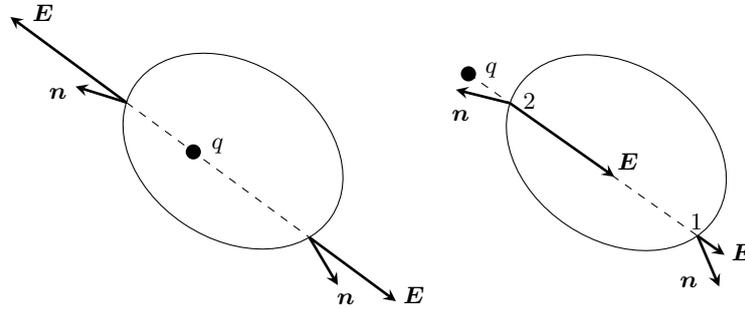
Sia  $\mathbf{n}$  il vettore unitario perpendicolare alla superficie, e sia  $\mathbf{E}$  il vettore campo elettrico su  $dS$ .  $\mathbf{E}$  è perpendicolare alla porzione  $dS'$  di superficie sferica di raggio  $r$  centrata sulla carica elettrica. Sia  $\theta$  l'angolo formato dai due vettori  $\mathbf{E}$  ed  $\mathbf{n}$ . Il flusso uscente da  $dS$  quindi è

$$d\Phi(\mathbf{E}) = \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS = E \cos \theta dS = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\cos \theta dS}{r^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{dS'}{r^2}. \tag{7.25}$$

$d\Omega = \frac{dS'}{r^2}$  è l'angolo solido di apertura del cono, ed è definito come segue. Sia data una sfera di centro in  $q$  e raggio  $r$  e sia  $dS'$  l'intersezione del cono con la superficie sferica. Si definisce allora angolo solido di apertura del cono il rapporto fra l'area di  $dS'$  e il quadrato del raggio. L'unità di misura dell'angolo

<sup>13</sup> Carl Friedrich Gauss (1777-1855), matematico tedesco.

solido è detta *steradiane*. Si noti la stretta analogia con la definizione del radiante per gli angoli piani. Si osservi che l'angolo solido relativo all'intero spazio è il rapporto fra la misura della superficie dell'intera sfera e del suo raggio al quadrato: è quindi  $4\pi$ .



**Figura 7.17:** Dimostrazione della legge di Gauss; a: carica interna a  $S$ ; b: carica esterna ad  $S$ .

Con questa definizione si può quindi scrivere

$$d\Phi(\mathbf{E}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} d\Omega. \quad (7.26)$$

Si osservi che il flusso attraverso un elemento infinitesimo di superficie dipende solo dall'angolo solido sotteso dalla carica elettrica a tale superficie e non dalla sua distanza da  $q$  né dalla sua orientazione. Quindi se la carica elettrica  $q$  è interna alla superficie sommando i flussi attraverso tutti gli elementi di superficie si ci si trova a sommare tutti gli elementi di angolo solido fino ad avere l'angolo solido totale:

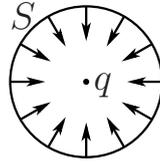
$$\Phi_S = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int d\Omega = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} 4\pi = \frac{q}{\epsilon_0}. \quad (7.27)$$

Se la carica elettrica, invece, è esterna alla superficie, per ogni contributo positivo (si veda il punto 1 nella figura 7.17b) esiste un identico contributo negativo (punto 2). Quindi il flusso totale è nullo. Poiché quanto detto si può ripetere per ciascuna delle cariche elettriche elementari presenti, il risultato rimane vero qualunque sia la carica elettrica e ovunque essa si trovi. Questo conclude la dimostrazione della legge di Gauss.

### Osservazioni

1. Si ribadisce con tutta l'enfasi possibile che la legge di Gauss vale *solo* se la superficie  $S$  è chiusa.
2. Dall'equazione (7.24) segue che il flusso ha lo stesso segno della carica elettrica interna; se ne deduce che il flusso è positivo se le linee di campo sono uscenti e negativo se le linee di campo sono entranti.
3. Si osservi che la validità della legge di Gauss segue direttamente dalla legge di Coulomb ed in particolare dal fatto che la forza elettrica, e quindi il campo, dipendono dall'inverso del quadrato della distanza. In maniera del tutto equivalente è possibile partire dalla legge di Gauss come dato sperimentale e dedurre la legge di Coulomb. In altre parole, le due leggi sono equivalenti.
4. La legge di Gauss è uno strumento essenziale per la determinazione del campo elettrico in tutte le situazioni in cui ci siano molte cariche elettriche a generare il campo ed il problema presenti una qualche simmetria. Più sotto si esamineranno gli esempi principali.
5. La legge di Gauss implica che non è possibile che una carica elettrica elementare sottoposta a forze puramente elettriche, cioè forze di attrazione o repulsione da parte di altre cariche elettriche presenti, si trovi in una situazione di equilibrio stabile. Certamente è possibile porre una carica elettrica in equilibrio: per esempio nel punto medio fra due cariche elettriche uguali, o nel centro di un quadrato ai cui vertici si trovino quattro cariche elettriche uguali

e così via. Tale equilibrio però non può essere stabile. Infatti se il punto  $P$  fosse punto di equilibrio stabile per la carica elettrica elementare positiva  $q$ , ad ogni piccolo spostamento di  $q$  da  $P$  dovrebbe esserci una forza di richiamo che la respinge verso  $P$ . In tal caso sarebbe possibile racchiudere la carica elettrica  $q$  in  $P$  con una piccola superficie sferica  $S$ .



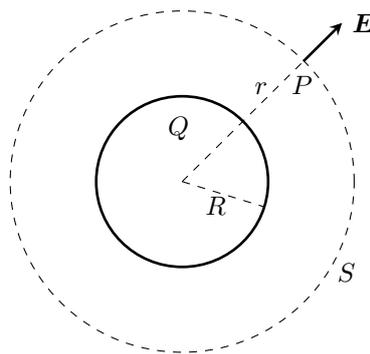
**Figura 7.18:** Impossibilità dell'equilibrio stabile.

In ogni punto di  $S$  si avrebbe quindi un campo elettrico diretto verso  $P$ ; attraverso  $S$  si sarebbe pertanto un flusso del campo elettrico entrante e quindi negativo; ma all'interno di  $S$  c'è la sola carica elettrica positiva  $q$  e per la legge di Gauss deve esserci un flusso del campo elettrico uscente, e quindi positivo. Il che è contraddittorio. Quindi la carica elettrica elementare positiva  $q$  non può essere in equilibrio. In modo del tutto analogo si ragiona se la carica elettrica  $q$  è negativa.

6. Solo di passaggio si osserva che anche l'equilibrio dinamico è impossibile se agiscono solo forze elettriche. Si pensi al modello atomico di Rutherford<sup>14</sup> e al fatto che Bohr<sup>15</sup> ha dovuto, per ottenere un atomo stabile ricorrere a postulati *ad hoc* che sarebbero stati poi i semi da cui è germogliato il modello atomico della meccanica quantistica.

### 7.5.1 DISTRIBUZIONE SFERICA DI CARICHE ELETTRICHE.

Si supponga che una carica elettrica positiva  $Q$  sia distribuita in modo omogeneo, e quindi con densità  $\rho$  costante, in una sfera di raggio  $R$ . Si tratta di calcolare il campo elettrico prodotto. Si comincia con il considerare i punti esterni alla sfera. Si considera quindi un punto  $P$  distante  $r > R$  dal centro della sfera. Per applicare la legge di Gauss si deve scegliere, ad arbitrio, una superficie *chiusa*; considerazioni di simmetria suggeriscono di scegliere la superficie sferica  $S$  centrata nel centro della sfera carica e di raggio  $r$  (tratteggiata in figura 7.19) e quindi passante per  $P$ . Il campo elettrico in  $P$  è perpendicolare alla superficie così scelta; ma non solo: in ogni altro punto di  $S$  il campo elettrico ha lo stesso valore che in  $P$  ed è perpendicolare ad  $S$ .



**Figura 7.19:** Distribuzione sferica di cariche elettriche: caso del punto esterno.

Quindi, come visto precedentemente, il flusso del campo elettrico in queste condizioni è il prodotto del campo per l'area della superficie; e cioè

$$\Phi_S(\mathbf{E}) = ES = 4\pi r^2 E, \quad (7.28)$$

<sup>14</sup> Ernest Rutherford, lord Nelson (1871-1937), fisico inglese.

<sup>15</sup> Niels Bohr (1885-1962), fisico danese.

la legge di Gauss si scrive pertanto

$$4\pi r^2 E = \frac{Q}{\epsilon_0}, \quad (7.29)$$

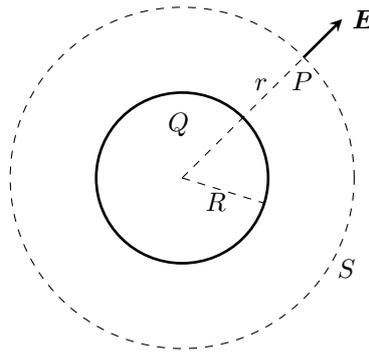
da cui è immediato dedurre il modulo del campo elettrico generato da una distribuzione sferica di cariche elettriche ad una distanza  $r$  dal centro:

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2}. \quad (7.30)$$

La conoscenza della geometria del problema e del fatto che la carica elettrica della sfera è positiva, consente di dire che il campo elettrico il cui modulo è stato ora calcolato è diretto secondo i raggi della sfera in verso centrifugo (si veda la figura 7.19). Il vettore in un generico punto di posizione  $P$  quindi può essere scritto nella forma

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^3} \mathbf{r}, \quad (7.31)$$

ove il vettore  $\mathbf{r}$  è quello che unisce il centro della sfera carica ed il punto  $P$ . Si osservi che il risultato trovato è quello che si genererebbe se tutta la carica elettrica  $Q$  fosse concentrata nel centro della sfera; in particolare, si noti,  $\mathbf{E}$  non dipende dal raggio  $R$  della sfera carica. Quindi si può affermare che il campo generato da una sfera carica, nei punti esterni alla sfera, è indistinguibile dal campo generato da una carica elettrica elementare, di pari valore, posta nel centro della sfera.



**Figura 7.20:** Distribuzione sferica di cariche elettriche: caso del punto interno.

Si consideri ora il caso in cui il punto  $P$  si trova all'interno della sfera carica. Si suppone, come detto sopra, che la densità di carica elettrica  $\rho$  sia costante in tutto il volume della sfera, valga cioè

$$Q = \frac{4}{3} \pi R^3 \rho. \quad (7.32)$$

Per applicare la legge di Gauss si considera nuovamente una superficie chiusa sferica  $S$  di raggio  $r < R$  (tratteggiata in figura 7.20) centrata nel centro della carica elettrica sferica. Considerazioni di simmetria suggeriscono che il campo elettrico abbia, anche in questo caso, lo stesso modulo in ogni punto  $P$  di  $S$  e sia ovunque perpendicolare a  $S$ . Quindi si può scrivere ancora

$$\Phi_S(\mathbf{E}) = ES = 4\pi r^2 E. \quad (7.33)$$

Questo flusso è proporzionale alla carica elettrica interna  $Q'$ , secondo la legge di Gauss; questa è uguale alla densità di carica elettrica per il volume della sfera racchiusa nella superficie  $S$ . Vale quindi

$$Q' = \frac{4}{3} \pi r^3 \rho = Q \frac{r^3}{R^3}. \quad (7.34)$$

Deve quindi valere

$$\Phi_S(\mathbf{E}) = \frac{Q'}{\epsilon_0} \quad \longrightarrow \quad 4\pi r^2 E = \frac{Q}{\epsilon_0} \frac{r^3}{R^3}, \quad (7.35)$$

e quindi

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^3} r . \quad (7.36)$$

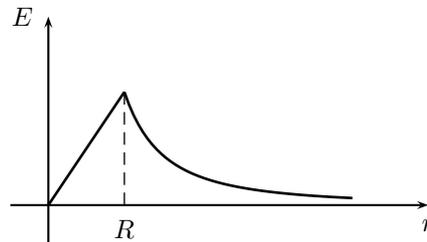
Il modulo del campo elettrico interno alla superficie sferica quindi cresce linearmente con la distanza. Anche in questo caso il campo ha verso centrifugo e quindi il vettore campo elettrico nel punto  $P$  interno alla superficie sferica può essere scritto nella forma

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^3} \mathbf{r} , \quad (7.37)$$

ove  $\mathbf{r}$  è il vettore che unisce il centro della sfera e  $P$ .

### Osservazioni

1. Le espressioni (7.30) e (7.36), coincidono se calcolate nei punti *sulla* superficie della sfera carica, cioè per  $r = R$ .
2. La dipendenza del modulo di  $\mathbf{E}$  da  $r$  può essere rappresentato dal grafico di figura 7.21.

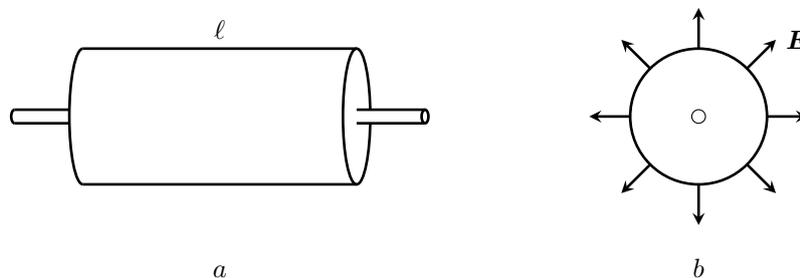


**Figura 7.21:** Il modulo del campo elettrico generato da una sfera carica in funzione di  $r$ .

3. Se la sfera carica è costituita solo da un guscio sferico cavo sulla cui superficie la carica elettrica sia distribuita uniformemente, il campo elettrico all'interno è nullo; infatti se all'interno non c'è carica elettrica il flusso è nullo per qualsiasi superficie chiusa interna alla sfera cava, quindi il campo elettrico all'interno deve essere nullo.

### 7.5.2 DISTRIBUZIONE LINEARE DI CARICHE ELETTRICHE.

Si consideri una distribuzione a simmetria cilindrica di cariche elettriche molto lunga; sia quindi un filo a sezione circolare di raggio  $a$  che sia carico uniformemente, cioè tale che la sua carica elettrica per unità di lunghezza  $\lambda$  sia costante e che tutte le considerazioni che seguono si svolgano in una zona sufficientemente lontana dagli estremi del filo.



**Figura 7.22:** Distribuzione lineare di cariche elettriche; a: vista laterale, b: sezione.

Si tratta di calcolare, per mezzo della legge di Gauss, il campo elettrico prodotto dal filo carico in ogni punto dello spazio fisico. Considerazioni di simmetria portano a ritenere che il campo abbia lo stesso valore in punti che si trovino ad uguali distanze dal filo e che abbia direzione radiale, sia cioè diretta come i raggi. Questa osservazione suggerisce di scegliere come superficie

$S$  chiusa un cilindro coassiale al filo di lunghezza  $\ell$  e raggio  $r$  (si veda la figura 7.22). In questo modo il campo elettrico ha lo stesso valore ed è perpendicolare alla superficie in tutti i punti della superficie laterale del cilindro. Per tale superficie laterale quindi il flusso del campo elettrico è semplicemente il prodotto della area  $2\pi r\ell$  per il campo. Resta da discutere il flusso attraverso le due basi del cilindro. Si noti che il campo elettrico ha direzione parallela alle due superfici di base e che quindi il flusso di  $\mathbf{E}$  attraverso tali basi è nullo. Quindi il flusso di  $\mathbf{E}$  attraverso  $S$  è

$$\Phi_S(\mathbf{E}) = 2\pi r\ell E. \quad (7.38)$$

Per la legge di Gauss, questo flusso è proporzionale alla carica elettrica  $Q$  contenuta all'interno della superficie. Questa è pari al prodotto della densità lineare  $\lambda$  per la lunghezza, cioè  $Q = \lambda\ell$ . Quindi vale

$$\Phi_S(\mathbf{E}) = \frac{Q}{\epsilon_0} \quad \longrightarrow \quad 2\pi r\ell E = \frac{\lambda\ell}{\epsilon_0}, \quad (7.39)$$

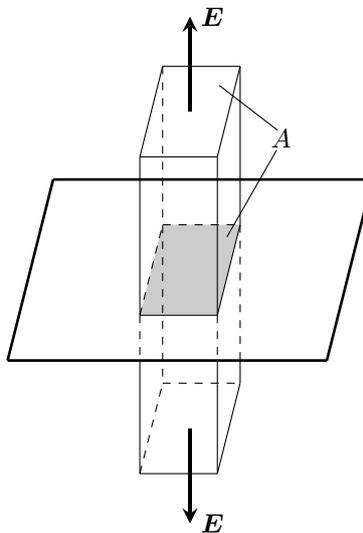
il modulo del campo elettrico a distanza  $r$  dal filo è pertanto

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{r}. \quad (7.40)$$

La direzione di  $\mathbf{E}$  è perpendicolare al filo ed è orientato verso il filo se le cariche elettriche sul filo sono negative, di verso opposto se positive. Si osservi che il modulo del campo decresce con l'inverso della distanza  $r$ , e, inoltre, che non dipende dal raggio  $a$  del filo.

### 7.5.3 DISTRIBUZIONE PIANA DI CARICHE ELETTRICHE.

Si consideri un piano indefinito, ossia sufficientemente esteso da far sí che i bordi del piano fisico che viene considerato abbiano un ruolo del tutto trascurabile in ciò che segue. Si supponga di porre su questo piano delle cariche elettriche in modo tale che sia costante la densità superficiale  $\sigma$ .



**Figura 7.23:** Distribuzione piana di cariche elettriche.

Si vuole determinare il campo elettrico ad una distanza  $d$  dal piano utilizzando la legge di Gauss. Per scegliere la superficie chiusa  $S$  si osservi che, per considerazioni di simmetria, il campo è perpendicolare al piano carico e a distanze uguali, sopra e sotto il piano, deve avere lo stesso valore. Si consideri quindi un parallelepipedo con basi di area  $A$  parallele al piano e ciascuna distante  $d$  dal piano, in modo cioè che il piano carico sia piano di simmetria per il parallelepipedo. In questo modo il valore del campo elettrico è lo stesso in ogni punto delle due basi ed è ad esse perpendicolare. Il flusso attraverso ciascuna base è quindi  $AE$ . Inoltre il campo elettrico è

parallelo alle altre facce del parallelepipedo, quindi attraverso l'intera superficie laterale il flusso è nullo. Il flusso attraverso l'intera superficie chiusa  $S$  è pertanto dato dal flusso attraverso le sole basi:

$$\Phi_S(\mathbf{E}) = 2AE . \quad (7.41)$$

Per la legge di Gauss questo flusso è proporzionale alla carica elettrica presente all'interno di  $S$ ; questa si trova nell'intersezione fra il piano carico ed il parallelepipedo, cioè sulla superficie di area  $A$  tratteggiata in figura 7.23. Questa carica elettrica è  $Q = \sigma A$ ; si può allora scrivere

$$\Phi_S(\mathbf{E}) = \frac{Q}{\epsilon_0} \quad \longrightarrow \quad 2AE = \frac{\sigma A}{\epsilon_0} , \quad (7.42)$$

e quindi il modulo del campo  $\mathbf{E}$  è

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} . \quad (7.43)$$

La direzione di  $\mathbf{E}$  è perpendicolare al piano carico ed il verso è diretto verso il piano se le cariche elettriche sono negative e ha verso opposto se le cariche elettriche sono positive. Si osservi inoltre che il modulo del campo elettrico così calcolato non dipende dalla distanza  $d$ . Il che significa che il campo prodotto da un piano infinito carico è lo stesso in ogni punto a qualunque distanza dal piano stesso: in altre parole è un campo uniforme. Questo è vero solo se il piano è infinito, cioè mai. L'approssimazione di campo uniforme, tuttavia è buona nei punti non troppo lontani dal piano o troppo vicini ai suoi bordi.

## 7.6 DAL CAMPO ALLA FORZA.

Una volta determinato il campo elettrico  $\mathbf{E}$ , generato da una data distribuzione di carica elettrica, in ogni punto dello spazio tramite la legge di Gauss, è possibile determinare la forza elettrica  $\mathbf{F}$  agente su qualsiasi carica elettrica elementare  $q$  in un qualunque punto dello spazio; per la (7.6), vale infatti

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} . \quad (7.44)$$

### 7.6.1 DIPOLO IN UN CAMPO ELETTRICO UNIFORME.

Si vuole determinare la forza agente su di un dipolo elettrico che si trovi in un campo elettrico uniforme. Si consideri quindi un dipolo elettrico costituito da due cariche elettriche elementari  $+q$  e  $-q$  che si trovino ad una distanza fissa  $\delta$  e lo si collochi in una regione dello spazio ove sia presente un campo elettrico uniforme  $\mathbf{E}$ .

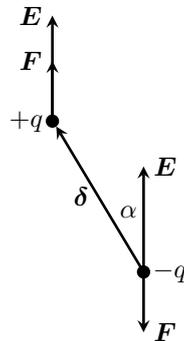


Figura 7.24: Il dipolo elettrico in un campo elettrico uniforme.

Il campo  $\mathbf{E}$  agisce sulle cariche elettriche con due forze di modulo  $F = qE$  di direzione parallela a quella del campo, ma di verso opposto; in particolare la forza applicata sulla carica elettrica positiva ha lo stesso verso di  $\mathbf{E}$  mentre quella applicata alla carica elettrica negativa ha verso opposto. Quindi al dipolo risulta applicata una coppia di forze il cui momento ha, con riferimento

alla figura 7.24, direzione perpendicolare al piano della coppia, verso entrante nel foglio e modulo dato da

$$M = F\delta \sin \alpha = qE \delta \sin \alpha = p E \sin \alpha , \tag{7.45}$$

ove si è posto, come già fatto nell'equazione (7.12),  $p = q \delta$ . Definendo il vettore  $\delta$  che si origina nella carica elettrica negativa e termina nella carica elettrica positiva (come in figura 7.24) è possibile definire il vettore momento di dipolo elettrico

$$\mathbf{p} = q \delta , \tag{7.46}$$

e quindi scrivere il momento della coppia nella forma vettoriale

$$\mathbf{M} = \mathbf{p} \wedge \mathbf{E} . \tag{7.47}$$

**7.6.2 FORZA DI REPULSIONE FRA DUE PIANI CARICHI.**

Come ulteriore esempio si determina qui la forza di repulsione per unità di superficie di due piani uguali paralleli di aventi area  $A$  e carichi della stessa carica elettrica positiva di densità  $\sigma$ . Nell'approssimazione in cui i due piani generano un campo uniforme, dato dalla (7.43), la forza elettrica viene determinata osservando che la forza su un piano è uguale alla sua carica elettrica totale moltiplicata per l'intensità del campo elettrico prodotto dall'altro piano, vale cioè

$$F = QE = Q \frac{\sigma}{2\epsilon_0} = \frac{Q^2}{2A\epsilon_0} , \tag{7.48}$$

quindi la forza per unità di superficie è

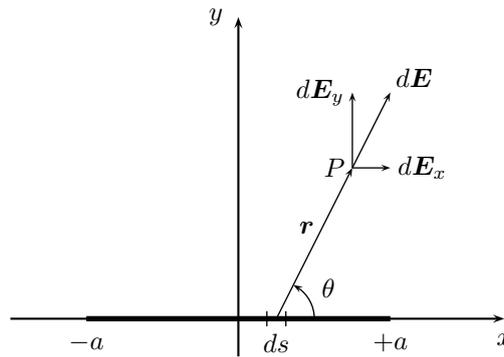
$$\frac{F}{A} = \frac{Q^2}{2A^2\epsilon_0} = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} . \tag{7.49}$$

**7.7 IL CAMPO ELETTRICO IN SITUAZIONI VARIE.**

In questa sezione si propone il calcolo del campo elettrico generato da varie distribuzioni di carica elettrica. In tutti i casi presentati il calcolo richiede gli strumenti dell'analisi.

**7.7.1 IL CAMPO ELETTRICO GENERATO DA UN FILO CARICO.**

Si consideri un filo di lunghezza  $2a$  carico con una carica elettrica positiva distribuita uniformemente con densità lineare  $\lambda$ . Si vuole calcolare il campo elettrico generato da questo filo in un punto  $P$  qualsiasi.



**Figura 7.25:** Il campo generato da un filo carico.

Si consideri un sistema di assi cartesiani centrati nel punto medio del filo con l'asse delle ascisse disposto lungo il filo; si consideri un elemento infinitesimo di filo di ascissa  $s$  e lunghezza  $ds$ . Su questo elemento è presente la carica elettrica  $\lambda ds$  e quindi esso genera sul punto  $P(x, y)$  un campo elettrico  $d\mathbf{E}$  dato da

$$d\mathbf{E} = \frac{\lambda ds}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r}}{r^3} , \tag{7.50}$$

le cui componenti  $x$  e  $y$  sono

$$dE_x = \frac{\lambda ds}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cos\theta \quad , \quad dE_y = \frac{\lambda ds}{4\pi\epsilon_0 r^2} \sin\theta \quad . \quad (7.51)$$

ove valgono le relazioni

$$r^2 = (x-s)^2 + y^2 \quad , \quad \cos\theta = \frac{x-s}{r} \quad , \quad \sin\theta = \frac{y}{r} \quad . \quad (7.52)$$

Per il contributo dell'intero filo al campo in  $P$  occorre integrare da  $-a$  a  $+a$ .

$$\begin{aligned} E_x &= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_{-a}^{+a} \frac{x-s}{[(x-s)^2 + y^2]^{3/2}} ds = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{1}{[(x-s)^2 + y^2]^{1/2}} \right]_{-a}^{+a} = \\ &= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{[(x-a)^2 + y^2]^{1/2}} - \frac{1}{[(x+a)^2 + y^2]^{1/2}} \right) \quad , \\ E_y &= \frac{\lambda y}{4\pi\epsilon_0} \int_{-a}^{+a} \frac{ds}{[(x-s)^2 + y^2]^{3/2}} = -\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{y} \left[ \frac{x-s}{[(x-s)^2 + y^2]^{1/2}} \right]_{-a}^{+a} = \\ &= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{y} \left( \frac{x+a}{[(x+a)^2 + y^2]^{1/2}} - \frac{x-a}{[(x-a)^2 + y^2]^{1/2}} \right) \quad . \end{aligned} \quad (7.53)$$

Nel caso di un filo infinito occorre fare il limite per  $a \rightarrow +\infty$  ottenendo

$$\lim_{a \rightarrow +\infty} E_x = 0 \quad (7.54)$$

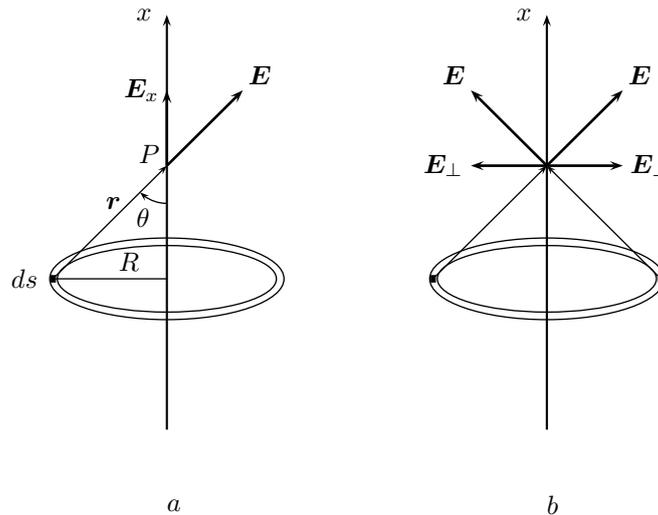
e

$$\lim_{a \rightarrow +\infty} E_y = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 y} \lim_{a \rightarrow +\infty} \left( \frac{x+a}{[(x+a)^2 + y^2]^{1/2}} - \frac{x-a}{[(x-a)^2 + y^2]^{1/2}} \right) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 y} \cdot 2 = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 y} \quad , \quad (7.55)$$

in accordo con il risultato ottenuto mediante la legge di Gauss.

### 7.7.2 IL CAMPO ELETTRICO GENERATO DA UN ANELLO CARICO.

Si consideri un anello di raggio  $R$  e di sezione trascurabile su cui si trovi una carica elettrica positiva distribuita omogeneamente con densità lineare  $\lambda$ . Si vuole determinare il campo elettrico generato da tale carica elettrica in un punto  $P$  dell'asse dell'anello, scelto come asse delle ascisse.



**Figura 7.26:** Campo elettrico generato da un anello carico; componenti assiale e perpendicolare.

Si consideri quindi un elemento dell'anello di lunghezza  $ds$  e quindi di carica elettrica  $\lambda ds$ ; questo genera in  $P$  un campo elettrico  $d\mathbf{E}$  che forma con l'asse un angolo  $\theta$  ed ha modulo

$$dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda ds}{r^2} \quad , \quad (7.56)$$

ove vale  $r^2 = x^2 + R^2$ . La componente assiale di questo campo elettrico è

$$dE_x = dE \cos \theta = dE \frac{x}{r} . \quad (7.57)$$

Per ottenere il campo totale  $E_x$  occorre integrare lungo tutta la circonferenza:

$$E_x = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \frac{x}{r} \int_0^{2\pi R} ds = \frac{\lambda R}{2\epsilon_0} \frac{x}{r^3} = \frac{\lambda R}{2\epsilon_0} \frac{x}{(x^2 + R^2)^{3/2}} . \quad (7.58)$$

La componente del campo elettrico perpendicolare all'asse è nulla, poiché per ogni elemento  $ds$  ce n'è un secondo, diametralmente opposto, che genera un campo con componente perpendicolare all'asse uguale ed opposta.

### 7.7.3 IL CAMPO ELETTRICO GENERATO DA UN DISCO CARICO.

Si consideri un disco di raggio  $R$ , carico uniformemente con una carica elettrica positiva di densità superficiale  $\sigma$ . Si vuole calcolare il campo elettrico in un qualsiasi punto dell'asse del disco. Per far ciò si divida il disco in tante corone circolari infinitesime e si consideri quella di larghezza compresa fra  $r$  ed  $r + dr$ ; questa ha area  $dS = 2\pi r dr$  e si può assimilare ad un anello di raggio  $r$  di carica elettrica  $dq = \sigma dS = 2\pi\sigma r dr$  e quindi densità lineare

$$\lambda = \frac{dq}{2\pi r} = \frac{2\pi\sigma r dr}{2\pi r} = \sigma dr . \quad (7.59)$$

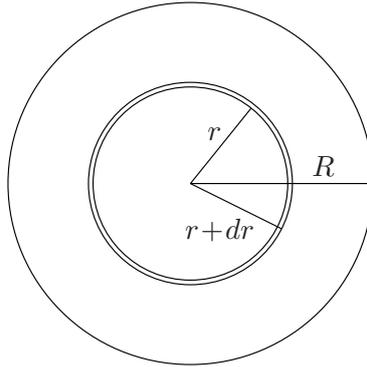


Figura 7.27: La corona circolare infinitesima.

Utilizzando il risultato (7.58), posso scrivere il campo generato dalla corona circolare infinitesima può essere scritta nella forma

$$dE = \frac{\sigma dr}{2\epsilon_0} \frac{x r}{(x^2 + r^2)^{3/2}} ; \quad (7.60)$$

il campo dell'intero disco si trova integrando questa espressione da 0 a  $R$ :

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} x \int_0^R \frac{r dr}{(x^2 + r^2)^{3/2}} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} x \int_x^{\sqrt{R^2+x^2}} \frac{t dt}{t^3} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} x \left[ -\frac{1}{t} \right]_x^{\sqrt{R^2+x^2}} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} x \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{\sqrt{R^2+x^2}} \right) , \quad (7.61)$$

ove si è utilizzata la sostituzione  $t^2 = x^2 + r^2$ . Nel limite  $R \rightarrow \infty$ , il disco diventa un piano infinito e si ritrova il risultato ottenuto con la legge di Gauss.

## 7.8 ENERGIA POTENZIALE DELLA FORZA ELETTRICA.

È possibile dimostrare che la forza di Coulomb è conservativa, cioè che il lavoro compiuto dalla forza di Coulomb su di una carica elettrica elementare  $q$  che si muova da  $A$  a  $B$  non dipende dal percorso fatto, ma solamente dalle posizioni di  $A$  e di  $B$ ; è quindi possibile definire una funzione  $U$  della sola posizione, detta *energia potenziale*, tale che il lavoro in questione si possa scrivere in

termini della variazione di  $U$ . In effetti se sotto l'azione della forza di Coulomb dovuta alla carica elettrica  $q_1$ , una seconda carica elettrica  $q$  si muove da  $A$  a  $B$ , il lavoro compiuto dalla forza di Coulomb può essere scritta nella forma

$$\mathcal{L}_{A \rightarrow B} = U(A) - U(B) , \quad (7.62)$$

ove la funzione energia potenziale  $U(r)$  dipende solo dalla distanza  $r$  fra le due cariche elettriche, e vale

$$U(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q}{r} , \quad (7.63)$$

e quindi

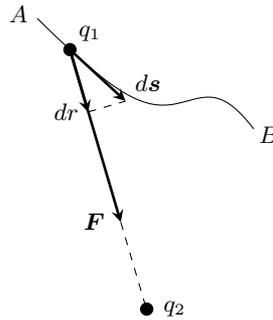
$$\mathcal{L}_{A \rightarrow B} = \frac{q_1 q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right) . \quad (7.64)$$

Si osservi che se le cariche elettriche sono concordi il lavoro  $\mathcal{L}_{A \rightarrow B}$  è positivo (negativo) se  $r_A < r_B$  ( $r_A > r_B$ ), cioè se le cariche elettriche si allontanano (avvicinano), e viceversa se le cariche elettriche sono discordi.

Per una semplice dimostrazione si osservi che per uno spostamento infinitesimo  $d\mathbf{s}$  la forza di Coulomb compie un lavoro infinitesimo

$$d\mathcal{L} = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q}{r^2} dr , \quad (7.65)$$

ove  $dr$  è la componente di  $d\mathbf{s}$  nella direzione di  $\mathbf{F}$ . In figura è rappresentato il caso di cariche elettriche discordi.



**Figura 7.28:** Il calcolo del lavoro per uno spostamento infinitesimo.

Quindi

$$d\mathcal{L} = -dU(r) \quad \text{con} \quad U(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q}{r} . \quad (7.66)$$

Integrando questa relazione rispetto a  $r$  si ottiene il lavoro totale

$$\mathcal{L} = - \int_{r_A}^{r_B} dU(r) = \frac{q_1 q}{4\pi\epsilon_0} \int_{r_A}^{r_B} \frac{dr}{r^2} = \frac{q_1 q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right) = U(r_A) - U(r_B) = -\Delta U . \quad (7.67)$$

Quindi il lavoro dipende solo dalle posizioni iniziali e finali e quindi la forza di Coulomb fra due cariche elettriche elementari è conservativa e l'energia potenziale è data da (7.66). Si osservi che la dimostrazione data qui è valida per qualsiasi forza che dipenda solo dalla distanza.

Le considerazioni qui espone per l'interazione fra due cariche elettriche elementari si generalizzano immediatamente ad un numero qualunque di cariche elettriche nel modo seguente. Si consideri il moto della carica elettrica  $q$  dalla posizione  $A$  alla posizione  $B$  sotto l'azione elettrostatica di  $N$  cariche elettriche  $q_1, \dots, q_N$  ferme. Il lavoro totale è dato dalla somma dei lavori delle singole cariche elettriche cioè

$$\mathcal{L}_{A \rightarrow B} = \sum_{i=1}^N \mathcal{L}_{A \rightarrow B}^{(i)} = \sum_{i=1}^N [U_i(r_{iA}) - U_i(r_{iB})] = U(A) - U(B) , \quad (7.68)$$

ove, chiamata  $r_{iA}$  ( $r_{iB}$ ) la distanza di  $A$  ( $B$ ) dalla carica elettrica  $q_i$ , si è definito

$$U(A) = \sum_{i=1}^N U_i(r_{iA}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \frac{q_i q}{r_{iA}} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{r_{iA}}, \quad (7.69)$$

e analogamente per  $U(B)$ . Quindi, anche nel caso di più cariche elettriche il lavoro dipende solo dalla posizione di  $A$  e di  $B$ , rispetto alle cariche elettriche che generano la forza, e quindi la forza è conservativa.

Si può generalizzare quanto precede al caso in cui il lavoro è dovuto ad una carica elettrica non elementare distribuita in modo continuo con una densità volumica  $\rho(\mathbf{r})$ . Allora il volume infinitesimo  $dV$  ha carica elettrica  $\rho(\mathbf{r}) dV$  ed il lavoro su una carica elettrica che si muova da  $A$  a  $B$  si può scrivere ancora mediante la differenza di energia potenziale  $U$  definita nel punto generico  $P$  dall'integrale

$$U(P) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{r})}{r} dV, \quad (7.70)$$

ove  $r$  è la distanza fra  $dV$  e  $P$ .

### Osservazioni

1. Il fatto che la forza di Coulomb sia conservativa è tutt'altro che sorprendente ove si osservi la sua identità formale con la forza newtoniana di gravitazione universale.
2. L'energia potenziale trovata è formalmente identica all'energia potenziale della forza di gravitazione universale, a parte il segno. Questa differenza è dovuta al fatto che masse dello stesso segno (cioè tutte le masse!) si attirano e quindi diminuendo la distanza diminuisce la l'energia potenziale; invece cariche elettriche dello stesso segno si respingono e quindi al diminuire della distanza deve aumentare l'energia potenziale.
3. Nota che sia la funzione  $U$  in ogni punto, è possibile calcolare il modulo della forza di Coulomb facendo semplicemente una derivata. In effetti per uno spostamento infinitesimo  $d\mathbf{s}$  (si veda la figura 7.28) il lavoro compiuto, indicando che  $dr$  la componente di  $d\mathbf{s}$  nella direzione di  $\mathbf{F}$ , si può scrivere nella forma

$$d\mathcal{L} = \mathbf{F}(r) \cdot d\mathbf{s} = F(r) dr = -dU(r), \quad (7.71)$$

da cui è immediato ricavare

$$F(r) = -\frac{dU(r)}{dr}. \quad (7.72)$$

4. L'equazione (7.69) dice in particolare che l'energia potenziale è *additiva*, cioè che l'energia potenziale dovuta ad  $N$  cariche elettriche elementari è la somma delle energie potenziali dovute alle singole cariche elettriche.

## 7.9 IL POTENZIALE ELETTRICO.

Dalle espressioni sopra ottenute per l'energia potenziale della forza di Coulomb, equazioni (7.63), (7.69), si vede che il lavoro delle forze elettriche che agiscono sulla carica elettrica elementare  $q$  è proporzionale a  $q$ . Questo suggerisce di definire **differenza di potenziale elettrico** il lavoro per unità di carica elettrica.

$$\frac{\mathcal{L}_{A \rightarrow B}}{q} = \frac{U(A) - U(B)}{q} = \phi(A) - \phi(B) = -\Delta\phi_{AB}, \quad (7.73)$$

ove il potenziale elettrico nel punto  $P$  distante  $r_i$  dalla carica elettrica  $q_i$  è definito come segue

$$\phi(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{r_i}. \quad (7.74)$$

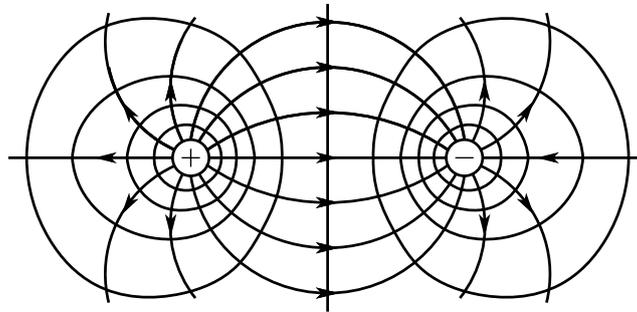
Si faccia attenzione: la differenza di potenziale elettrico (d.d.p.) è definita come la differenza fra il potenziale nel punto iniziale ed il potenziale nel punto finale e quindi è  $-\Delta\phi$ ; tale differenza di potenziale viene spesso indicata semplicemente con il simbolo  $V$ , identificando quindi  $-\Delta\phi \equiv V$ . L'unità di misura del potenziale è il joule/coulomb, ed è noto con il nome di *volt* (simbolo V), in onore di Volta<sup>16</sup>. Fra due punti c'è la differenza di potenziale di un volt se il lavoro necessario a spostare dal primo al secondo punto una carica elettrica di un coulomb è di un joule.

Per una carica elettrica non elementare distribuita in modo continuo con densità  $\rho(\mathbf{r})$ , il potenziale elettrico in  $P$  è dato da

$$\phi(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{r})}{r} dV. \quad (7.75)$$

ove  $r$  è la distanza fra  $dV$  e  $P$ .

Si definisce **superficie equipotenziale** un luogo di punti che si trovino allo stesso potenziale elettrico. Questo significa che se due punti  $A$  e  $B$  si trovano sulla stessa superficie equipotenziale si trovano allo stesso potenziale e quindi è nullo il lavoro che le forze elettriche compiono su di una carica elettrica che muova da  $A$  a  $B$ .



**Figura 7.29:** Le superfici equipotenziali di un dipolo.

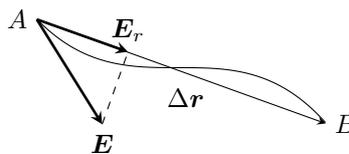
Si osservi che linee di campo e superfici equipotenziali sono in ogni punto perpendicolari. Infatti se indico con  $\Delta\mathbf{r}$  il vettore spostamento da  $A$  a  $B$  il lavoro compiuto sulla carica elettrica  $q$  che si muove da  $A$  a  $B$  è

$$\mathcal{L} = \mathbf{F} \cdot \Delta\mathbf{r} = q\mathbf{E} \cdot \Delta\mathbf{r} = 0; \quad (7.76)$$

quindi il vettore  $\mathbf{E}$  ed il vettore  $\Delta\mathbf{r}$  devono essere perpendicolari, cioè uno spostamento lungo una superficie equipotenziale è perpendicolare alla direzione della linea di campo elettrico.

## 7.10 RELAZIONE FRA IL CAMPO ELETTRICO ED IL POTENZIALE ELETTRICO.

Si consideri un campo elettrico costante  $\mathbf{E}$  e si consideri lo spostamento di una carica elettrica elementare  $q$  da un punto  $A$  ad un punto  $B$ ; si vuole determinare il lavoro del campo elettrico su  $q$ .



**Figura 7.30:** Il lavoro di in un campo elettrico costante.

<sup>16</sup> Alessandro Volta (1745-1827), fisico italiano.

Visto che la forza elettrica è conservativa, il lavoro non dipende dal percorso e quindi si può calcolarlo lungo la traiettoria che è piú comoda ai calcoli: scegliendo il vettore  $\Delta \mathbf{r}$  come in figura, dal momento che il campo elettrico è costante, il lavoro cercato è dato da

$$\mathcal{L}_{A \rightarrow B} = \mathbf{F} \cdot \Delta \mathbf{r} = q \mathbf{E} \cdot \Delta \mathbf{r} = q E_r \Delta r, \quad (7.77)$$

ove  $E_r$  è la componente di  $\mathbf{E}$  lungo la direzione di  $\Delta \mathbf{r}$  e quindi la differenza di potenziale elettrico è

$$\frac{\mathcal{L}_{A \rightarrow B}}{q} = -\Delta \phi_{AB} = E_r \Delta r. \quad (7.78)$$

Quindi la differenza di potenziale tra due punti che si trovino in una regione dello spazio in cui è presente un campo elettrico costante è uguale al prodotto della componente del campo nella direzione dello spostamento per  $\Delta r$  o, il che è lo stesso, dell'intensità del campo elettrico per la componente dello spostamento nella direzione di  $\mathbf{E}$ .

Il risultato ora ottenuto è facilmente generalizzabile al caso in cui  $\mathbf{E}$  non sia costante; in tal caso infatti il lavoro per uno spostamento infinitesimo  $d\mathbf{r}$  è

$$d\mathcal{L} = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = q \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = q E_r dr \quad \rightarrow \quad d\phi = -\frac{d\mathcal{L}}{q} = -E_r dr. \quad (7.79)$$

Da questa ultima relazione si può dedurre

$$E_r = -\frac{d\phi}{dr}. \quad (7.80)$$

Si osservi che  $E_r$  è la componente del campo elettrico nella direzione dello spostamento. Quindi per determinare il valore della componente del campo elettrico lungo una direzione basta calcolare la derivata del potenziale lungo tale direzione. Si noti inoltre che vale

$$\Delta \phi_{AB} = -\int_{r_A}^{r_B} E(r) dr. \quad (7.81)$$

## 7.11 IL POTENZIALE ELETTRICO IN SITUAZIONI VARIE.

In questa sezione viene calcolato il potenziale elettrico generato da varie distribuzioni di carica elettrica.

### 7.11.1 POTENZIALE ELETTRICO DI UNA CARICA ELETTRICA ELEMENTARE.

Il potenziale elettrico dovuto ad una singola carica elettrica elementare  $q$  in un punto  $P$  distante  $r$  da  $q$  si ricava immediatamente dall'equazione (7.74).

$$\phi(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}. \quad (7.82)$$

Altrettanto immediato è verificare la relazione fra potenziale e campo

$$E(r) = -\frac{d\phi}{dr} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2}. \quad (7.83)$$

### 7.11.2 POTENZIALE ELETTRICO DI UNA SFERA CARICA ELETTRICA.

È possibile dimostrare che il potenziale elettrico ad una distanza  $r$  dal centro di una sfera di raggio  $R$  su cui si trovi la carica elettrica  $Q$  è:

$$\phi(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r}. \quad (7.84)$$

In particolare i punti sulla superficie della sfera si trovano al potenziale

$$\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R}. \quad (7.85)$$

Per una dimostrazione basta considerare una carica elettrica elementare che si muova dal punto  $A$  al punto  $B$  distanti rispettivamente  $r_A$  ed  $r_B$  dal centro della distribuzione sferica; in tal modo utilizzando l'equazione (7.81) in cui si sostituisca per  $E(r)$  l'espressione (7.30), si ottiene

$$\Delta\phi_{AB} = \phi_B - \phi_A = - \int_{r_A}^{r_B} E(r) dr = - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_{r_A}^{r_B} \frac{dr}{r^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A} \right); \quad (7.86)$$

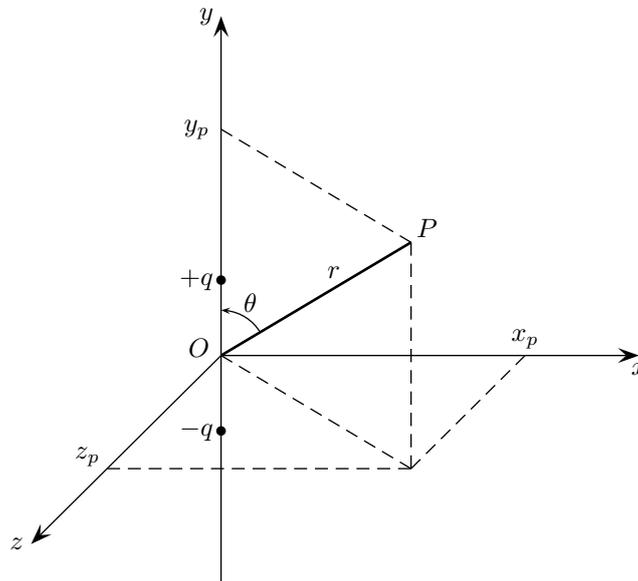
quindi si può identificare

$$\phi(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r}. \quad (7.87)$$

Si osservi che il potenziale elettrico della sfera di carica elettrica  $Q$  è identico a quello di una carica elettrica elementare  $Q$  posta nel centro della sfera.

### 7.11.3 POTENZIALE ELETTRICO DI UN DIPOLO.

Si consideri un dipolo costituito da due cariche elettriche  $q$  uguali ed opposte poste ad una distanza fissata  $2d$ . Si vuole determinare il potenziale in un punto  $P$  di coordinate  $(x, y, z)$ . Si scelga un sistema di tre assi cartesiani centrati nel punto medio del dipolo, in modo che le due cariche elettriche del dipolo si trovino sull'asse  $y$  in modo che la carica elettrica positiva  $+q$  abbia coordinate  $(0, d, 0)$  e la carica elettrica negativa  $-q$  abbia coordinate  $(0, -d, 0)$ .



**Figura 7.31:** Il calcolo del potenziale elettrico di un dipolo in  $P$ .

Il potenziale è quindi la somma dei potenziali dovuti alle due cariche elettriche:

$$\phi(P) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{1}{\sqrt{x^2 + (y-d)^2 + z^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2 + (y+d)^2 + z^2}} \right]. \quad (7.88)$$

Se considero l'approssimazione dipolare, cioè se suppongo che la distanza di  $P$  dalle cariche elettriche sia molto maggiore della distanza fra le cariche elettriche, cioè se  $y \gg d$ , è possibile trascurare i termini proporzionali a  $d^2$  e quindi porre  $(y \pm d)^2 \simeq y^2 \pm 2yd$ , e quindi

$$x^2 + (y \pm d)^2 + z^2 \simeq x^2 + y^2 + z^2 \pm 2yd = r^2 \pm 2yd = r^2 \left( 1 \pm 2 \frac{yd}{r^2} \right). \quad (7.89)$$

Così il potenziale diventa

$$\phi(P) \simeq \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r\sqrt{1 - 2\frac{yd}{r^2}}} - \frac{1}{r\sqrt{1 + 2\frac{yd}{r^2}}} \right). \quad (7.90)$$

Osservando ora che vale  $r \gg d$  si può scrivere (si veda la nota 4 alla sezione 2.12)

$$\frac{1}{\sqrt{1 \pm 2\frac{yd}{r^2}}} = \left( 1 \pm 2\frac{yd}{r^2} \right)^{-1/2} \simeq \left( 1 \mp \frac{yd}{r^2} \right); \quad (7.91)$$

e quindi il potenziale in  $P$  diviene

$$\phi(P) \simeq \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \left( 1 + \frac{yd}{r^2} - 1 + \frac{yd}{r^2} \right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{y}{r^3} q 2d, \quad (7.92)$$

che, riconoscendo in  $q 2d$  il modulo del momento  $p$  del dipolo, si può riscrivere

$$\phi(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{yp}{r^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p}{r^2} \cos\theta = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{r^3}. \quad (7.93)$$

Si vede quindi che il potenziale elettrico di un dipolo dipende dall'inverso del quadrato della distanza.

Utilizzando l'equazione (7.80), è possibile ricavare l'equazione per la componente radiale del campo elettrico generato dal dipolo in  $P$ ; vale infatti

$$E_r = -\frac{d\phi}{dr} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2p \cos\theta}{r^3}. \quad (7.94)$$

Si osservi che per  $\theta = 0$  cioè sui punti dell'asse del dipolo vale

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2p}{r^3}, \quad (7.95)$$

e per  $\theta = \pi/2$ , cioè sul piano perpendicolare all'asse del dipolo, la componente radiale del campo elettrico è nulla, in accordo con quanto trovato precedentemente.

#### 7.11.4 APPROSSIMAZIONE DIPOLARE.

Si consideri una distribuzione arbitraria di cariche elettriche elementari che si trovino in una regione limitata di spazio e si voglia determinare il potenziale generato da una tale distribuzione a distanza elevata rispetto alle dimensioni della regione in cui si trovano le cariche elettriche. Più precisamente si considerino le cariche elettriche elementari  $q_1, \dots, q_N$  che si trovino, rispetto ad un prefissato sistema di riferimento, in posizioni individuate dai vettori  $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N$  e si voglia determinare il potenziale generato dalle cariche elettriche in un punto  $P$  individuato dal vettore  $\mathbf{R}$  tale che il suo modulo sia maggiore dei moduli di tutti i vettori  $\mathbf{x}_i$ , sia cioè

$$R \gg x_i \quad i = 1, \dots, N. \quad (7.96)$$

Se inoltre si indica con  $r_i$  le distanze di  $P$  dalle cariche elettriche elementari il potenziale in  $P$  è dato da

$$\phi(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{r_i}. \quad (7.97)$$

Ora si osservi che, nell'approssimazione (7.96), è sensato porre  $r_i \simeq R$  e quindi il potenziale in  $P$  diventa

$$\phi(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{R} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{R} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R}, \quad (7.98)$$

ove con  $Q = q_1 + \dots + q_N$  si è indicata la carica elettrica totale presente. Quindi vista da sufficientemente lontano una distribuzione arbitraria di cariche elettriche genera lo stesso potenziale che genererebbe un'unica carica elettrica elementare uguale alla carica elettrica totale della distribuzione.

Si osservi però che l'approssimazione fatta non è soddisfacente nel caso in cui la distribuzione arbitraria abbia carica elettrica totale nulla, risulterebbe infatti potenziale nullo. Occorre quindi migliorare l'approssimazione. Conviene a tal fine approssimare il modulo del vettore  $\mathbf{r}_i = \mathbf{R} - \mathbf{x}_i$  nel modo seguente

$$r_i \simeq R - x_i \cos \theta_i = R - \frac{\mathbf{R} \cdot \mathbf{x}_i}{R}, \quad (7.99)$$

e quindi

$$\frac{1}{r_i} = \frac{1}{R - \frac{\mathbf{R} \cdot \mathbf{x}_i}{R}} = \frac{1}{R} \frac{1}{1 - \frac{\mathbf{R} \cdot \mathbf{x}_i}{R^2}} \simeq \frac{1}{R} \left( 1 + \frac{\mathbf{R} \cdot \mathbf{x}_i}{R^2} \right) = \frac{1}{R} + \frac{\mathbf{R} \cdot \mathbf{x}_i}{R^3}, \quad (7.100)$$

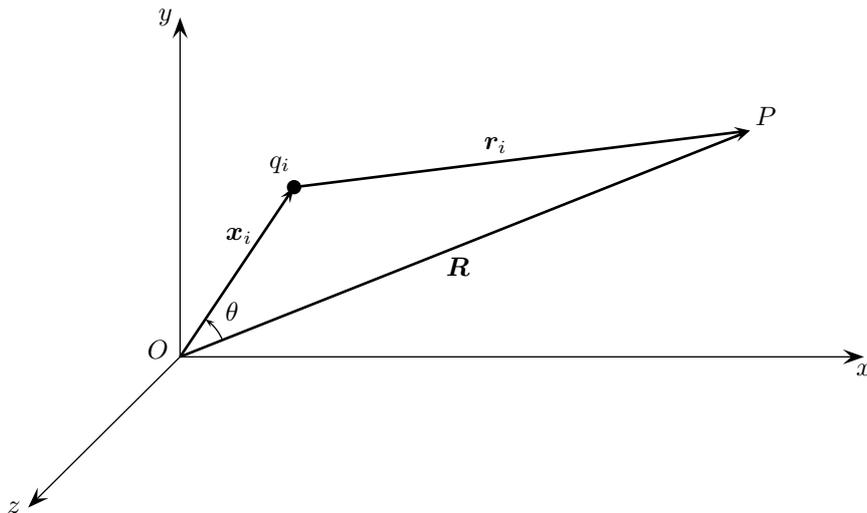
ove è stata usata l'approssimazione di cui alla nota 4 della sezione 2.12. Quindi il potenziale in  $P$  può essere scritto nella forma

$$\phi(P) \simeq \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{Q}{R} + \sum_{i=1}^N q_i \frac{\mathbf{R} \cdot \mathbf{x}_i}{R^3} \right), \quad (7.101)$$

che, se  $Q = 0$  e definendo  $\mathbf{p} = \sum_{i=1}^N q_i \mathbf{x}_i$ , diviene

$$\phi(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{R}}{R^3}. \quad (7.102)$$

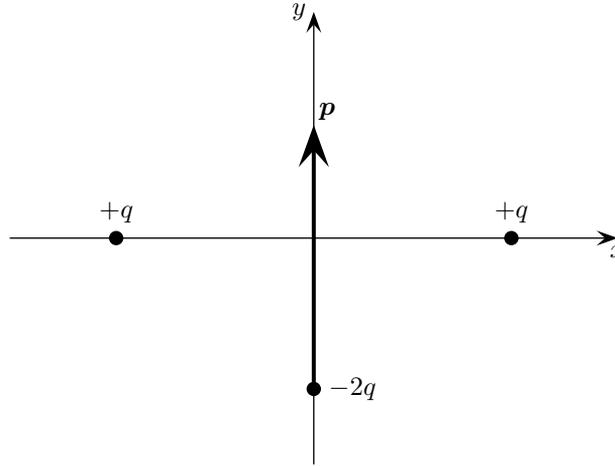
che è il potenziale di un dipolo di momento dipolare  $\mathbf{p}$ .



**Figura 7.32:** L'approssimazione dipolare.

Quindi una distribuzione arbitraria di cariche elettriche la cui somma totale sia zero, vista da lontano si comporta come un dipolo. Questa approssimazione dipolare diviene importante nella comprensione del comportamento di molti fenomeni. Per esempio nella comprensione della ben

nota natura dipolare della molecola d'acqua. In essa infatti la distribuzione di carica elettrica è alquanto complicata ma la carica elettrica totale è nulla e l'approssimazione dipolare qui descritta fornisce il modello adatto a capire il comportamento elettrico dell'acqua.



**Figura 7.33:** Un modello per la molecola d'acqua.

Si schematizzi la molecola d'acqua mediante due cariche elettriche positive  $q$  poste rispetto ad un sistema di assi cartesiani nei punti  $(-a, 0)$  ed  $(a, 0)$ , che rappresentano i due atomi di idrogeno, ed una carica elettrica negativa  $-2q$  posta nel punto  $(0, -b)$ , rappresentante l'atomo di ossigeno. Usando la definizione data sopra di momento dipolare, si trova

$$p_x = -qa + qa = 0 \quad , \quad p_y = 2qb \quad , \quad (7.103)$$

quindi l'acqua, se vista da abbastanza lontano e quindi praticamente per tutte le applicazioni che non riguardino fenomeni rilevanti a dimensioni minori di quelle molecolari, la molecola dell'acqua si comporta come un dipolo con momento dipolare diretto dall'ossigeno al baricentro degli idrogeni.

#### 7.11.5 IL POTENZIALE DI UN FILO.

Si consideri un filo di lunghezza  $2a$  carico con una carica elettrica  $Q$  uniformemente distribuita con densità lineare  $\lambda$ ; ci si riferisce alla figura già vista per il calcolo del campo elettrico. Un elemento infinitesimo  $ds$  del filo genera nel punto  $P$  di coordinate  $(x, y)$  il potenziale

$$d\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda ds}{[(x-s)^2 + y^2]^{1/2}} \quad , \quad (7.104)$$

che integrato fra  $-a$  e  $a$  dà

$$\phi = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_{-a}^a \frac{ds}{[(x-s)^2 + y^2]^{1/2}} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \log \frac{x+a + [(x+a)^2 + y^2]^{1/2}}{x-a + [(x-a)^2 + y^2]^{1/2}} \quad . \quad (7.105)$$

#### 7.11.6 IL POTENZIALE ELETTRICO DI UN ANELLO.

Si consideri un anello di raggio  $R$  e sezione trascurabile su cui si trovi la carica elettrica  $Q$  distribuita uniformemente con densità lineare costante  $\lambda$ . Si vuole calcolare il potenziale elettrico in un generico punto dell'asse dell'anello. Con riferimento alla figura già vista per il calcolo del campo elettrico, l'elemento infinitesimo  $ds$  dell'anello genera in  $P$  il potenziale

$$d\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda ds}{\sqrt{x^2 + R^2}} \quad , \quad (7.106)$$

che integrato lungo tutto il filo dà

$$\phi = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{x^2 + R^2}} \int_0^{2\pi R} ds = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{x^2 + R^2}} 2\pi R = \frac{\lambda}{2\epsilon_0} \frac{R}{\sqrt{x^2 + R^2}} = \frac{\lambda}{2\epsilon_0} \text{sen } \theta . \quad (7.107)$$

Derivando rispetto a  $x$  si ottiene

$$E_x = -\frac{d\phi}{dx} = \frac{\lambda R}{2\epsilon_0} \frac{x}{(x^2 + R^2)^{3/2}} , \quad (7.108)$$

in accordo con l'equazione (7.58).

## 7.12 ENERGIA POTENZIALE ELETTROSTATICA.

Si considerino ora  $N$  cariche elettriche elementari che si trovino in una configurazione statica e non interagente, si supponga cioè che si trovino ferme a distanza reciproca infinita. Si vuole calcolare il lavoro necessario a portare le  $N$  cariche elettriche ad una data distanza reciproca finita. Per portare la prima carica elettrica  $q_1$  dall'infinito (mentre tutte le altre cariche elettriche sono ancora a distanza infinita) si compie un lavoro nullo, quindi

$$\mathcal{L}_1 = 0 . \quad (7.109)$$

Per portare la seconda carica elettrica  $q_2$  fino ad una distanza  $r_{12}$  da  $q_1$  si compie il lavoro (si osservi che il lavoro compiuto da forza esterne è l'opposto del lavoro compiuto dalle forze elettrostatiche e quindi  $\mathcal{L} = q\Delta\phi$ )

$$\mathcal{L}_2 = q_2[\phi(r_{12}) - \phi(\infty)] = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_{12}} . \quad (7.110)$$

Per portare la terza carica elettrica  $q_3$  a distanze  $r_{13}$  da  $q_1$  e  $r_{23}$  da  $q_2$  si compie il lavoro

$$\mathcal{L}_3 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{q_1 q_3}{r_{13}} + \frac{q_2 q_3}{r_{23}} \right) . \quad (7.111)$$

E così via fino al lavoro necessario per trasportare la  $N$ -esima carica elettrica a distanze  $r_{1N}$  da  $q_1 \dots r_{N-1N}$  da  $q_{N-1}$ :

$$\mathcal{L}_N = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{q_1 q_N}{r_{1N}} + \dots + \frac{q_{N-1} q_N}{r_{N-1N}} \right) . \quad (7.112)$$

Il lavoro totale compiuto dalle forze esterne è quindi la somma degli  $N$  lavori sopra calcolati. Questo lavoro viene interpretato come **energia potenziale elettrostatica** della configurazione costruita. In effetti l'energia fornita al sistema va interpretata come energia accumulata nel sistema. Posso quindi, in modo del tutto generale, scrivere la seguente espressione per l'energia potenziale elettrostatica di  $N$  cariche elettriche

$$W = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i < j} \frac{q_i q_j}{r_{ij}} = \frac{1}{2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i \neq j} \frac{q_i q_j}{r_{ij}} . \quad (7.113)$$

Si osservi che è possibile riscrivere questa relazione nella forma

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N q_i \phi_i , \quad (7.114)$$

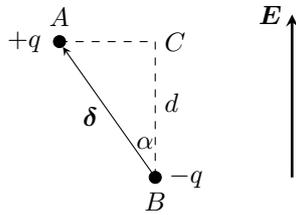
avendo indicato con  $\phi_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{j \neq i} \frac{q_j}{r_{ij}}$  il potenziale elettrico nel punto in cui si trova la  $i$ -esima carica elettrica dovuto alle altre  $N - 1$ .

**7.12.1 ENERGIA ELETTROSTATICA DI UN DIPOLO IN UN CAMPO ELETTRICO COSTANTE.**

Si consideri, come semplice esempio di quanto visto sopra, l'energia elettrostatica di un dipolo elettrico che si trovi in una regione dello spazio fisico in cui vi sia un campo elettrico costante  $\mathbf{E}$ . Si supponga che il dipolo sia disposto in modo che il suo momento formi un angolo  $\alpha$  con la direzione del campo elettrico. Allora applicando l'equazione (7.114), si trova

$$W = q\phi(A) - q\phi(B) = q[\phi(A) - \phi(B)] = q[\phi(C) - \phi(B)] = -qEd = -q\mathbf{E} \cdot \boldsymbol{\delta} = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{E} , \tag{7.115}$$

ove si è usato il fatto che le superfici perpendicolari alla direzione del campo sono superfici equipotenziali, e quindi il potenziale in  $A$  è uguale al potenziale in  $C$ .



**Figura 7.34:** Il dipolo in un campo costante.

**7.13 CIRCUITAZIONE DEL CAMPO ELETTRICO.**

Si è visto che una forza è conservativa se e solo se la sua circuitazione lungo una qualunque curva chiusa è nulla. Ma la forza di Coulomb è conservativa quindi posso scrivere

$$0 = \Gamma_\gamma(\mathbf{F}) = \sum \mathbf{F} \cdot \Delta\boldsymbol{\ell} = q \sum \mathbf{E} \cdot \Delta\boldsymbol{\ell} = q\Gamma_\gamma(\mathbf{E}) = 0 , \tag{7.116}$$

da cui si può dedurre che

*La circuitazione del campo elettrico lungo una qualsiasi curva orientata e chiusa  $\gamma$  è nulla.*

$\Gamma_\gamma(\mathbf{E}) = 0 .$

(7.117)

Come esempi esplicativi, si calcola la circuitazione del campo elettrico lungo una curva chiusa in due casi noti.

**7.13.1 CIRCUITAZIONE DEL CAMPO UNIFORME GENERATO DA UN PIANO.**

Si consideri il campo uniforme generato da un piano indefinito carico positivamente e si voglia calcolare la circuitazione lungo una curva rettangolare con due lati paralleli al piano e due piani perpendicolari. Con riferimento alla figura 7.35, si osservi che il campo è perpendicolare ai lati  $BC$  e  $DA$ , quindi lungo quei tratti la circuitazione è nulla. Lungo il tratto  $MB$  il campo è parallelo ed equiverso alla linea  $\gamma$ , mentre lungo il tratto  $CN = MB$  il campo è parallelo ma opposto alla linea  $\gamma$ . Quindi i due tratti in questione danno contributi uguali e opposti alla circuitazione. Un ragionamento simile vale per i tratti  $ND$  e  $AM$ . Se ne conclude che la circuitazione totale è nulla.

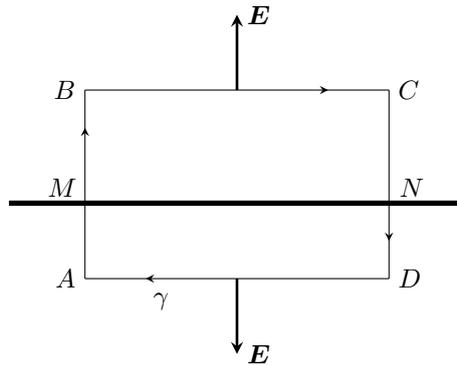


Figura 7.35: Circuitazione del campo elettrico generato da un piano carico.

### 7.13.2 CIRCUITAZIONE DEL CAMPO GENERATO DA UN CARICA ELETTRICA SFERICA.

Si consideri ora il campo generato da una carica elettrica positiva  $Q$  distribuita uniformemente su una sfera e si consideri la circuitazione lungo una curva costituita da due tratti radiali e due tratti concentrici al centro della sfera.

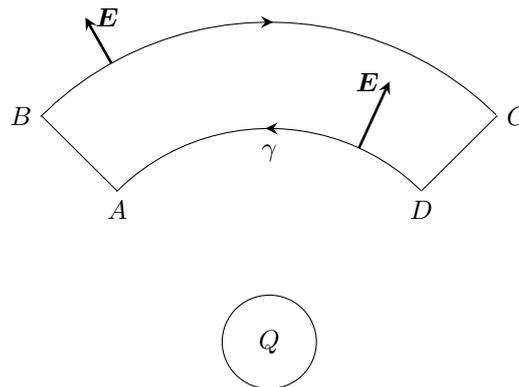


Figura 7.36: Circuitazione del campo elettrico generato da una sfera carica.

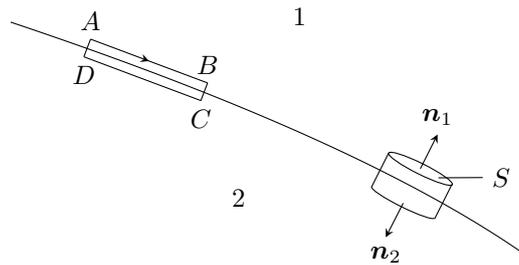
Si osservi che il campo lungo i tratti  $BC$  e  $DA$  è perpendicolare a  $\gamma$ , mentre nei tratti  $AB$  e  $CD$  il campo è parallelo ma su  $AB$  è equiverso mentre su  $CD$  ha verso opposto rispetto all'orientazione di  $\gamma$ . Su questi due tratti, d'altra parte, il campo elettrico assume gli stessi valori, quindi, ancora, la circuitazione è nulla.

### 7.14 DISCONTINUITÀ DEL CAMPO ELETTRICO.

Si supponga che una superficie qualsiasi, su cui si trovi una densità superficiale di carica elettrica  $\sigma$ , divida lo spazio fisico in due regioni 1 e 2. Si vuole qui determinare se e come la superficie carica determina una discontinuità nel campo elettrico presente nello spazio. Si consideri una curva chiusa  $\gamma$  orientata costituita dal rettangolo  $ABCD$  avente il lato  $AB$  nella regione 1 ed il lato  $CD$  nella regione 2, entrambi paralleli alla superficie; siano, inoltre, i lati  $BC$  e  $DA$  infinitesimi; calcolando quindi la circuitazione di  $\mathbf{E}$  lungo  $\gamma$  il lati  $BC$  e  $DA$  danno un contributo trascurabile e si può porre  $\mathbf{CD} = -\mathbf{AB}$ , ottenendo

$$\Gamma_{\gamma}(\mathbf{E}) = \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{AB} + \mathbf{E}_2 \cdot \mathbf{CD} = (\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2) \cdot \mathbf{AB} = 0 ; \quad (7.118)$$

il vettore  $\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2$  quindi non ha componente tangente alla superficie, ossia la superficie carica non genera discontinuità nella componente del campo elettrico tangente alla superficie.



**Figura 7.37:** Discontinuità del campo elettrico attraverso una superficie carica.

Si consideri ora una superficie chiusa cilindrica avente le basi di area  $S$  parallele alla superficie carica e disposte in modo tale che una base stia nella regione 1 e l'altra nella regione 2; l'altezza del cilindro sia, inoltre, infinitesima in modo che la superficie laterale dia un contributo trascurabile al flusso del campo elettrico. Applicando la legge di Gauss alla superficie cilindrica si ottiene dunque

$$\Phi(\mathbf{E}) = \mathbf{E} \cdot \mathbf{n}_1 S + \mathbf{E}_2 \cdot \mathbf{n}_2 S = (\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2) \cdot \mathbf{n}_1 S = \frac{Q}{\epsilon_0}, \quad (7.119)$$

ove  $\mathbf{n}_1$  ed  $\mathbf{n}_2$  sono i vettori unitari perpendicolari alle due basi, per cui vale la relazione  $\mathbf{n}_2 = -\mathbf{n}_1$ , e con  $Q$  la carica elettrica presente all'interno della superficie cilindrica. Si trova pertanto

$$(\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2) \cdot \mathbf{n}_1 = \frac{\sigma}{\epsilon_0}. \quad (7.120)$$

Quindi la superficie carica produce una discontinuità perpendicolare alla superficie pari alla densità di carica elettrica divisa per  $\epsilon_0$ . Si può quindi scrivere

$$\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2 = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \mathbf{n}_1. \quad (7.121)$$

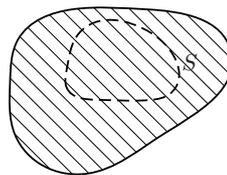
## 7.15 CONDUTTORI.

Si è accennato al fatto che esistono in natura materiali che permettono il passaggio dell'elettricità e che vengono detti **conduttori**. Si è visto che questa proprietà è connessa alla presenza di elettroni di conduzione liberi di muoversi in tutto il metallo. In questo paragrafo vengono analizzate le proprietà dei conduttori in presenza di campi elettrici.

**A.** *Il campo elettrico nei punti interni di un conduttore in equilibrio è sempre nullo.*

Per capirlo basta osservare che se così non fosse ci sarebbe una forza elettrica sugli elettroni di conduzione all'interno del conduttore e quindi il conduttore non potrebbe essere in equilibrio. La posizione di equilibrio che annulla il campo elettrico all'interno del corpo viene raggiunta dagli elettroni di conduzione in tempi brevissimi, dell'ordine di  $10^{-16}$  s.

**B.** *In un corpo conduttore che sia stato caricato le cariche elettriche in eccesso si dispongono sulla superficie esterna del corpo.* Infatti se così non fosse, cioè se ci fosse una carica elettrica all'interno del conduttore, per la legge di Gauss ci sarebbe un flusso elettrico attraverso una qualsiasi superficie chiusa  $S$  che sia *interamente* contenuta nel corpo conduttore; ma ciò è impossibile perché il campo elettrico è nullo in tutti i punti interni al conduttore.



**Figura 7.38:** La superficie chiusa  $S$  interna al conduttore.

- C. Il campo elettrico in ogni punto  $P$  della superficie di un conduttore carico è perpendicolare alla superficie ed ha intensità

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}, \quad (7.122)$$

ove  $\sigma$  è la densità superficiale in  $P$ .

Questo risultato è immediato ove si consideri il risultato trovato sopra circa la discontinuità del campo elettrico attraverso una superficie carica ed il fatto che il campo è nullo all'interno.

- D. La superficie esterna di un materiale conduttore in equilibrio è una superficie equipotenziale. Infatti se la superficie del conduttore non fosse equipotenziale, per un suo punto  $P$  passerebbe una diversa superficie equipotenziale e ad essa sarebbe perpendicolare il campo elettrico in  $P$ ; ma, per il precedente punto C, il campo elettrico è perpendicolare alla superficie in ogni suo punto; il campo elettrico in  $P$  verrebbe quindi ad essere perpendicolare a due superfici diverse, cosa assurda.
- E. Se un conduttore presenta una cavità in cui non siano presenti cariche elettriche, il campo elettrico è nullo nella cavità; inoltre, se il corpo viene caricato, le cariche elettriche si dispongono sulla superficie esterna.

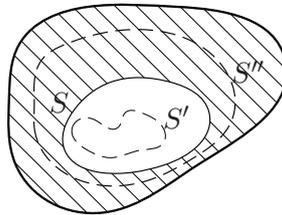


Figura 7.39: Conduttore cavo privo di carica elettrica nella cavità.

Infatti se ci fosse campo nella cavità sarebbe possibile considerare una superficie chiusa  $S'$  (si veda la figura 7.39) interamente contenuta nella cavità attraverso cui il flusso del campo elettrico sia non nullo, ma ciò implicherebbe, per la legge di Gauss, la presenza di carica elettrica nella cavità. Se il corpo conduttore viene caricato le cariche elettriche non possono disporsi sulla superficie  $S$  della cavità perché il campo elettrico all'interno del corpo è nullo e quindi ha flusso nullo attraverso una superficie  $S''$  che si trovi tutta all'interno del conduttore. Quindi la carica elettrica posta sul conduttore non può che disporsi sulla superficie esterna.

- F. Se un conduttore presenta una cavità in cui sia presente una carica elettrica  $Q$ , all'interno della cavità è presente un campo elettrico in accordo con la legge di Gauss e sulla superficie della cavità vengono a disporsi delle cariche elettriche tali che loro somma sia uguale ed opposta al valore di  $Q$ . Cariche elettriche uguali ed opposte a queste si dispongono sulla superficie esterna del conduttore: sul conduttore si ha quindi induzione elettrostatica completa.

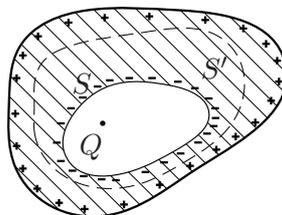
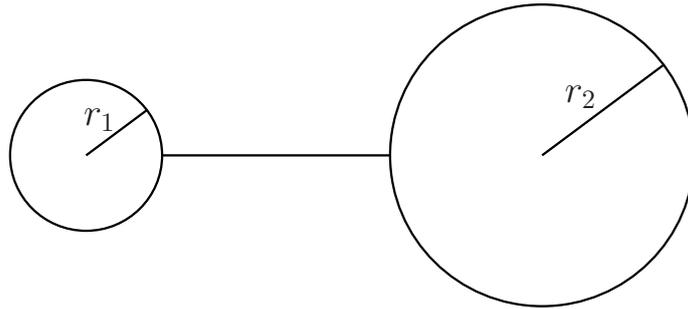


Figura 7.40: Conduttore cavo con carica elettrica  $Q$  nella cavità.

Sia infatti  $+Q$  la carica elettrica, supposta positiva, presente nella cavità e si consideri la legge di Gauss attraverso una superficie chiusa  $S'$  completamente contenuta nel conduttore: poiché il campo elettrico è nullo in tutti i punti di  $S'$  il flusso è nullo e quindi deve essere

nulla la carica elettrica contenuta in  $S'$ ; quindi se nella cavità è contenuta la carica elettrica  $Q$ , sulla superficie  $S$  della cavità deve trovarsi distribuita una carica elettrica  $-Q$ , essa infatti non potendo, per il precedente punto **B**, trovarsi all'interno del conduttore non può che trovarsi su  $S$ . Il conduttore è neutro; quindi a fronte della carica elettrica negativa  $-Q$  che compare sulla superficie interna  $S$  deve comparire una carica elettrica positiva  $+Q$  sulla superficie esterna: vi è quindi induzione completa. La carica elettrica positiva sulla superficie esterna genera un campo elettrico all'esterno in accordo con la legge di Gauss.

- G.** In un conduttore carico in equilibrio le cariche elettriche si dispongono sulla superficie esterna in modo che la densità superficiale della carica elettrica in un punto  $P$  sia inversamente proporzionale al raggio di curvatura della superficie in  $P$ .



**Figura 7.41:** La proprietà delle punte.

Per dimostrarlo si consideri un corpo conduttore costituito da due sfere di raggi  $r_1$  ed  $r_2$ , con  $r_1 < r_2$ , collegate con un filo conduttore. La superficie esterna del conduttore così costituito è equipotenziale, quindi il potenziale sulle due superfici sferiche è il medesimo. Quindi se sul conduttore viene depositata la carica elettrica  $Q$  sulle due superfici sferiche vengono a depositarsi le due cariche elettriche  $q_1$  e  $q_2$  tali che  $Q = q_1 + q_2$  e, ricordando la (7.84),

$$\phi(r_1) = \phi(r_2) \quad \longrightarrow \quad \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{r_1} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_2}{r_2} \quad \longrightarrow \quad \frac{q_1}{r_1} = \frac{q_2}{r_2}; \quad (7.123)$$

si osservi però che valgono  $q_1 = 4\pi r_1^2 \sigma_1$  e  $q_2 = 4\pi r_2^2 \sigma_2$  e quindi la precedente equazione diventa

$$4\pi r_1 \sigma_1 = 4\pi r_2 \sigma_2 \quad \longrightarrow \quad \frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{r_2}{r_1}, \quad (7.124)$$

che è quanto si doveva dimostrare.

### Osservazioni

1. La proprietà **A** può essere considerata una definizione di corpo conduttore: un conduttore è un corpo all'interno del quale il campo elettrico è nullo.
2. Le proprietà **E** ed **F** giustificano il nome di *schermo elettrostatico* dato ad un conduttore che racchiude una regione di spazio; infatti per la **E** un campo elettrico presente all'esterno non viene sentito nella cavità, mentre per la **F** un campo all'interno della cavità non viene sentito all'esterno.
3. La proprietà **G** ha come immediata conseguenza che il campo elettrico nei punti in cui la curvatura della superficie del conduttore è più accentuata è maggiore che negli altri punti. Questa proprietà è nota con il nome di *proprietà delle punte* in quanto dove il conduttore presenta una punta la curvatura è estremamente accentuata e quindi il campo elettrico è ivi molto intenso. Su questa proprietà si fonda il principio di funzionamento dei parafulmini; questi infatti non sono che punte conduttrici collegate a terra: al passaggio di una nuvola in cui si trovi un'alta concentrazione di carica elettrica, nel parafulmine avviene il fenomeno

di induzione elettrostatica e sulla punta si concentra una alta densità di carica elettrica opposta e quindi un campo elettrico intenso. Questo aumenta sensibilmente la probabilità che la scarica dalla nuvola vada a finire sul parafulmine.

## 7.16 CAPACITÀ.

Si consideri un corpo conduttore su cui sia stata deposta la carica elettrica  $Q$ ; i punti della sua superficie si trovano tutti allo stesso potenziale  $\phi$ . Tale potenziale dipende evidentemente dalla carica elettrica  $Q$ : se  $Q = 0$  vale  $\phi = 0$ ; aumentando la carica elettrica sul conduttore aumenta il suo potenziale. Questo potenziale, come si è visto sopra, è uguale al lavoro per unità di carica elettrica compiuto per caricare il corpo. Per il principio di sovrapposizione il lavoro compiuto è proporzionale alla carica elettrica; infatti si supponga di conoscere il lavoro per portare una certa carica elettrica su un corpo, raddoppiando la carica elettrica raddoppiano i campi e quindi raddoppia il lavoro. E quindi raddoppia il potenziale. Se ne conclude che il potenziale di un corpo è proporzionale alla carica elettrica che si trova su di esso e la costante di proporzionalità può dipendere solo dalle caratteristiche geometriche del corpo. Si definisce **capacità elettrica**  $C$  di un conduttore tale costante di proporzionalità:

$$Q = C\phi . \quad (7.125)$$

Quanto più alta è la capacità tanto più è possibile caricare un conduttore tenendo basso il suo potenziale. L'unità di misura della capacità è coulomb/volt, che è nota col nome di *farad*, dal nome di Faraday<sup>17</sup>. Ha la capacità di un farad il conduttore che se caricato con un coulomb si trova al potenziale di un volt.

Se sono presenti molti conduttori avviene induzione elettrica reciproca e quindi la carica elettrica ed il potenziale di ciascuno dei corpi dipende dalla presenza e dalla carica elettrica degli altri. È possibile mostrare ove siano presenti  $N$  conduttori la carica elettrica sull' $i$ -esimo può esser scritta nella forma

$$Q_i = \sum_{j=1}^N C_{ij}\phi_j . \quad (7.126)$$

ove i coefficienti  $C_{ii}$  si dicono coefficienti di capacità ed i coefficienti  $C_{ij}$ , con  $i \neq j$  si dicono coefficienti di induzione. Tutti questi coefficienti dipendono solo dalla geometria dei corpi e dalla loro posizione reciproca.

### 7.16.1 CAPACITÀ DI UN CONDUTTORE SFERICO.

Si consideri ora una sfera conduttrice di raggio  $R$  su cui si trovi la carica elettrica  $Q$ , ricordando l'equazione (7.85), che dà il potenziale elettrico nei punti della superficie di una sfera carica, si trova

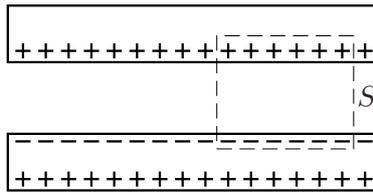
$$Q = 4\pi\epsilon_0 R\phi \quad \longrightarrow \quad C = 4\pi\epsilon_0 R , \quad (7.127)$$

che, come si vede, dipende solo dal raggio della sfera.

## 7.17 CONDENSATORI.

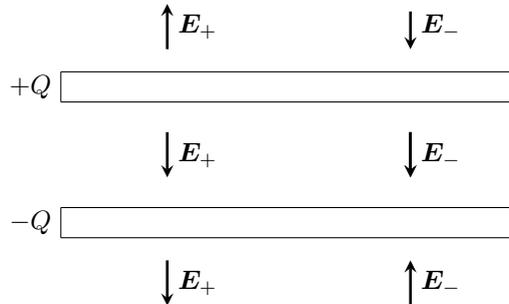
Si definisce **condensatore** un dispositivo costituito da due conduttori, detti *armature*, tra i quali esiste *induzione elettrostatica completa*, cioè tale che le linee di campo originantesi sulla superficie del conduttore carico positivamente vadano tutte a finire sul conduttore carico negativamente. Si considerino, ad esempio due lastre conduttrici di area  $A$  disposte parallele ad una distanza  $d$  e si suppongano inizialmente scariche. Se ora su una delle due lastre, quella superiore, viene depositata la carica elettrica positiva  $Q$  questa produce una separazione di cariche elettriche sull'altra lastra in modo che sulle due superfici affacciate delle lastre si abbia la stessa carica elettrica. Per rendersi conto di ciò si consideri una superficie chiusa  $S$  costituita da un parallelepipedo con le

<sup>17</sup> Micheal Faraday (1791-1867), fisico sperimentale inglese.



**Figura 7.42:** Induzione completa in un condensatore piano.

basi parallele ed interne alle armature del condensatore e le facce laterali ad esse perpendicolari. Il flusso del campo elettrico attraverso  $S$  è nullo infatti il campo elettrico è parallelo alle facce laterali ed è nullo dove si trovano le basi. Quindi, per la legge di Gauss, la carica elettrica interna ad  $S$  deve essere nulla quindi sull'armatura scarica deve verificarsi una separazione di carica elettrica per induzione tale da avere sulla superficie interna del condensatore una carica elettrica negativa uguale a quella presente sull'armatura carica. Quindi ogni linea di campo che parte da una carica elettrica positiva sull'armatura superiore va a finire su una carica elettrica negativa sull'armatura inferiore. Vi è quindi induzione completa. La carica elettrica positiva sulla superficie inferiore dell'armatura inferiore può eventualmente essere rimossa collegandola a terra. In tal modo sulle due armature risultano presenti cariche elettriche uguali ed opposte.



**Figura 7.43:** Il campo elettrico di un condensatore piano.

Quello descritto si dice *condensatore piano*. È stato calcolato sopra il campo elettrico prodotto da un piano carico. Nell'approssimazione in cui il piano può essere considerato infinito (che si suppone valida in tutto ciò che segue), le due armature generano due campi elettrici di modulo uguale di direzione perpendicolare alle superfici delle armature e aventi lo stesso verso all'interno del condensatore e versi opposti all'esterno come si vede in figura 7.43, ove  $\mathbf{E}_+$  è il campo generato dall'armatura positiva ed  $\mathbf{E}_-$  quello generato dall'armatura negativa. Il campo interno al condensatore piano è quindi dato dalla somma dei campi generati dalle due armature. All'interno, fra le due armature, è uniforme con direzione perpendicolare alle superfici delle armature e verso dall'armatura positiva alla negativa; il suo modulo, ricordando quindi l'equazione (7.43), vale

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}, \quad (7.128)$$

ove  $\sigma$  indica la densità di carica elettrica sulle due armature. Nelle regioni esterne alle due armature i campi elettrici generati dai due piani carichi sono uguali ed opposti, quindi il campo elettrico totale all'esterno del condensatore è nullo. La differenza di potenziale elettrico fra le due armature del condensatore piano si calcola facilmente ricordando che, equazione (7.78), nel caso di campo elettrico costante la differenza di potenziale fra due punti è uguale alla componente del campo elettrico nella direzione del vettore che unisce i due punti per la loro distanza; quindi, nel caso presente,

$$V = Ed. \quad (7.129)$$

Si osservi che vale

$$Q = \sigma A = \epsilon_0 EA = \epsilon_0 \frac{A}{d} V, \quad (7.130)$$

quindi c'è una relazione di proporzionalità fra la carica elettrica sulle armature e la differenza di potenziale fra di esse. La costante di proporzionalità si definisce *capacità* di un condensatore piano:

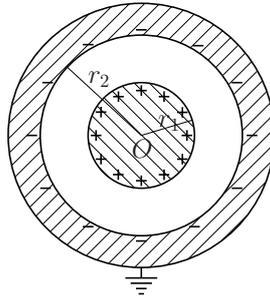
$$C = \epsilon_0 \frac{A}{d}. \quad (7.131)$$

### 7.17.1 CONDENSATORE SFERICO.

Si consideri una sfera conduttrice piena di raggio  $r_1$  circondata da un guscio sferico ad essa concentrico avente raggio interno  $r_2$ , con  $r_1 < r_2$ ; si deponga sulla sfera interna la carica elettrica positiva  $+Q$ ; sul guscio esterno avviene induzione completa con separazione delle cariche elettriche: sulla superficie interna viene a trovarsi la carica elettrica  $-Q$ , mentre sulla superficie esterna viene a trovarsi la carica elettrica  $+Q$ ; quest'ultima viene poi rimossa collegando la superficie esterna a terra. Il campo elettrico fra le due superfici sferiche è quello dovuto alla carica elettrica che si trova sulla sfera interna, mentre all'interno della sfera, all'interno del guscio e nei punti esterni al guscio il campo elettrico è nullo:

$$E(r) = \begin{cases} 0 & \text{se } r < r_1 \\ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} & \text{se } r_1 \leq r \leq r_2 \\ 0 & \text{se } r > r_2. \end{cases} \quad (7.132)$$

Quello descritto si dice *condensatore sferico*. La d.d.p. fra le armature è, com'è noto, pari al lavoro per unità di carica elettrica fatto dal campo elettrico presente fra le armature per portare una carica elettrica di prova  $q$  dall'armatura positiva a quella negativa.



**Figura 7.44:** Il condensatore sferico.

Tale campo dipende solo dalle cariche elettriche che si trovano sull'armatura interna. Così il lavoro. Quindi la d.d.p. si trova usando l'equazione (7.84), con riferimento alla sola sfera interna, vale quindi

$$V = \phi(r_1) - \phi(r_2) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r_1} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r_2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2}, \quad (7.133)$$

da cui si può dedurre l'espressione della capacità:

$$C = 4\pi\epsilon_0 \frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1}. \quad (7.134)$$

Il calcolo sopra presentato diventa immediato ove per il calcolo della differenza di potenziale fra le armature si utilizzi la formula (7.81); vale infatti

$$V = \phi(r_1) - \phi(r_2) = \int_{r_1}^{r_2} E(r) dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right). \quad (7.135)$$

### 7.17.2 CONDENSATORE CILINDRICO.

Si consideri un cilindro pieno conduttore di raggio  $r_1$  e altezza  $\ell$  circondato da un guscio cilindrico coassiale di raggio interno  $r_2$ , con  $r_2 > r_1$ .

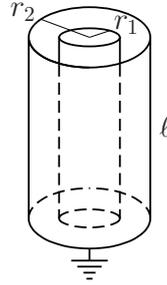


Figura 7.45: Il condensatore cilindrico.

Si deponga sul cilindro interno la carica elettrica positiva  $+Q$ , sul guscio esterno si ha induzione completa con separazione delle cariche elettriche; le cariche elettriche positive che vengono a trovarsi sulla superficie esterna del guscio esterno vengono rimosse collegando la superficie a terra. Si ottiene così un *condensatore cilindrico*. Il campo elettrico che viene a crearsi è nullo ovunque tranne che nello spazio vuoto fra il cilindro interno ed il guscio esterno; tale campo elettrico ha simmetria cilindrica essendo in ogni punto perpendicolare all'asse del cilindro. Il suo modulo può essere calcolato mediante la legge di Gauss in modo analogo a quanto fatto per il calcolo del campo elettrico generato da un filo carico; il risultato è

$$E(r) = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0\ell} \frac{1}{r}. \quad (7.136)$$

Per determinare la differenza di potenziale utilizzo la (7.81):

$$V = \phi(r_1) - \phi(r_2) = \int_{r_1}^{r_2} E(r) dr = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0\ell} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r} = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0\ell} \log \frac{r_2}{r_1}, \quad (7.137)$$

e quindi la capacità di un condensatore cilindrico è

$$C = 2\pi\epsilon_0 \frac{\ell}{\log \frac{r_2}{r_1}}. \quad (7.138)$$

### 7.17.3 ENERGIA ELETTROSTATICA ACCUMULATA IN UN CONDENSATORE.

Per caricare un condensatore è necessario del lavoro esterno. Il lavoro compiuto rimane come energia potenziale elettrostatica accumulata nel condensatore. Si può dimostrare che tale energia è

$$W = \frac{Q^2}{2C} = \frac{1}{2} QV = \frac{1}{2} CV^2. \quad (7.139)$$

Per una dimostrazione si consideri il condensatore il fase di carica. Si supponga di portare una porzione infinitesima  $dq$  di carica elettrica dall'armatura negativa all'armatura positiva sulle quali si trovi già la carica elettrica  $+q$  e  $-q$  e che si trovano quindi alla d.d.p.  $V = q/C$ , il lavoro necessario è  $d\mathcal{L} = Vdq$ . Per ottenere il lavoro totale, e quindi l'energia elettrostatica accumulata, per caricare il condensatore fino alla carica elettrica  $Q$  occorre integrare:

$$W = \int_0^Q V(q) dq = \frac{1}{C} \int_0^Q q dq = \frac{Q^2}{2C}. \quad (7.140)$$

che è quando si doveva mostrare.

Si osservi che per un condensatore piano vale

$$W = \frac{1}{2} CV^2 = \frac{1}{2} \epsilon_0 \frac{A}{d} V^2 = \frac{1}{2} \epsilon_0 \frac{V^2}{d^2} Ad = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 Ad; \quad (7.141)$$

ma  $Ad$  è il volume all'interno del condensatore piano. Quindi l'energia elettrostatica per unità di volume, o **densità di energia elettrica** dentro un condensatore piano può essere scritta nella forma

$$w_E = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 . \quad (7.142)$$

Si lascia al lettore studioso la verifica (che richiede le tecniche dell'analisi) che un'identica espressione vale per i condensatori sferico e cilindrico. In effetti, l'espressione ha validità generale. Nei punti dello spazio in cui sia presente un campo elettrico  $\mathbf{E}$ , è presente una densità di energia elettrostatica data dalla (7.142).

#### 7.17.4 FORZA FRA LE ARMATURE DI UN CONDENSATORE.

Si vuole in questo paragrafo calcolare l'espressione della forza di attrazione elettrostatica presente fra le armature di un condensatore. A tal fine, si osservi che l'energia potenziale elettrostatica di un condensatore è uguale al lavoro fatto dalle forze esterne per avvicinare le cariche elettriche fino alla configurazione data e quindi è l'opposto del lavoro fatto dalle forze del campo elettrico; pertanto la variazione di energia potenziale elettrostatica per uno spostamento infinitesimo  $dr$  delle armature del condensatore, ricordando l'equazione (7.79), si può scrivere nella forma

$$dW = -d\mathcal{L} = -qE_r dr = -F_r dr , \quad (7.143)$$

e quindi

$$F_r = -\frac{dW}{dr} , \quad (7.144)$$

cioè la componente della forza elettrostatica nella direzione  $r$  è l'opposto della derivata dell'energia potenziale elettrostatica rispetto a  $r$ .

Vale allora

$$F_r = -\frac{dW}{dC} \frac{dC}{dr} = \frac{Q^2}{2C^2} \frac{dC}{dr} . \quad (7.145)$$

Si analizzino ora separatamente i casi del condensatore piano, sferico e cilindrico.

##### A. Condensatore piano.

Indicando con  $r$  la distanza fra le armature, vale

$$C(r) = \epsilon_0 \frac{A}{r} , \quad (7.146)$$

da cui

$$\frac{dC}{dr} = -\epsilon_0 \frac{A}{r^2} \quad (7.147)$$

e quindi la forza sull'armatura che dista  $d$  vale

$$F_r(d) = -\frac{Q^2}{2C^2} \epsilon_0 \frac{A}{d^2} = -\frac{Q^2}{2\epsilon_0 A} . \quad (7.148)$$

in accordo con la relazione già trovata precedentemente, equazione (7.48).

##### B. Condensatore sferico.

Indicando con  $r_1$  il raggio dell'armatura interna e con  $r$  quello dell'armatura esterna, vale

$$C(r) = 4\pi\epsilon_0 \frac{r_1 r}{r - r_1} , \quad (7.149)$$

da cui

$$\frac{dC}{dr} = -4\pi\epsilon_0 \frac{r_1^2}{(r - r_1)^2} \quad (7.150)$$

e quindi la forza sull'armatura esterna di raggio  $r_2$  è

$$F_r(r_2) = -\frac{Q^2}{2C^2} 4\pi\epsilon_0 \frac{r_1^2}{(r_2 - r_1)^2} = -\frac{Q^2}{2 \cdot 4\pi\epsilon_0 r_2^2} = -\frac{Q^2}{2\epsilon_0 A} , \quad (7.151)$$

ove  $A$  è qui l'area della superficie interna dell'armatura esterna.

**C. Condensatore cilindrico.**

Indicando con  $r_1$  il raggio dell'armatura interna, con  $r$  quello dell'armatura esterna e con  $\ell$  l'altezza del cilindro, vale

$$C(r) = 2\pi\epsilon_0 \frac{\ell}{\log r - \log r_1} , \quad (7.152)$$

da cui

$$\frac{dC}{dr} = -2\pi\epsilon_0 \frac{\ell}{r} \frac{1}{(\log r - \log r_1)^2} \quad (7.153)$$

e quindi la forza sull'armatura esterna di raggio  $r_2$  è

$$F_r(r_2) = -\frac{Q^2}{2C^2} 2\pi\epsilon_0 \frac{\ell}{r} \frac{1}{(\log r - \log r_1)^2} = -\frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 \ell r} = -\frac{Q^2}{2\epsilon_0 A} , \quad (7.154)$$

ove  $A$  è l'area della superficie laterale interna del guscio cilindrico esterno.

Nei tre casi il segno meno sta ad indicare che la forza ha verso opposto di quello lungo cui aumenta  $dr$ ; si tratta cioè di una forza di attrazione. Si osservi che nei tre casi ho trovato la medesima espressione formale per la forza di attrazione, essendo  $A$  l'area della superficie su cui agisce la forza. Quindi, dividendo la forza per tale area, si trova la pressione elettrostatica sulle armature:

$$p = \frac{F}{A} = \frac{Q^2}{2\epsilon_0 A^2} = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} , \quad (7.155)$$

ove  $\sigma$  è la densità superficiale di carica elettrica.

Si osservi inoltre che per il condensatore piano posso scrivere il modulo della forza nella forma

$$F_r(d) = \frac{1}{2} Q \frac{\sigma}{\epsilon_0} = \frac{1}{2} QE . \quad (7.156)$$

Per il condensatore sferico posso scrivere il modulo della forza nella forma

$$F_r(r_2) = \frac{1}{2} Q \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r_2^2} = \frac{1}{2} QE . \quad (7.157)$$

Per il condensatore cilindrico posso scrivere il modulo della forza nella forma

$$F_r(r_2) = \frac{1}{2} Q \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 \ell r_2} = \frac{1}{2} QE . \quad (7.158)$$

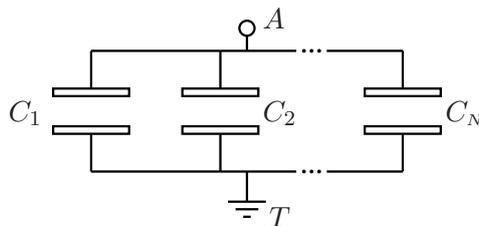
Dunque nei tre casi ancora la stessa espressione formale.

## 7.18 COLLEGAMENTO DI PIÙ CONDENSATORI.

Collegando più condensatori di capacità diverse si ottengono dispositivi che sono ancora dei condensatori, di cui, in questa sezione, vengono analizzate le proprietà.

### 7.18.1 COLLEGAMENTO IN PARALLELO.

$N$  condensatori si dicono collegati *in parallelo* se ai capi di ognuno si trova la stessa differenza di potenziale. Si considerino quindi  $N$  condensatori di capacità  $C_1 \dots C_N$  collegati come in figura 7.46 e si ponga in  $A$  la carica elettrica  $Q$ .



**Figura 7.46:** Collegamento di condensatori in parallelo.

La carica elettrica si distribuisce su tutti gli  $N$  condensatori e, per induzione sulle armature

opposte appare una carica elettrica totale  $-Q$ , anch'essa distribuita su tutti i condensatori. Ai capi degli  $N$  condensatori appare la stessa differenza di potenziale  $V$ . Valgono quindi le relazioni

$$Q = Q_1 + \dots + Q_N = C_1 V + \dots + C_N V = (C_1 + \dots + C_N) V = CV . \quad (7.159)$$

Quindi  $N$  condensatori in parallelo si comportano come un unico condensatore la cui capacità sia la somma delle capacità dei singoli condensatori costituenti:

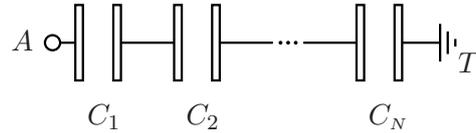
$$C = C_1 + \dots + C_N . \quad (7.160)$$

Andando a calcolare l'energia accumulata negli  $N$  condensatori in parallelo si trova

$$W = \frac{1}{2} C_1 V^2 + \dots + \frac{1}{2} C_N V^2 = \frac{1}{2} CV^2 = \frac{1}{2} QV = \frac{Q^2}{2C} . \quad (7.161)$$

### 7.18.2 COLLEGAMENTO IN SERIE.

$N$  condensatori si dicono collegati *in serie* se su ciascuno di loro si presenta, per induzione, la stessa carica elettrica. Si considerino quindi  $N$  condensatori di capacità  $C_1 \dots C_N$  collegati come in figura 7.47 e si ponga in  $A$  la carica elettrica  $Q$ .



**Figura 7.47:** Collegamento di condensatori in serie.

Gli  $N$  condensatori si inducono l'un l'altro la medesima carica elettrica  $Q$  e alla fine tra il primo e l'ultimo si misura la differenza di potenziale  $V$  data da

$$V = V_1 + \dots + V_N = \frac{Q}{C_1} + \dots + \frac{Q}{C_N} = Q \left( \frac{1}{C_1} + \dots + \frac{1}{C_N} \right) = \frac{Q}{C} . \quad (7.162)$$

Quindi  $N$  condensatori collegati in serie si comportano come un unico condensatore il cui inverso della capacità sia la somma degli inversi delle capacità dei singoli condensatori costituenti:

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \dots + \frac{1}{C_N} . \quad (7.163)$$

Andando a calcolare l'energia accumulata negli  $N$  condensatori in serie si trova

$$W = \frac{Q^2}{2C_1} + \dots + \frac{Q^2}{2C_N} = \frac{Q^2}{2C} = \frac{1}{2} QV = \frac{1}{2} CV^2 . \quad (7.164)$$

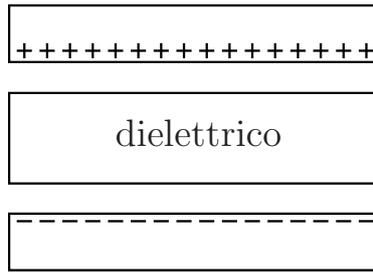
### 7.19 DIELETTRICI.

Si consideri un condensatore, le cui armature di area  $A$  e separate da una distanza  $d$ , siano state caricate con una carica elettrica  $Q$ .

Se all'interno del condensatore c'è il vuoto, è noto che la differenza di potenziale che si misura tra le armature è data da

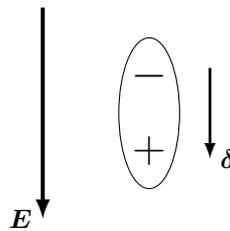
$$V = \frac{Q}{C_0} \quad C_0 = \epsilon_0 \frac{A}{d} . \quad (7.165)$$

Sperimentalmente si osserva che ponendo un materiale isolante, detto anche **dielettrico**, fra le armature, la differenza di potenziale diminuisce e quindi, visto che la carica elettrica  $Q$  depositata sulle armature resta la stessa, la capacità aumenta. Evidentemente una diminuzione del potenziale è segno di una diminuzione del campo elettrico fra le armature. Per la legge di Gauss, la diminuzione del campo elettrico deve essere dovuta ad una diminuzione delle cariche



**Figura 7.48:** Il dielettrico inserito nel condensatore.

elettriche presenti e visto che sulle armature la carica elettrica non è cambiata, il responsabile del cambiamento deve essere il dielettrico; sul dielettrico quindi, in qualche modo da chiarire, devono comparire cariche elettriche di segno opposto a quelle presenti sulle armature in modo che la carica elettrica totale diminuisca. Il modello utilizzato per spiegare questo fenomeno è basato sul concetto di *polarizzazione* degli atomi del dielettrico; in presenza del campo elettrico dovuto alle cariche elettriche sulle armature (che qui viene chiamato campo *esterno* ed denotato con il simbolo  $E_0$ ) gli atomi del dielettrico si deformano ed il baricentro delle cariche elettriche positive viene ad essere diverso da quello delle cariche elettriche negative: in altre parole ciascun atomo diviene un *dipolo elettrico*.



**Figura 7.49:** La formazione di un dipolo atomico.

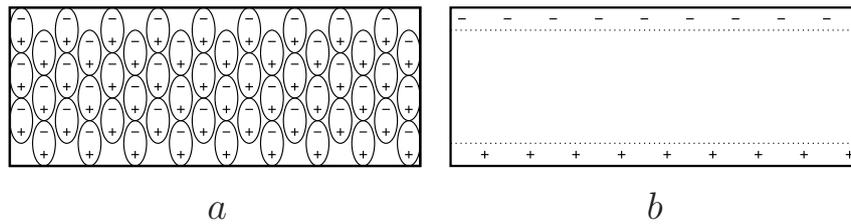
Com'è noto un dipolo elettrico è caratterizzato dal vettore *momento di dipolo* il cui modulo è pari al prodotto del valore delle due cariche elettriche opposte per la loro distanza; quindi, se per ogni atomo si considera il vettore  $\delta$  che unisce i baricentri delle cariche elettriche positive e negative (orientato dalla carica elettrica negativa a quella positiva) e detto  $q$  è il valore assoluto di tali cariche elettriche, è possibile associare ad ogni atomo il momento di dipolo  $\mathbf{p} = q\delta$ . Se nel dielettrico esistono  $n$  atomi per unità di volume, cioè se  $n$  è la densità degli atomi nel dielettrico, si definisce il vettore momento dipolare per unità di volume, detto anche **vettore di polarizzazione**:

$$\mathbf{P} = nq\delta . \quad (7.166)$$

A livello microscopico, si può immaginare che accada la cosa seguente. Gli elettroni di tutti gli atomi vengono spostati di una quantità  $\delta$  in direzione opposta al campo. All'interno del dielettrico la densità media delle cariche elettriche negative e positive resta invariata e quindi vi è carica elettrica ovunque nulla; non così accade sui bordi: lo spostamento degli elettroni infatti lascia uno strato largo  $\delta$  carico negativamente, affacciato all'armatura positiva; corrispondentemente vi è uno strato largo  $\delta$  carico positivamente affacciato all'armatura negativa.

Si ha quindi una concentrazione di cariche elettriche di spessore  $\delta$ , dovute alla polarizzazione del dielettrico, sulle due superfici. Per determinare il valore di tale carica elettrica superficiale, si osservi che ci sono  $n$  dipoli per unità di volume, quindi nel volume  $S\delta$  sulle superfici del dielettrico ci sono  $nS\delta$  dipoli. Ma ogni dipolo porta una carica elettrica  $q$ , quindi il valore assoluto della carica elettrica totale presente su ciascuna delle superfici del dielettrico affacciate alle armature del condensatore è  $qnS\delta$ ; pertanto la densità superficiale di cariche elettriche di polarizzazione è

$$\sigma_{pol} = nq\delta . \quad (7.167)$$

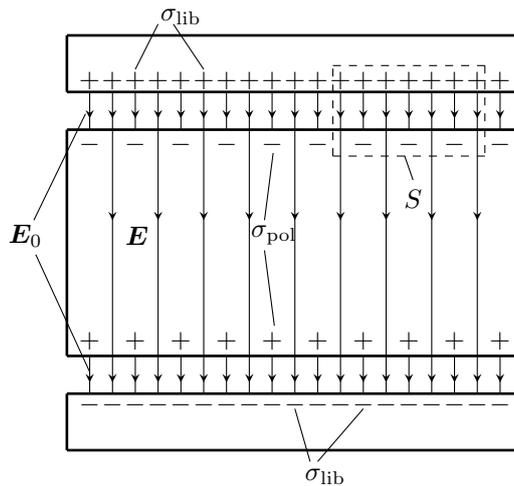


**Figura 7.50:** Polarizzazione di un dielettrico. a: i dipoli atomici; b: gli strati carichi.

Si riconosce pertanto che  $\sigma_{pol}$  è uguale al modulo del vettore di polarizzazione. È abbastanza intuitivo il fatto che la polarizzazione è tanto maggiore quanto maggiore è il campo elettrico in cui si viene a trovare il dielettrico. Questa intuizione è confermata dall'esperienza nella legge<sup>18</sup>

$$\mathbf{P} = \epsilon_0 \chi \mathbf{E} . \tag{7.168}$$

La costante  $\chi$  dipende dal dielettrico in questione ed è detta **suscettività elettrica** del dielettrico. Quindi, tanto maggiore è la sua suscettività tanto maggiormente un dielettrico si polarizza in presenza di un campo esterno. Si noti che il campo  $\mathbf{E}$  che entra nella formula (7.168), è il campo elettrico all'interno del dielettrico, in altre parole tale formula fornisce la polarizzazione di un dielettrico in termini del campo elettrico presente all'interno del dielettrico stesso.



**Figura 7.51:** Polarizzazione di un dielettrico.

Sia ora  $\sigma_{lib}$  la densità delle cariche elettriche libere (di muoversi) presenti sulle armature del condensatore; si applichi la legge di Gauss alla superficie chiusa a forma di parallelepipedo di base  $S$  indicata, in sezione, nella figura 7.51.

Nella figura sono state indicate anche le linee di campo e le densità di carica elettrica libera e di polarizzazione (si osservi che la densità di carica elettrica libera è maggiore della densità di carica elettrica di polarizzazione). Il campo elettrico all'interno della armatura conduttrice è nullo. Il flusso uscente dalla superficie chiusa è quindi solo quello uscente dalla superficie di area  $S$  parallela alle armature ed interna al dielettrico. Inoltre la carica elettrica totale interna alla superficie è data dalla somma algebrica delle cariche elettriche (positive) presenti sull'armatura, aventi densità superficiale  $\sigma_{lib}$ , e di quelle (negative) presenti sulla superficie del dielettrico, aventi densità  $\sigma_{pol}$ . Tale somma algebrica è evidentemente data dall'area moltiplicata per  $\sigma_{lib} - \sigma_{pol}$ .

<sup>18</sup> Questa legge è valida solo per mezzi isotropi come gas, liquidi, sostanza amorfe (il vetro) o a reticolo cristallino cubico. Diversamente le cose sono alquanto più complesse. Si osservi, ad esempio, che in generale la polarizzazione può non essere omogenea e quindi la carica elettrica interna al dielettrico polarizzato può non esser ovunque nulla.

Riassumendo, dalla legge di Gauss si ottiene il modulo del campo  $E$  interno al dielettrico nel modo seguente:

$$SE = S \frac{(\sigma_{lib} - \sigma_{pol})}{\epsilon_0} \quad \longrightarrow \quad E = \frac{(\sigma_{lib} - \sigma_{pol})}{\epsilon_0} . \quad (7.169)$$

Questa relazione, ricordando che  $\sigma_{pol} = P = \epsilon_0 \chi E$ , può essere riscritta nella forma (la cui facile dimostrazione viene lasciata al lettore studioso):

$$E = \frac{1}{(1 + \chi)\epsilon_0} \sigma_{lib} . \quad (7.170)$$

Introducendo la **costante dielettrica relativa** del dielettrico in questione definita da  $\epsilon_r = 1 + \chi$ , è possibile ulteriormente riscrivere

$$E = \frac{1}{\epsilon_0 \epsilon_r} \sigma_{lib} . \quad (7.171)$$

Si osservi che  $\frac{\sigma_{lib}}{\epsilon_0}$  è il campo elettrico prodotto dalle cariche elettriche presenti sulle armature del condensatore; esso viene indicato con  $E_0$  perché si tratta del campo elettrico presente fra le armature del condensatore in assenza di dielettrico; è quindi il campo esterno che polarizza il dielettrico. Si può pertanto scrivere

$$E = \frac{1}{\epsilon_r} E_0 ; \quad (7.172)$$

poiché  $\epsilon_r > 1$ , il campo  $E$  interno al dielettrico è minore del campo polarizzante  $E_0$  come osservato all'inizio. Ora, si definisca **costante dielettrica assoluta** del dielettrico la quantità

$$\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r \quad (7.173)$$

e si osservi che per il vuoto, che ovviamente non si polarizza e quindi ha suscettività nulla, vale  $\epsilon_r = 1$ ; la costante dielettrica (assoluta) del vuoto è quindi  $\epsilon_0$ . Così si è resa ragione del nome introdotto subito dopo l'equazione (7.4). La costante dielettrica relativa di un dielettrico è il rapporto fra la costante assoluta del dielettrico e quella del vuoto. In altre parole, la costante dielettrica relativa è la misura della costante dielettrica assoluta in unità di  $\epsilon_0$ . Inoltre, il modulo del campo elettrico interno al dielettrico può essere scritto in termini delle cariche elettriche libere presenti sulle armature e della costante dielettrica assoluta del dielettrico presente fra le armature nella forma

$$E = \frac{\sigma_{lib}}{\epsilon} . \quad (7.174)$$

Si osservi infine che la differenza di potenziale fra le due armature del condensatore, in presenza di un dielettrico di costante  $\epsilon$ , può essere scritta nella forma

$$V = Ed = \frac{\sigma_{lib} d}{\epsilon} ; \quad (7.175)$$

ma  $\sigma_{lib} = \frac{Q}{S}$  e  $\epsilon = \epsilon_r \epsilon_0$ , quindi

$$V = \frac{Qd}{S\epsilon_r \epsilon_0} \quad (7.176)$$

dalla definizione di capacità, si trova pertanto

$$C = \frac{Q}{V} = \epsilon_r \epsilon_0 \frac{S}{d} = \epsilon_r C_0 . \quad (7.177)$$

Quindi la capacità del condensatore in presenza di un dielettrico aumenta, rispetto al vuoto, di un fattore pari alla costante dielettrica relativa del dielettrico stesso. Riassumendo, in presenza di un dielettrico, il campo elettrico, e quindi la differenza di potenziale, diminuiscono di un fattore  $\epsilon_r$ , mentre la capacità aumenta dello stesso fattore  $\epsilon_r$ .

**Osservazioni**

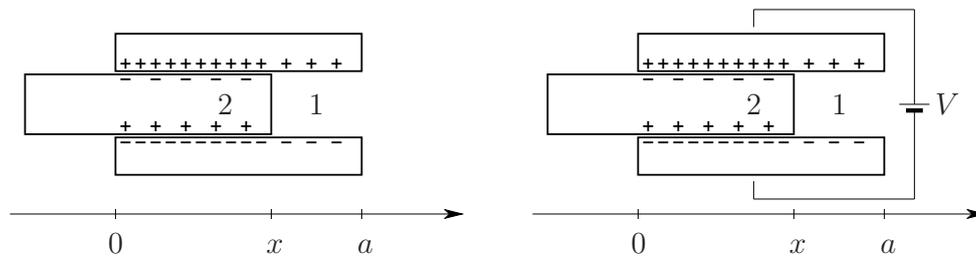
1. All'interno dei dielettrici la legge di Gauss va modificata per tener conto anche delle cariche elettriche di polarizzazione presenti. Si può dimostrare, ma la dimostrazione va oltre i limiti di queste note, che la forma corretta della legge di Gauss all'interno di un dielettrico è

$$\Phi_S(\mathbf{E}) = \frac{Q}{\epsilon} \tag{7.178}$$

con il solito significato dei simboli. Quindi per tener conto della presenza dei dielettrici è sufficiente sostituire in tutte le equazioni al posto della costante dielettrica del vuoto, la costante dielettrica assoluta del dielettrico in questione.

**7.19.1 INSERIMENTO PARZIALE DI UN DIELETTRICO.**

Si consideri un condensatore piano sulle cui armature si trovi la carica elettrica  $Q$ . Si supponga che un dielettrico di costante dielettrica relativa  $\epsilon_r$  sia inserito fra le armature del condensatore per una lunghezza  $x$ . Sia  $a$  la lunghezza totale del condensatore, sia  $b$  la sua larghezza e sia  $d$  la distanza fra le armature. Il dispositivo può essere considerato come due condensatori in parallelo con capacità differenti  $C_1$  e  $C_2$ .



**Figura 7.52:** Il dielettrico parzialmente inserito nel condensatore: senza generatore e con generatore.

Valgono le relazioni

$$C_1(x) = \epsilon_0 \frac{b}{d} (a - x) \quad , \quad C_2(x) = \epsilon_0 \epsilon_r \frac{b}{d} x \tag{7.179}$$

La capacità totale è quindi

$$C(x) = C_1(x) + C_2(x) = \epsilon_0 \frac{b}{d} [a + (\epsilon_r - 1)x] \tag{7.180}$$

Si vuole determinare ora il lavoro necessario per inserire il dielettrico nel condensatore di una quantità  $x$ . Inserendo il dielettrico la capacità aumenta, quindi l'energia potenziale elettrostatica accumulata nel condensatore con carica elettrica costante, data da  $W = \frac{Q^2}{2C}$ , diminuisce; in altre parole il lavoro fatto per portare il dielettrico all'interno del condensatore è compiuto dalle forze elettriche in gioco a spese dell'energia potenziale elettrostatica. Quindi il condensatore attira dentro di sé il dielettrico. Indicando con uno 0 a pedice le quantità calcolate in assenza di dielettrico, e quindi nel vuoto, il lavoro necessario per portare il dielettrico dall'esterno fino a  $x$  è

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = -\Delta W = W_0 - W &= \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C_0} - \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} \frac{Q^2 d}{\epsilon_0 ab} - \frac{1}{2} \frac{Q^2 d}{\epsilon_0 ab} \frac{1}{a + (\epsilon_r - 1)x} = \\ &= \frac{Q^2 d}{2\epsilon_0 ab} \frac{\epsilon_r - 1}{a + (\epsilon_r - 1)x} x . \end{aligned} \tag{7.181}$$

Si consideri per cominciare il caso in cui il conduttore sia isolato; in tal caso la carica elettrica sulle sue armature resta invariata; la disposizione di tale carica però non è più omogenea, ma

varia in modo da mantenere a potenziale costante le superficie delle armature. Con l'inserimento del dielettrico la capacità progressivamente aumenta e quindi il potenziale diminuisce.

$$V(x) = \frac{Q}{C(x)} = \frac{Qd}{\epsilon_0 b[a + (\epsilon_r - 1)x]} . \quad (7.182)$$

E conseguentemente diminuisce il campo elettrico fra le armature:

$$E(x) = \frac{V(x)}{d} = \frac{Q}{\epsilon_0 b[a + (\epsilon_r - 1)x]} . \quad (7.183)$$

Per la determinazione della forza basta derivare rispetto a  $x$ :

$$F(x) = \frac{d\mathcal{L}}{dx} = \frac{Q^2 d}{2\epsilon_0 ab} \frac{\epsilon_r - 1}{[a + (\epsilon_r - 1)x]^2} . \quad (7.184)$$

il segno positivo di questa forza dice che è diretta nel verso in cui  $dx$  aumenta, cioè nel verso dell'inserimento coerentemente con le considerazioni energetiche svolte sopra. La forza ora calcolata può essere scritta in termini del campo elettrico presente fra le armature; vale infatti:

$$F(x) = \frac{1}{2} \epsilon_0 (\epsilon_r - 1) E^2(x) \Sigma , \quad (7.185)$$

ove  $\Sigma$  è il prodotto  $bd$ , che è l'area della superficie di dielettrico su cui agisce la forza  $F$ . Si può quindi calcolare la pressione esercitata sul dielettrico dalla forza  $F(x)$ :

$$p(x) = \frac{F(x)}{\Sigma} = \frac{1}{2} \epsilon_0 (\epsilon_r - 1) E^2(x) , \quad (7.186)$$

Ora si ripetano tutte le considerazioni svolte supponendo che la differenza di potenziale  $V$  fra le armature sia mantenuta costante da un dispositivo, detto *generatore di tensione*, che fornisce una differenza di potenziale costante ai conduttori a cui è collegato<sup>19</sup>. In questo caso l'aumento di capacità del condensatore fa aumentare l'energia potenziale elettrostatica che, a potenziale costante, è data da  $W = \frac{1}{2} CV^2$ . Durante l'inserimento del dielettrico, l'energia accumulata, quindi, aumenta della quantità

$$\Delta W = \frac{V^2}{2} \Delta C . \quad (7.187)$$

Il condensatore non è piú un sistema isolato in quanto è collegato al generatore di tensione. Questo fornisce al condensatore le cariche elettriche necessarie a mantenere costante la differenza di potenziale man mano che viene inserito il dielettrico e quindi la capacità aumenta. Se la capacità aumenta della quantità  $\Delta C$  il generatore, per mantenere costante la differenza di potenziale  $V$ , deve fornire la carica elettrica  $V\Delta C$ ; questa carica elettrica viene portata dall'armatura negativa alla positiva fra le quale vi è la differenza di potenziale  $V$ , quindi il lavoro fatto dal generatore è

$$\mathcal{L}_G = V\Delta Q = V^2 \Delta C . \quad (7.188)$$

Tale è quindi l'energia fornita dal generatore al condensatore. Questa va in parte ad aumentare l'energia potenziale elettrostatica vista sopra e in parte nel lavoro  $\mathcal{L}_D$  necessario a spostare il dielettrico all'interno; il bilancio energetico è quindi

$$\mathcal{L}_G = \Delta W + \mathcal{L}_D . \quad (7.189)$$

Cosí, per sottrazione, si può determinare il lavoro necessario a spostare il dielettrico:

$$\mathcal{L}_D = \mathcal{L}_G - \Delta W = \frac{V^2}{2} \Delta C . \quad (7.190)$$

Sostituendo a questa espressione la variazione di capacità si trova

$$\mathcal{L}_D = \frac{V^2}{2} \left( \epsilon_0 \frac{b}{d} [a + (\epsilon_r - 1)x] - \epsilon_0 \frac{ab}{d} \right) = \frac{V^2}{2} \epsilon_0 \frac{b}{d} (\epsilon_r - 1)x . \quad (7.191)$$

<sup>19</sup> Circa la natura di un tale dispositivo si tornerà piú avanti.

In questo caso, il potenziale rimane costante durante l'inserimento e quindi costante rimane anche il campo elettrico presente fra le armature:

$$E = \frac{V}{d} . \tag{7.192}$$

La carica elettrica invece è distribuita in modo non omogeneo, si veda anche la figura 7.52, essendo maggiore la densità di carica elettrica nella zona ov'è presente il dielettrico. La carica elettrica totale presente sulle armature varia con  $x$  secondo la funzione

$$Q(x) = VC(x) = V\epsilon_0 \frac{b}{d} [a + (\epsilon_r - 1)x] . \tag{7.193}$$

Anche in questo caso è possibile calcolare la forza con cui il dielettrico è spinto all'interno del condensatore facendo la derivata

$$F = \frac{d\mathcal{L}}{dx} = \frac{V^2}{2} \epsilon_0 \frac{b}{d} (\epsilon_r - 1) ; \tag{7.194}$$

e, come nel caso precedente, è possibile scrivere questa equazione in termini del campo elettrico presente fra le armature:

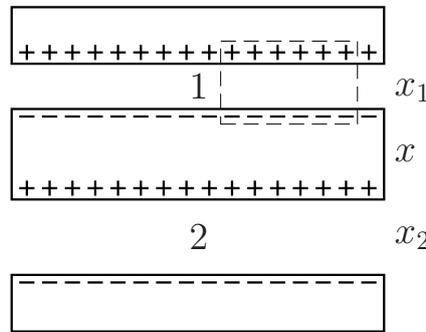
$$F = \frac{1}{2} \epsilon_0 (\epsilon_r - 1) E^2 \Sigma , \tag{7.195}$$

che formalmente è la stessa espressione trovata sopra, anche se in questo caso campo elettrico e forza sono costanti. Analoga relazione si ha per la pressione:

$$p = \frac{F}{\Sigma} = \frac{1}{2} \epsilon_0 (\epsilon_r - 1) E^2 , \tag{7.196}$$

### 7.19.2 INSERIMENTO DI UN CONDUTTORE.

Si consideri ora un condensatore piano avente le armature di area  $A$  dentro il quale sia stata inserita una lastra conduttrice di spessore  $x$  che lasci verso l'armatura positiva uno spazio di spessore  $x_1$  e verso l'armatura negativa uno spazio di spessore  $x_2$ .



**Figura 7.53:** Il condensatore con lastra conduttrice inserita.

Per capire quello che accade, si applichi la legge di Gauss alla superficie indicata in figura 7.53. Il flusso uscente del campo elettrico è nullo poiché all'interno delle due lastre conduttrici il campo è nullo. Quindi all'interno della superficie chiusa deve esserci carica elettrica nulla. Questo significa che sulla superficie della lastra inserita ci sono cariche elettriche negative tali da compensare le cariche elettriche positive presenti sulla superficie dell'armatura del condensatore. Un ragionamento analogo può essere fatto per la faccia inferiore della lastra. Questo significa che la densità delle cariche elettriche indotte sulle superfici della lastra è uguale alla densità delle cariche elettriche presenti sulle armature: si verifica quindi induzione completa. Di fatto quindi il sistema si comporta come due condensatori in serie, indicati in figura con 1 e 2. Pertanto la capacità totale  $C$  del dispositivo è data da

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} = \frac{x_1}{\epsilon_0 A} + \frac{x_2}{\epsilon_0 A} = \frac{x_1 + x_2}{\epsilon_0 A} = \frac{d - x}{\epsilon_0 A} ; \tag{7.197}$$

quindi

$$C = \epsilon_0 \frac{A}{d-x} . \quad (7.198)$$

La capacità è quindi aumentata ed il sistema si comporta come se la distanza fra armature fosse ridotta dello spessore della lastra inserita.

Si tratta ora di calcolare, come fatto per l'inserimento del dielettrico, il lavoro necessario ad inserire la lastra conduttrice a partire dal caso in cui il condensatore sia isolato e quindi la carica elettrica  $Q$  sulle sue armature rimanga costante. Visto che il sistema è isolato questo lavoro deve essere uguale alla variazione di energia del sistema e, in particolare, se l'energia diminuisce, vuol dire che il lavoro è fatto dal campo elettrico presente nel condensatore e quindi la lastra è risucchiata; se, viceversa, l'energia aumenta vuol dire che il lavoro è compiuto da una forza esterna che inserisce la lastra nel condensatore. L'energia in assenza di lastra è  $W_0 = \frac{Q^2}{2C_0}$ . Ma inserendo la lastra la capacità aumenta e quindi l'energia diminuisce: la lastra è risucchiata. Il lavoro fatto dal campo elettrico è

$$\mathcal{L} = -\Delta W = W_0 - W = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C_0} - \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{\epsilon_0 A} d - \frac{1}{2} \frac{Q^2}{\epsilon_0 A} (d-x) = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{\epsilon_0 A} x . \quad (7.199)$$

Si osservi che questo lavoro è uguale al lavoro fatto da una delle due lastre del condensatore per attirare l'altra di una distanza  $x$ . Infatti, ricordando l'equazione (7.148), che dà la forza costante con cui un'armatura di un condensatore piano attira l'altra, il lavoro compiuto per avvicinare le armature di  $x$  è

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{\epsilon_0 A} x . \quad (7.200)$$

La cosa non sorprende; infatti il dispositivo si comporta esattamente come se lo spessore  $x$  fosse rimosso.

Le differenze di potenziale ai capi dei due condensatori in serie sono

$$V_1 = \frac{Q}{C_1} = \frac{Q}{\epsilon_0 A} x_1 \quad , \quad V_2 = \frac{Q}{C_2} = \frac{Q}{\epsilon_0 A} x_2 ; \quad (7.201)$$

da cui è possibile calcolare i moduli dei campi elettrici:

$$E_1 = \frac{V_1}{x_1} = \frac{Q}{\epsilon_0 A} \quad , \quad E_2 = \frac{V_2}{x_2} = \frac{Q}{\epsilon_0 A} ; \quad (7.202)$$

quindi il campo elettrico nei due condensatori è lo stesso ed ha il medesimo valore del campo elettrico in assenza della lastra.

Per chiarezza, nella figura 7.54 sono rappresentati i grafici della differenza di potenziale e del campo elettrico rispetto alla distanza dall'armatura negativa. Chi abbia contezza del calcolo differenziale non mancherà di riconoscere che i grafici del campo elettrico sono le derivate dei corrispondenti grafici della differenza di potenziale.

Si consideri ora il caso in cui il condensatore, durante l'inserimento della lastra conduttrice, sia mantenuto da un generatore a differenza di potenziale  $V$  costante. Qui, come per il caso dell'inserimento della lastra dielettrica, è necessario tenere anche conto dell'energia fornita al sistema dal generatore. Come sopra, il lavoro  $\mathcal{L}$  compiuto per attirare la lastra è uguale al lavoro fatto dal generatore per fornire la carica elettrica necessaria a mantenere costante la differenza di potenziale meno la variazione di energia elettrostatica del condensatore. Vale cioè

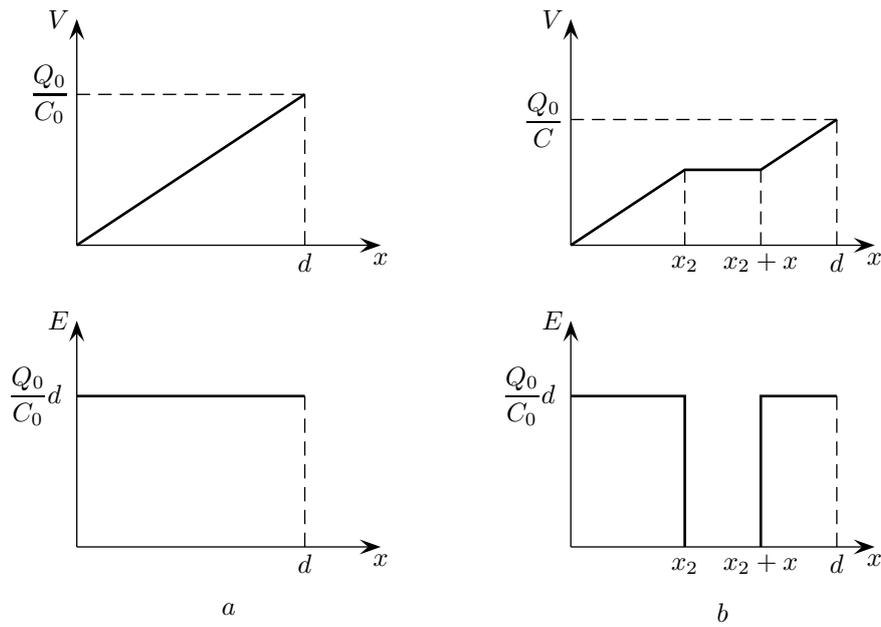
$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_G - \Delta W . \quad (7.203)$$

$\Delta W$  diviene:

$$\Delta W = W - W_0 = \frac{1}{2} V^2 (C - C_0) . \quad (7.204)$$

Indicando con  $Q_0$  la carica elettrica presente prima dell'inserimento della lastra e con  $Q$  la carica elettrica dopo l'inserimento della lastra, il lavoro del generatore è quello fatto per portare la carica elettrica  $Q - Q_0$  sul condensatore a potenziale costante  $V$ , quindi

$$\mathcal{L}_G = V(Q - Q_0) = V^2 (C - C_0) . \quad (7.205)$$



**Figura 7.54:** Grafici dell'andamento di  $V$  e di  $E$ ; a: senza lastra, b: con la lastra.

Pertanto il lavoro fatto per portare la lastra nel condensatore è

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}V^2(C - C_0) = \frac{1}{2}V^2\epsilon_0 A \left( \frac{1}{d-x} - \frac{1}{d} \right) = \frac{1}{2}V^2\epsilon_0 A \frac{x}{d(d-x)}. \quad (7.206)$$

## 7.20 MODELLO DELLA POLARIZZAZIONE ATOMICA.

Sopra si è affermato che la proporzionalità fra polarizzazione e campo elettrico è un risultato sperimentale. Qui si vuole dedurlo da un modello teorico. Si noti che polarizzazione di un materiale isolante in presenza di un campo elettrico esterno può avvenire in due modi a seconda della natura del materiale in questione. Se si tratta di un materiale costituito da molecole non polari, per esempio la molecola di idrogeno, avviene la polarizzazione delle singole molecole mediante spostamento dei baricentri delle cariche elettriche atomiche e la formazione dei dipoli atomici, come descritto sopra. Se la molecola è polare, come quella dell'acqua, la polarizzazione avviene per orientazione dei dipoli molecolari nella direzione del campo esterno. In quel che segue si considerano solo materiali dielettrici in fase gassosa, in modo da poter trascurare completamente l'interazione elettrostatica fra le diverse molecole.

Se una molecola di un gas monoatomico non polare, per esempio l'elio, viene sottoposto ad un campo elettrico esterno, i baricentri delle cariche elettriche positive e negative costituenti l'atomo si spostano fino a raggiungere una configurazione di equilibrio fra la sollecitazione del campo esterno e la forza di richiamo attrattiva che tende a riportare i due baricentri delle cariche elettriche opposte a coincidere. L'ipotesi base del modello che si vuole qui discutere è supporre che questa forza di richiamo sia armonica; si suppone cioè che la forza di richiamo su ogni carica elettrica, elettrone o ione, abbia la forma

$$\mathbf{F} = -m\omega_0^2\mathbf{x}, \quad (7.207)$$

ove  $m$  è la massa della carica elettrica e  $\omega_0$  la pulsazione dell'oscillazione attorno alla posizione di equilibrio, propria dell'atomo in questione. All'equilibrio, su ciascuna carica elettrica la forza di richiamo e la forza del campo elettrico esterno si equilibrano, vale quindi

$$\mathbf{F} + e\mathbf{E} = 0 \quad \longrightarrow \quad e\mathbf{E} = m\omega_0^2\mathbf{x}; \quad (7.208)$$

quindi il momento di dipolo atomico è

$$\mathbf{p} = e\mathbf{x} = \frac{e^2}{m\omega_0^2}\mathbf{E}. \quad (7.209)$$

Se ci sono  $n$  atomi nell'unità di volume il vettore polarizzazione diventa

$$\mathbf{P} = n\mathbf{p} = \frac{ne^2}{m\omega_0^2}\mathbf{E}. \quad (7.210)$$

Quindi  $\mathbf{P}$  è proporzionale ad  $\mathbf{E}$  che è quello che si voleva dimostrare. Confrontando questa equazione con la (7.168), si trova che la suscettività elettrica dipende dalle proprietà del materiale secondo la legge

$$\chi = \frac{ne^2}{\epsilon_0 m\omega_0^2}. \quad (7.211)$$

Il caso di materiali costituiti da molecole polari i cui momenti si orientano lungo la direzione del campo elettrico esterno è più complicato da trattare in modo elementare poiché la temperatura gioca un ruolo determinante; infatti l'agitazione termica delle molecole tende a distruggere l'allineamento prodotto dal campo elettrico esterno. Il vettore polarizzazione deve quindi dipendere dalla temperatura. L'analisi completa del modello, pur non eccessivamente complessa, richiede qualche elemento di meccanica statistica<sup>20</sup>, se ne dà qui, per completezza, il risultato:

$$\mathbf{P} = \frac{np_0^2}{3K_B T}\mathbf{E} \quad \longrightarrow \quad \chi = \frac{np_0}{3\epsilon_0 K_B T}, \quad (7.212)$$

ove  $p_0$  è il modulo del momento di dipolo atomico del materiale in questione,  $n$  è ancora il numero di molecole per unità di volume,  $K_B$  è la costante di Boltzmann<sup>21</sup> e  $T$  la temperatura assoluta. Si vede qui che anche nel caso di molecole polari, l'equazione (7.168), su cui si basa tutta l'analisi fatta del comportamento dei dielettrici, risulta corretta.

<sup>20</sup> Per una semplicissima esposizione si veda: R.P. Feynman, R.B. Leighton, M. Sands, *La fisica di Feynman*, vol. II, parte I, pag. 11-5. Zanichelli.

<sup>21</sup> Ludwig Boltzmann (1844-1906), fisico-matematico tedesco.

# 8

## CORRENTE ELETTRICA.

---

In questo capitolo viene abbandonata l'ipotesi che le cariche elettriche siano sempre ferme in posizioni di equilibrio e si comincia ad affrontare il problema di scrivere i fenomeni in cui siano coinvolte cariche elettriche in movimento.

Ogni qualvolta vi siano delle cariche elettriche in movimento si dice esserci una **corrente elettrica**. Le cariche elettriche possono muoversi in vari mezzi; in queste note verranno considerati solamente il movimento delle cariche elettriche nei corpi conduttori e nelle soluzioni. Si cominci a considerare, a titolo esemplificativo, due corpi conduttori sferici uguali carichi. Il primo, indicato con  $A$ , sia carico positivamente con una carica elettrica  $Q_A = +5$  C ed il secondo, indicato con  $B$ , sia carico negativamente con una carica elettrica  $Q_B = -7$  C. Evidentemente fra i due corpi esiste una differenza di potenziale. Se i due corpi vengono collegati per mezzo di un filo conduttore vi sarà un movimento di cariche elettriche che porti il sistema allo stesso potenziale. Visto che i due corpi sono uguali, si veda l'equazione (7.123), su di essi si trova la stessa carica elettrica. Ma per la conservazione della carica elettrica, la carica elettrica totale del sistema deve rimanere costante; nel caso dell'esempio fatto quindi la carica elettrica totale  $Q = Q_A + Q_B = -2$  C si distribuisce in parti uguali sui due corpi, quindi  $-1$  C su ciascun corpo. È chiaro che vi è stato un movimento di cariche elettriche lungo il filo. Si osservi che vi sono due possibilità: o la carica elettrica di  $+6$  C si è spostata dal corpo  $A$  al corpo  $B$  o la carica elettrica di  $-6$  C si è spostata dal corpo  $B$  al corpo  $A$ . Quindi sia l'ipotesi di moto di cariche elettriche positive, sia quella del moto di cariche elettriche negative sono compatibili con il fenomeno osservato, nel senso che entrambe le ipotesi si trovano nello stesso accordo con il fenomeno osservato quindi, senza ulteriori elementi, supporre un moto di cariche elettriche positive dal corpo a potenziale più alto a quello a potenziale più basso è perfettamente equivalente a supporre che a muoversi siano le cariche elettriche negative dal corpo a potenziale più basso a quello a potenziale più alto.

Dalla conoscenza della struttura atomica della materia, ed in particolare della teoria del legame metallico che tiene insieme gli atomi dei materiali conduttori (che, si noti bene, sono informazioni *aggiuntive* rispetto alle considerazioni fatte sulla sola base dell'esperimento descritto sopra) è noto che le cariche elettriche mobili sono gli elettroni che hanno carica elettrica negativa. D'altra parte la propagazione di cariche elettriche nelle soluzioni avviene per movimento di ioni di entrambi i segni. Si rende quindi necessaria una convenzione (arbitraria; ma tutte le convenzioni lo sono) sul verso della corrente elettrica.

*Ogni qualvolta vi sia uno spostamento di cariche elettriche si ha una corrente elettrica il cui verso di propagazione è quello in cui si abbia flusso di cariche elettriche positive.*

Nel caso dell'esempio discusso sopra, quindi, benché a muoversi siano gli elettroni carichi negativamente, si è *convenzionalmente* avuto un flusso di corrente elettrica dal corpo a potenziale più alto (il corpo  $A$ , carico positivamente) al corpo a potenziale più basso (il corpo  $B$ , carico negativamente).

### 8.1 INTENSITÀ DI CORRENTE.

Data una corrente elettrica che attraversa un filo omogeneo a sezione costante  $S$ , sia  $\Delta Q$  la quantità di carica elettrica attraversa una qualunque sezione del filo nel tempo  $\Delta t$ ; si definisce allora **intensità di corrente** il rapporto

$$i = \frac{\Delta Q}{\Delta t}; \quad (8.1)$$

Più precisamente, questa è la definizione corretta solo nel caso in cui il valore di questo rapporto è indipendente da come venga scelto l'intervallo di tempo  $\Delta t$ . Se ciò si verifica si dice che si è in

presenza di una *corrente continua*.

Nel caso generale, in cui la carica elettrica che fluisce attraverso  $S$  è una funzione  $Q(t)$  del tempo, è necessario definire l'intensità di corrente istantanea, facendo tendere a zero l'intervallo  $\Delta t$ . Risulta così che  $i(t)$  è la derivata rispetto al tempo di  $Q(t)$ :

$$i(t) = \frac{dQ}{dt} . \quad (8.2)$$

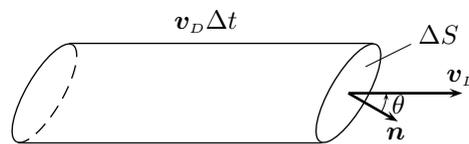
L'unità di misura dell'intensità di corrente è detta *ampere* e viene denotata con il simbolo  $A$ ; un filo conduttore è percorso dall'intensità di corrente di un ampere se attraverso una qualunque sua sezione passa la carica elettrica di un coulomb ogni secondo. Una definizione più precisa dell'ampere verrà data più avanti in termini della forza magnetica fra fili percorsi da corrente elettrica.

Questa definizione di intensità di corrente è adeguata nel caso in cui le cariche elettriche scorrono in fili di sezione costante. In caso contrario, cioè se il filo ha sezione variabile o se la corrente elettrica scorre in un conduttore non filiforme è opportuno definire la **densità di corrente** come il vettore  $\mathbf{j}$  che ha come direzione e verso quello della corrente elettrica e come modulo l'intensità di corrente che fluisce attraverso l'unità di superficie perpendicolarmente alla superficie stessa. Detto in altro modo, l'intensità di corrente che fluisce attraverso una superficie  $\Delta S$  è data dalla componente della densità di corrente nella direzione perpendicolare a  $\Delta S$  moltiplicata per  $\Delta S$ , vale cioè

$$i = \mathbf{j} \cdot \mathbf{n} \Delta S , \quad (8.3)$$

ove  $\mathbf{n}$  è il vettore unitario perpendicolare alla superficie  $\Delta S$ . Si osservi che la precedente equazione non dice altro che l'intensità di corrente attraverso la superficie  $\Delta S$  è uguale al flusso della densità di corrente  $\mathbf{j}$ .

Per analizzare ulteriormente il significato fisico del vettore densità di corrente si consideri la corrente elettrica scorrente lungo un filo di sezione  $\Delta S$  e sia  $v_D$ , detta *velocità di deriva*, la velocità di movimento delle cariche elettriche all'interno del filo.



**Figura 8.1:** La densità di corrente.

La carica elettrica che attraversa la sezione  $\Delta S$  del filo nell'intervallo di tempo  $\Delta t$  è quella contenuta nel cilindro di base  $S$  ed altezza  $v_D \Delta t$ , rappresentato in figura 8.1, il cui volume è dato da  $v_D \Delta t \cos \theta \Delta S = \mathbf{v}_D \cdot \mathbf{n} \Delta t \Delta S$ . Indicando con  $q$  il valore di ciascuna delle cariche elettriche presenti e con  $N$  il loro numero per unità di volume, la carica elettrica che attraversa  $\Delta S$  nell'intervallo di tempo  $\Delta t$  è dato da

$$\Delta Q = Nq \mathbf{v}_D \cdot \mathbf{n} \Delta t \Delta S \quad (8.4)$$

e quindi

$$i = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = Nq \mathbf{v}_D \cdot \mathbf{n} \Delta S \quad (8.5)$$

che, confrontata con la (8.3), dà la seguente espressione per il vettore densità di corrente

$$\mathbf{j} = Nq \mathbf{v}_D , \quad (8.6)$$

## 8.2 LE LEGGI DI OHM.

Sperimentalmente si osserva che, per la maggior parte di materiali conduttori, detti conduttori *ohmici*, la corrente elettrica che circola in un filo elettrico ha intensità proporzionale alla differenza

di potenziale applicata ai suoi capi. La costante di proporzionalità,  $R$ , è una caratteristica del filo ed è chiamata **resistenza elettrica**; vale quindi la relazione

$$V = Ri \quad (8.7)$$

nota con il nome di **prima legge di Ohm**<sup>1</sup>. L'unità di misura della resistenza è l'ohm, simbolo  $\Omega$ . Quindi un filo ha la resistenza di un ohm se, quando ai suoi capi viene applicata la differenza di potenziale di un volt, attraverso di esso scorre una corrente di intensità un ampere.

Inoltre sperimentalmente si osserva anche che la resistenza di un filo elettrico è direttamente proporzionale alla lunghezza  $\ell$  del filo ed inversamente proporzionale alla sua sezione  $S$ . Vale quindi la relazione

$$R = \varrho \frac{\ell}{S}, \quad (8.8)$$

detta **seconda legge di Ohm**. La costante di proporzionalità  $\varrho$  è detta **resistività** o resistenza specifica e dipende dal materiale di cui è composto il filo conduttore; la sua unità di misura è Am. Quanto detto risulta vero solo nel caso molto particolare in cui il filo conduttore sia omogeneo ed abbia sezione costante. Più in generale si consideri un tratto di filo la cui lunghezza  $\Delta\ell$  sia sufficientemente piccola perché eventuali disomogeneità o variazioni della sua sezione  $S$ , perpendicolare alla direzione di propagazione della corrente elettrica, siano trascurabili; sia allora  $V$  la differenza di potenziale ai capi del tratto di filo ed  $R$  la sua resistenza. Allora in esso circola la corrente elettrica di intensità  $i$  per cui vale la relazione

$$V = Ri = \varrho \frac{\ell}{S} i. \quad (8.9)$$

D'altra parte all'interno del filo si trova un campo elettrico, diretto dall'estremo a potenziale maggiore a quello a potenziale minore, il cui modulo è

$$E = \frac{V}{\ell}. \quad (8.10)$$

Mettendo insieme le ultime due equazioni

$$E = \varrho \frac{1}{S} i; \quad (8.11)$$

ora osservando che nel presente caso, in cui la corrente elettrica fluisce perpendicolarmente a  $S$  e quindi  $\mathbf{j} \cdot \mathbf{n} = 0$ , vale  $i = jS$ , si ottiene

$$E = \varrho j. \quad (8.12)$$

Questa relazione si può considerare una relazione vettoriale, infatti  $\mathbf{j}$  e  $\mathbf{E}$  hanno la stessa direzione e lo stesso verso:

$$\mathbf{E} = \varrho \mathbf{j}. \quad (8.13)$$

Questa ultima equazione compendia entrambe le leggi di Ohm viste sopra ed ha validità totalmente generale.

### 8.3 MODELLO CLASSICO DELLA CONDUZIONE ELETTRICA.

Si cerca ora di costruire un semplice modello teorico che dia conto delle leggi di Ohm. La formulazione matematica del modello richiede delle ipotesi.

La resistenza di un filo è una misura oggettiva dell'opposizione che il filo conduttore presenta al moto delle cariche elettriche attraverso di esso. Si supponga quindi che le cariche elettriche in moto siano frenate dagli urti con gli atomi del metallo e che questi urti soddisfino le seguenti proprietà.

1. Dopo ogni urto con gli atomi del metallo ogni carica elettrica in moto parte da ferma.

<sup>1</sup> Georg Simon Ohm (1787-1854), fisico tedesco.

2. L'intervallo di tempo che separa due urti successivi di ciascuna carica elettrica sia costante e sia denotato dal simbolo  $\tau$ .

Queste due assunzioni sono evidentemente irrealistiche; considerando però il comportamento descritto come *medio* ecco che divengono ragionevoli.

Infatti, dopo ciascun urto le cariche elettriche in moto proseguono il loro moto con velocità arbitraria in modulo e direzione, la velocità media delle cariche elettriche dopo ogni urto è quindi il vettore nullo. Allo stesso modo  $\tau$  rappresenta il tempo medio che separa due urti successivi. È chiaro che il valore di  $\tau$ , che il semplice modello proposto non fornisce, è diverso da conduttore a conduttore e dipende dalla disposizione degli atomi all'interno del materiale.

Il modulo della forza che fa muovere ciascuna carica elettrica all'interno del filo conduttore è data da  $F = qE$  ove  $E$  è il modulo del campo elettrico presente all'interno del filo; quindi, se  $m$  rappresenta la massa di ciascuna carica elettrica, nell'intervallo di tempo  $\tau$  che separa due urti successivi, ogni carica elettrica si muove di moto uniformemente accelerato con accelerazione data da

$$a = \frac{qE}{m} . \quad (8.14)$$

Come conseguenza delle supposizioni fatte, fra un urto e l'altro ogni carica elettrica si muove con una velocità media pari a  $a\tau/2$ ; questa velocità media può essere identificata con la velocità di deriva introdotta nel paragrafo precedente, si può allora scrivere

$$v_D = \frac{1}{2} \frac{qE}{m} \tau , \quad (8.15)$$

e quindi, usando l'equazione (8.6),

$$j = \frac{nq^2\tau}{2m} E . \quad (8.16)$$

L'equazione ora ottenuta non è altro che la legge di Ohm generalizzata nella forma (8.12). Si osservi il modello ha inoltre fornito un'equazione esplicita per la resistività

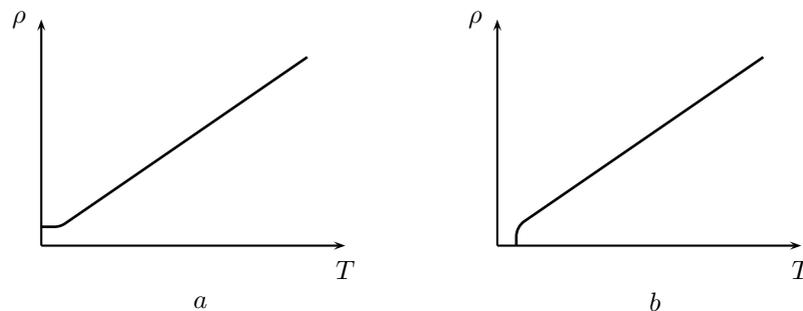
$$\varrho = \frac{2m}{nq^2\tau} , \quad (8.17)$$

come funzione delle caratteristiche interne del materiale conduttore.

La resistività di un materiale conduttore non è propriamente costante in quanto dipende dalla temperatura<sup>2</sup> Sperimentalmente si verifica che per ogni materiale ohmico la resistività, per valori non troppo piccoli della temperatura, aumenta all'aumentare della temperatura con una legge lineare del tipo

$$\varrho = \varrho_0(1 + \alpha t) , \quad (8.18)$$

ove  $t$  è la temperatura espressa in °C e  $\alpha$  è un parametro che dipende dal metallo in questione, ma per la maggior parte dei metalli si aggira attorno al valore di  $4 \times 10^{-3} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$ .



**Figura 8.2:** La resistività in funzione della temperatura; a: un conduttore; b: un superconduttore.

<sup>2</sup> Si noti che il modello costruito sopra è troppo semplice per poter rendere conto di tale dipendenza dalla temperatura.

Per temperature al di sotto di una decina di kelvin, dipendenza di  $\rho$  dalla temperatura è data dalla relazione

$$\rho = \rho_i + \beta T^5, \quad (8.19)$$

ove  $\rho_i$  e  $\beta$  dipendono dai metalli e  $T$  è misurata in kelvin.

Esistono materiali detti **superconduttori** che si comportano in modo un po' diverso. A temperature dell'ordine di qualche kelvin le resistività e, quindi, le resistenze divengono zero. Un modello che descriva coerentemente questo comportamento fa uso della meccanica quantistica e quindi va ben oltre i limiti di queste note.

#### 8.4 L'EFFETTO VOLTA. LA PILA DI VOLTA.

Come accennato sopra, esistono dei dispositivi in grado di fornire una data differenza di potenziale e di mantenerla costante. Il primo di tali dispositivi ad essere costruito fu la pila di Volta. Per capirne il funzionamento è necessario illustrare una serie di evidenze sperimentali scoperte da Volta e per questo note con il nome di **effetto Volta**. Il primo di questi fatti sperimentali può venir enunciato nella forma seguente.

*Se due conduttori metallici di diversa natura chimica vengono posti a contatto ed in equilibrio termico ai loro estremi si misura una differenza di potenziale il cui valore dipende solo dalla natura dei due metalli. Se inoltre fra i due metalli si pone una serie di altri conduttori di diversa natura, se mantenuti tutti alla stessa temperatura, la d.d.p. misurata fra i metalli che si trovano agli estremi è la medesima che si misura quando i due metalli si trovano a contatto diretto.*

Per una interpretazione teorica di questi fatti è necessario tenere conto del fatto che occorre una data energia per sottrarre ad un atomo neutro un elettrone e trasformarlo in uno ione positivo; questa energia viene detta **energia di ionizzazione**  $\mathcal{I}$  ed è diversa da elemento a elemento. Ciò significa che se si pone a zero il potenziale di un elettrone libero, il potenziale  $V$  di un elettrone legato dentro un atomo è dato dalla relazione  $eV = -\mathcal{I}$ . Si consideri quindi, ad esempio, il caso del rame e dello zinco il quali hanno energie di ionizzazione  $\mathcal{I}_{\text{Cu}} = 4.4$  eV e  $\mathcal{I}_{\text{Zn}} = 3.4$  eV; in questo caso quindi gli elettroni del rame si trovano, rispetto agli elettroni liberi, ad un potenziale di  $-4.4$  V, mentre quelli dello zinco si trovano ad un potenziale di  $-3.4$  V. Quindi, se posti a contatto, fra i due metalli viene a misurarsi una d.d.p. di contatto  $V_{\text{Zn-Cu}}$  pari a

$$V_{\text{Zn-Cu}} = \frac{\mathcal{I}_{\text{Cu}} - \mathcal{I}_{\text{Zn}}}{e} = 4.4 - 3.4 = 1 \text{ V}, \quad (8.20)$$

in ottimo accordo con i risultati sperimentali. Per quanto riguarda l'esperimento svolto con la serie di metalli interposti fra i due posti agli estremi, si considerino, ad esempio i metalli  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$  posti fra il rame e lo zinco dell'esempio ora visto, evidentemente in questo caso vale

$$\begin{aligned} V_{\text{Zn-Cu}} &= V_{\text{Zn-A}} + V_{\text{A-B}} + V_{\text{B-C}} + V_{\text{C-D}} + V_{\text{D-Cu}} = \\ &= \frac{\mathcal{I}_A - \mathcal{I}_{\text{Zn}}}{e} + \frac{\mathcal{I}_B - \mathcal{I}_A}{e} + \frac{\mathcal{I}_C - \mathcal{I}_B}{e} + \frac{\mathcal{I}_D - \mathcal{I}_C}{e} + \frac{\mathcal{I}_{\text{Cu}} - \mathcal{I}_D}{e} = \frac{\mathcal{I}_{\text{Cu}} - \mathcal{I}_{\text{Zn}}}{e}; \end{aligned} \quad (8.21)$$

da cui si riconosce che il potenziale misurato fra il rame e lo zinco posti agli estremi della sequenza è uguale a quello trovato quando i due metalli si trovavano direttamente a contatto.

#### Osservazioni

1. Si noti che se il primo e l'ultimo elemento della serie di metalli sono della stessa natura, la d.d.p. misurata è nulla; in particolare per una serie chiusa la somma delle d.d.p. è sempre zero.
2. Quest'ultima affermazione implica che non è possibile costruire mediante una successione di contatti metallici un circuito in cui sia presente una d.d.p. e quindi in cui possa scorrere una corrente elettrica.

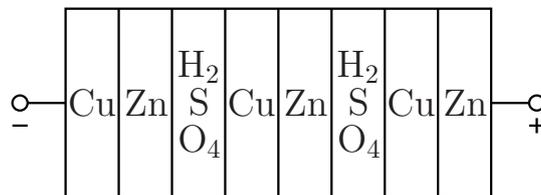
3. Volta ha chiamato i conduttori che si comportano nel modo descritto **conduttori di prima specie**; essi sono essenzialmente i conduttori metallici.

Il secondo dei fatti sperimentali trovato da Volta può essere enunciato nella forma seguente

*Se in una serie di conduttori metallici che comincia e finisce con lo stesso elemento viene inserita una soluzione la d.d.p. misurata ai capi della serie è diversa da zero. E se alcune sequenze di metalli sono poste a contatto tramite soluzioni la d.d.p. totale è uguale alla somma delle d.d.p. delle singole sequenze.*

Volta riconobbe che esistono conduttori non metallici che non verificano la proprietà vista sopra e li chiamò **conduttori di seconda specie**.

Il fenomeno ora descritto ha consentito a Volta di costruire un circuito chiuso di conduttori in cui vi sia una d.d.p. totale non nulla; inoltre, ponendo catene di conduttori di prima classe alternate con conduttori di seconda classe, gli fu possibile far sí che la d.d.p. totale fosse grande a piacere. Questo consentí a Volta di costruire la sua **pila**.

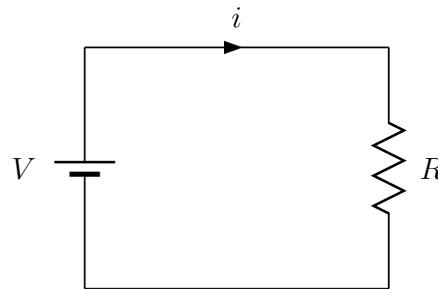


**Figura 8.3:** Una pila di Volta da 3 V.

In figura 8.3 è rappresentata una pila del tipo costruito da Volta: coppie di rame e zinco sono alternate con un pannello imbevuto di acido solforico. In figura sono rappresentate tre sequenze: poiché come visto sopra la coppia rame zinco ha una d.d.p. di contatto di circa 1 V, la pila rappresentata fornisce ai suoi capi una d.d.p. di 3 V.

## 8.5 GENERATORE DI TENSIONE E FORZA ELETTRIMOTRICE.

La pila ora descritta è solo un semplice esempio di un dispositivo in grado di fornire fra i suoi estremi, detti *poli*, una d.d.p. costante  $V$ . Un tale dispositivo è detto **generatore di tensione**.



**Figura 8.4:** Un filo di resistenza  $R$  collegato ad un generatore di tensione  $V$ .

Un circuito costituito da un filo conduttore avente resistenza  $R$  con gli estremi collegati alle estremità di un tale generatore viene usualmente rappresentato da un simbolo come quello rappresentato in figura 8.4: qui il tratto di filo avente una resistenza è indicato con la linea a zig-zag, mentre il generatore con i due segmenti paralleli, ove il segmento piú lungo rappresenta il polo positivo e quello piú spesso il polo negativo. I tratti di linea continua rappresentano i fili di collegamento e sono supposti a resistenza nulla. Il circuito sopra descritto viene attraversato dalla corrente di intensità  $i$  data dalla prima legge di Ohm

$$i = \frac{V}{R}. \quad (8.22)$$

Si osservi che un generatore di tensione per mantenere costante la d.d.p. mentre la corrente elettrica scorre deve prendere le cariche elettriche che giungono al suo polo negativo e portarle al polo positivo. Per far questo deve compiere un lavoro contro le forze elettriche presenti. Tale lavoro ha quindi origini non elettriche. Nel caso della pila di Volta, per esempio, le forze in gioco sono di origine chimica.

*Si definisce **forza elettromotrice** (f.e.m.) il lavoro compiuto dal generatore sull'unità di carica elettrica che lo attraversa.*

Si noti che la forza elettromotrice, nonostante il nome, *non* è una forza, ma ha le dimensioni di un lavoro per unità di carica elettrica, si misura, dunque, in volt. La forza elettromotrice, che verrà qui denotata mediante il simbolo  $\mathcal{E}$ , rappresenta l'energia per unità di carica elettrica che il generatore fornisce al filo di resistenza  $R$  perché in esso scorra la corrente elettrica di intensità uniforme  $i$ . Questa energia viene dissipata all'interno del filo il quale si scalda. Questo è precisamente il meccanismo di funzionamento di una stufa elettrica la quale, schematicamente, consiste di una resistenza che, attraversata da una corrente elettrica, produce calore. Per un altro esempio si pensi al riscaldamento di una comune lampadina a incandescenza.

Si determini ora quanta sia l'energia fornita da un generatore per fare scorrere una corrente di intensità  $i$  in un circuito di resistenza  $R$ . Se il circuito è attraversato dall'intensità di corrente  $i$  ciò significa che nell'intervallo di tempo  $\Delta t$  nel circuito scorre la carica elettrica  $\Delta q = i\Delta t$ ; Il generatore, quindi, per mantenere costante la d.d.p., deve riportare questa carica elettrica al punto a potenziale più alto, facendole quindi attraversare la d.d.p.  $V$ ; quindi compie il lavoro

$$\Delta\mathcal{L} = V\Delta q. \quad (8.23)$$

Particolarmente utile è il calcolo della potenza fornita dal generatore; essa, com'è noto è il lavoro per l'unità di tempo, quindi

$$P = \frac{\Delta\mathcal{L}}{\Delta t} = V\frac{\Delta q}{\Delta t} = Vi = Ri^2 = \frac{V^2}{R}. \quad (8.24)$$

Questa è anche la potenza dissipata nella resistenza e quindi, rifacendosi all'esempio citato sopra, è la potenza calorica fornita dalla stufa elettrica.

Al solito, quanto detto vale se la  $i$  che scorre nel circuito, e quindi la d.d.p. applicata, sono costanti. In caso contrario, la quantità di carica elettrica che fluisce nell'intervallo di tempo  $\Delta t$  varia. Nel caso generale di una corrente elettrica di intensità variabile, quindi è necessario definire una potenza istantanea mediante la derivata

$$P = \frac{d\mathcal{L}}{dt} = V\frac{dq}{dt} = Vi. \quad (8.25)$$

l'equazione trovata sopra per la potenza fornita dal generatore e dissipata nel circuito, quindi, vale in generale sia nel caso di corrente continua che nel caso di corrente variabile.

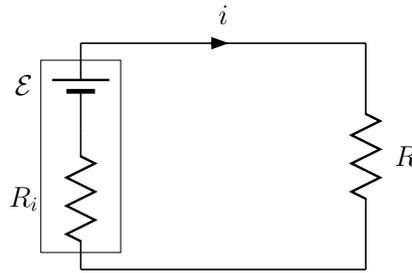
### Osservazioni

1. Il riscaldamento delle resistenze attraversate dalla corrente elettrica è un fenomeno noto come **effetto Joule**<sup>3</sup>. In termini molto qualitativi, questo fenomeno si può ricondurre al fatto che gli elettroni che scorrono nel filo conduttore grazie alla f.e.m. fornita dal generatore urtando contro gli atomi che trovano sulla loro strada cedono ad essi parte della propria energia cinetica e ne aumentano l'energia di vibrazione.

Questa microscopica energia di vibrazione atomica è quella che macroscopicamente è percepita come temperatura.

Un generatore di tensione ideale è un dispositivo che fornisce una f.e.m. senza dissipare; questo è evidentemente irrealistico. È opportuno tenere conto del fatto che all'interno del generatore vi è una *resistenza interna*  $R_i$  sulla quale viene dissipata parte dell'energia fornita dal generatore. La situazione può essere rappresentata mediante la figura 8.5.

<sup>3</sup> James Prescott Joule (1818-1889), fisico inglese.



**Figura 8.5:** La resistenza interna.

In termini di potenza si scrive

$$\mathcal{E}i = Ri^2 + R_i i^2, \quad (8.26)$$

ove il termine al primo membro è la potenza fornita dal generatore, mentre al secondo membro si trovano le potenze dissipate rispettivamente su  $R$  e sulla resistenza interna  $R_i$ . Da questa equazione è possibile determinare  $i$ :

$$i = \frac{\mathcal{E}}{R + R_i}; \quad (8.27)$$

che è l'intensità della corrente elettrica che scorre nel circuito; in particolare scorre attraverso la resistenza  $R$ . Utilizzando la prima legge di Ohm si può trovare la d.d.p. applicata ai capi di  $R$ .

$$V = Ri = \frac{R}{R + R_i} \mathcal{E}, \quad (8.28)$$

che, come si vede, è minore della f.e.m. realmente fornita dal generatore. Si osservi che la d.d.p. è uguale alla f.e.m. nel caso ideale in cui la resistenza interna del generatore è nulla. Si osservi d'altra parte che quanto più la resistenza esterna  $R$  è grande rispetto alla resistenza interna, tanto più la differenza fra d.d.p. e f.e.m. diviene piccola.

Quest'ultima osservazione suggerisce un metodo empirico per la misura della f.e.m. di un generatore. Infatti se nell'equazione (8.28) si prende il limite per  $R \rightarrow \infty$  si ottiene  $V = \mathcal{E}$ ; ma per tale limite non vi è passaggio di cariche elettriche. Il circuito è quindi interrotto. Posso quindi concludere affermando che una misura della d.d.p. ai capi del generatore quando il circuito è aperto fornisce esattamente la f.e.m. del generatore. In quel che segue ci si mette nella situazione ideale in cui la resistenza interna sia trascurabile.

## 8.6 COLLEGAMENTI DI PIÚ RESISTENZE.

In questa sezione vengono analizzate le proprietà dei circuiti costruiti collegando ad un generatore più resistenze.

### 8.6.1 RESISTENZE IN SERIE.

Si consideri il circuito in figura

Si osservi che l'intensità di corrente che scorre nelle due resistenze è la stessa; infatti la carica elettrica che passa attraverso la prima resistenza passa anche attraverso la seconda dando quindi origine alla medesima  $i$ . Due resistenze che in un circuito siano percorse dalla stessa intensità di corrente si dicono collegate **in serie**.

Considerando che, convenzionalmente i tratti continui hanno resistenza nulla e quindi non c'è d.d.p. ai loro capi, la d.d.p. ai capi di  $R_1$  è  $V_{AB}$  mentre la d.d.p. ai capi di  $R_2$  è  $V_{BC}$ . Quindi vale

$$V = V_{AB} + V_{BC}, \quad (8.29)$$

ma per la prima legge di Ohm deve valere  $V_{AB} = R_1 i$  e  $V_{BC} = R_2 i$  quindi

$$V = R_1 i + R_2 i = (R_1 + R_2) i. \quad (8.30)$$

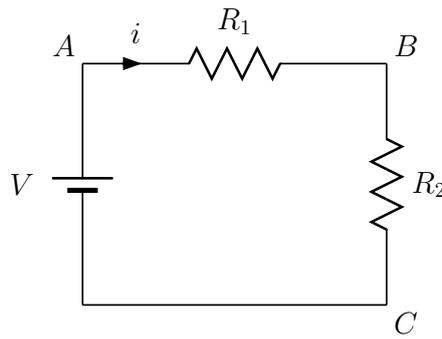


Figura 8.6: Due resistenze in serie.

Quindi due resistenze collegate in serie si comportano come una sola resistenza equivalente  $R$  per cui valga la relazione

$$R = R_1 + R_2 . \quad (8.31)$$

La  $R$  è detta **resistenza equivalente**. La cosa si può facilmente generalizzare al caso di  $N$  resistenze in serie:

$$R = R_1 + \dots + R_N . \quad (8.32)$$

### 8.6.2 RESISTENZE IN PARALLELO.

Si consideri il circuito in figura.

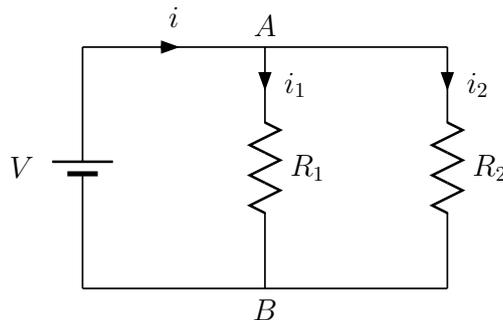


Figura 8.7: Due resistenze in parallelo.

Si osservi che ai capi delle due resistenze si trova la stessa d.d.p.

$$V = V_{AB} . \quad (8.33)$$

Due resistenze che in un circuito si trovino alla stessa d.d.p. si dicono collegate **in parallelo**. Utilizzando la prima legge di Ohm si ricavano le intensità di corrente  $i_1$  e  $i_2$  circolanti in  $R_1$  ed  $R_2$ :

$$i_1 = \frac{V}{R_1} \quad , \quad i_2 = \frac{V}{R_2} . \quad (8.34)$$

Si osservi inoltre che, con riferimento alla figura 8.7, vale la relazione

$$i = i_1 + i_2 , \quad (8.35)$$

infatti le cariche elettriche che provengono dal generatore, giunte in  $A$  proseguono necessariamente o attraverso  $R_1$  o attraverso  $R_2$ ; quindi le cariche elettriche che escono dal generatore, che danno  $i$ , sono uguali alla somma delle cariche elettriche che passano per  $R_1$ , che danno  $i_1$ , più quelle che passano per  $R_2$ , che danno  $i_2$ ; da cui si ottiene la (8.35); vale allora

$$i = \frac{V}{R_1} + \frac{V}{R_2} = V \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) . \quad (8.36)$$

Quindi due resistenze collegate in parallelo hanno resistenza equivalente  $R$  data da

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \quad \longrightarrow \quad R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}. \quad (8.37)$$

## 8.7 SCARICA E CARICA DI UN CONDENSATORE. IL CIRCUITO RC.

Vengono qui esaminati in qualche dettaglio i processi di carica e scarica di un condensatore. Nel primo caso le armature del condensatore inizialmente cariche elettriche vengono fra loro collegate tramite un filo conduttore. Nel secondo caso il condensatore, inizialmente scarico, viene caricato collegandolo ad un generatore di tensione tramite un filo conduttore.

### 8.7.1 IL PROCESSO DI SCARICA.

Si consideri un condensatore di capacità  $C$  sulle cui armature si trovi inizialmente la carica elettrica  $Q_0$  e quindi si trovino alla d.d.p.  $V_0 = \frac{Q_0}{C}$ ; si colleghino le due armature tramite un filo elettrico di resistenza  $R$ . Lungo il circuito si trovi l'interruttore  $K$  aperto.

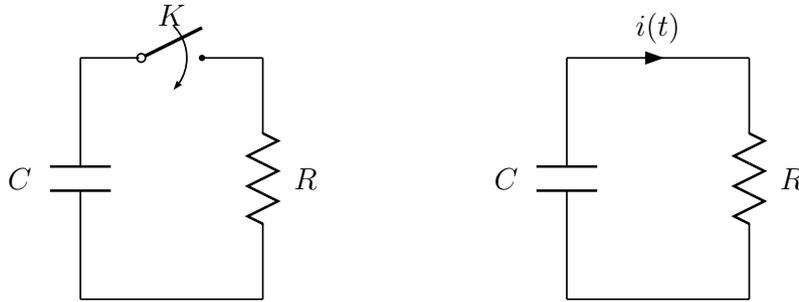


Figura 8.8: Il processo di scarica.

All'istante  $t = 0$  l'interruttore viene chiuso; la corrente elettrica comincia a scorrere e la carica elettrica sulle armature a diminuire. Si osservi che la carica elettrica che lascia l'armatura positiva è la stessa che si ritrova come corrente elettrica lungo il filo, fra la carica elettrica  $q(t)$  presente sulle armature e l'intensità della corrente elettrica che circola nel filo è quindi possibile scrivere la seguente relazione

$$i(t) = -\frac{dq(t)}{dt}, \quad (8.38)$$

il segno meno è dovuto al fatto che la derivata è negativa, visto che la carica elettrica che si trova sulle armature diminuisce nel tempo. La tensione ai capi del generatore deve essere in ogni istante uguale alla tensione ai capi della resistenza, quindi

$$\frac{q(t)}{C} = Ri(t) = -R \frac{dq(t)}{dt}, \quad (8.39)$$

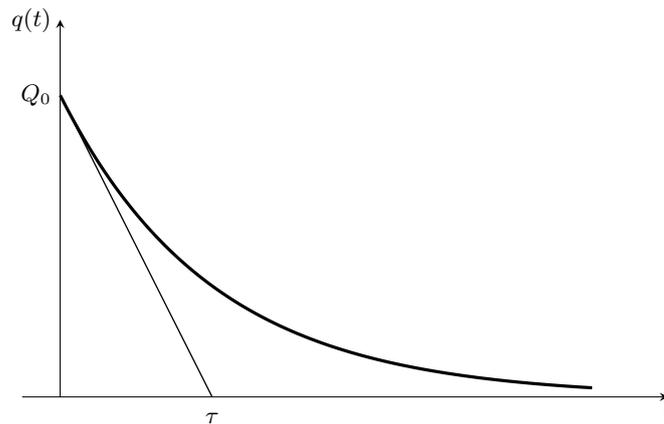
che integrata dà:

$$\int_0^t dt = -RC \int_{Q_0}^{q(t)} \frac{dq}{q} \quad \longrightarrow \quad t = -RC \log \frac{q(t)}{Q_0} \quad \longrightarrow \quad q(t) = Q_0 e^{-t/\tau}, \quad (8.40)$$

$\tau = \frac{1}{RC}$  è detto **tempo caratteristico** del circuito  $RC$ . La carica elettrica sulle armature del condensatore quindi decresce con legge esponenziale. Per capire il significato fisico di  $\tau$ , si consideri il grafico della funzione  $q(t)$  e si tracci la retta tangente nel punto avente ascissa nulla, cioè all'istante iniziale. Questa retta ha equazione

$$q(t) = Q_0 \left(1 - \frac{t}{\tau}\right); \quad (8.41)$$

l'intersezione di questa retta con l'asse dei tempi (le ascisse) si per  $t = \tau$ ; evidentemente quindi più piccolo è  $\tau$  più è ripida la curva della scarica e quindi più velocemente si scarica il condensatore.



**Figura 8.9:** La carica elettrica sulle armature in funzione del tempo.

Il tempo necessario ad una scarica completa è naturalmente infinito, visto che la curva di scarica ha un asintoto orizzontale, tuttavia, tanto minore è  $\tau$  tanto più velocemente la carica elettrica arriva a valori trascurabili. Per trovare la legge con cui varia l'intensità della corrente elettrica che scorre nel circuito durante il processo di carica, basta usare la (8.38):

$$i(t) = -\frac{dq(t)}{dt} = \frac{Q_0}{RC} e^{-t/\tau} = \frac{V_0}{R} e^{-t/\tau} . \quad (8.42)$$

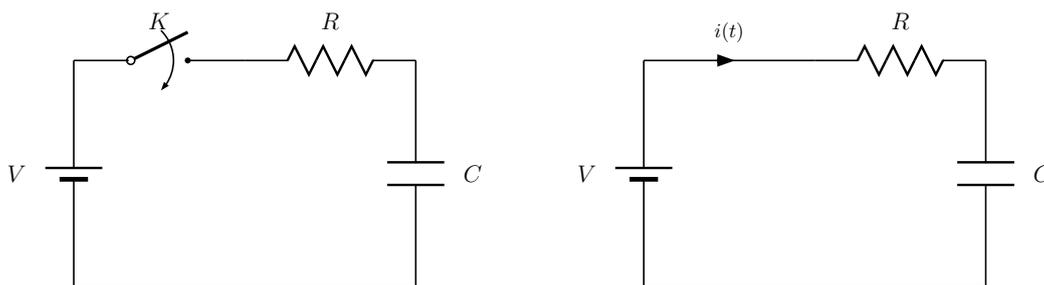
Similmente si possono calcolare le d.d.p. ai capi di  $R$  e di  $C$ :

$$V_R(t) = Ri(t) = V_0 e^{-t/\tau} , \quad V_C(t) = \frac{q(t)}{C} = \frac{Q_0}{C} e^{-t/\tau} = V_0 e^{-t/\tau} , \quad (8.43)$$

che sono, come era ovvio aspettarsi, uguali.

### 8.7.2 IL PROCESSO DI CARICA.

Si consideri ora un condensatore di capacità  $C$  inizialmente scarico che si voglia caricare per mezzo di un generatore di tensione  $V_0$  cui è collegato tramite un filo conduttore di resistenza  $R$  su cui sia presente un interruttore.



**Figura 8.10:** Il processo di carica.

All'istante  $t = 0$  l'interruttore viene chiuso; la corrente elettrica comincia a scorrere e la carica elettrica sulle armature ad aumentare. Un ragionamento simile a quello fatto sopra per il processo di scarica porta all'equazione

$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt} , \quad (8.44)$$

ove ora c'è il segno più perché la derivata è positiva. La tensione  $V_0$  ai capi del generatore è quindi uguale alla somma delle tensioni ai capi di  $R$  e di  $C$ , quindi

$$V_0 = Ri(t) + \frac{q(t)}{C} = R \frac{dq(t)}{dt} + \frac{q(t)}{C} , \quad (8.45)$$

da cui si ottiene

$$\frac{dq(t)}{dt} = \frac{1}{RC} [CV_0 - q(t)] , \quad (8.46)$$

che integrata dà

$$\int_0^{q(t)} \frac{1}{CV_0 - q(t)} dq = \frac{1}{\tau} \int_0^t dt , \quad (8.47)$$

Con la sostituzione  $x = CV_0 - q(t)$ ,  $dx = -dq$  il primo integrale diviene

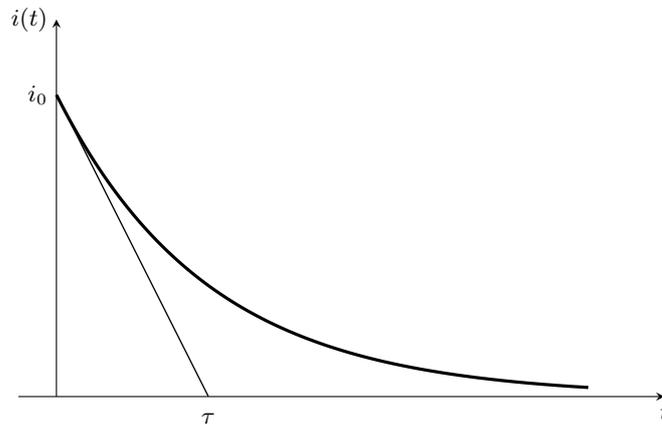
$$\int_0^{q(t)} \frac{1}{CV_0 - q(t)} dq = -\log \frac{CV_0 - q(t)}{CV_0} , \quad (8.48)$$

quindi (8.47) diventa

$$\log \frac{CV_0 - q(t)}{CV_0} = -\frac{t}{\tau} \quad \rightarrow \quad \frac{CV_0 - q(t)}{CV_0} = e^{-t/\tau} \quad \rightarrow \quad q(t) = CV_0 (1 - e^{-t/\tau}) . \quad (8.49)$$

La corrente che circola è

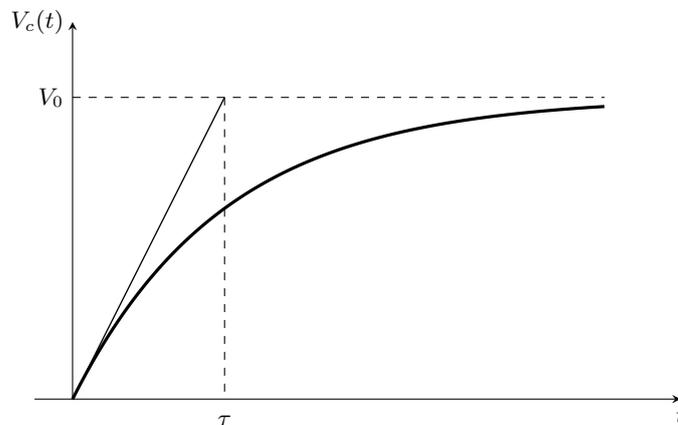
$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt} = \frac{CV_0}{\tau} e^{-t/\tau} = \frac{V_0}{R} e^{-t/\tau} . \quad (8.50)$$



**Figura 8.11:** L'intensità della corrente elettrica in funzione del tempo.

Le d.d.p. ai capi di  $R$  e di  $C$  sono

$$V_R(t) = Ri(t) = V_0 e^{-t/\tau} , \quad V_C(t) = \frac{q(t)}{C} = V_0 (1 - e^{-t/\tau}) . \quad (8.51)$$



**Figura 8.12:** L'intensità della d.d.p. ai capi di  $C$  in funzione del tempo.

È istruttivo considerare il bilancio delle energie in gioco nel circuito. La potenza fornita dal generatore all'istante  $t$  è

$$P(t) = V_0 i(t) = \frac{V_0^2}{R} e^{-t/\tau} . \quad (8.52)$$

Sulla resistenza viene dissipata la potenza

$$P_R(t) = V_R(t) i(t) = R i^2(t) = \frac{V_0^2}{R} e^{-2t/\tau} . \quad (8.53)$$

Per quel che riguarda il condensatore, si osservi che l'energia accumulata nel condensatore è  $W = \frac{q^2(t)}{2C}$ , quindi la potenza è la derivata temporale di  $W$ , quindi

$$P_C(t) = \frac{d}{dt} \frac{1}{2} \frac{q^2(t)}{C} = \frac{q(t)}{C} \frac{dq(t)}{dt} = V_C(t) i(t) = \frac{V_0^2}{R} (1 - e^{-t/\tau}) e^{-t/\tau} = \frac{V_0^2}{R} (e^{-t/\tau} - e^{-2t/\tau}) . \quad (8.54)$$

Coerentemente con il principio di conservazione dell'energia, vale la relazione

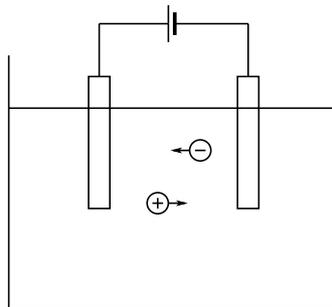
$$P(t) = P_R(t) + P_C(t) . \quad (8.55)$$

## 8.8 IL PASSAGGIO DI CARICHE ELETTRICHE NELLE SOLUZIONI.

Si è visto sopra, discutendo la pila di Volta, che le soluzioni consentono il passaggio di cariche elettriche; in questa sezione si vuole dare una descrizione teorica dei fenomeni in questione. Si consideri quindi un recipiente in cui sia contenuta dell'acqua in cui sia disciolto un composto ionico. Questo può essere un sale, per esempio NaCl che si dissocia negli ioni  $\text{Na}^+$  e  $\text{Cl}^-$ ; o un idrossido di elementi del primo o del secondo gruppo, per esempio NaOH che si dissocia negli ioni  $\text{Na}^+$  e  $\text{OH}^-$ ; o un acido forte, per esempio  $\text{H}_2\text{SO}_4$  che si dissocia in  $2\text{H}^+$  e  $\text{SO}_4^{2-}$  o HCl che si dissocia reagendo con l'acqua:



In questa soluzione, che viene detta **soluzione elettrolitica**, si immergono due lamine metalliche, dette **elettrodi**, collegati ad un generatore di tensione: l'elettrodo collegato al polo positivo viene detto **anodo**, mentre quello collegato al polo negativo viene detto **catodo**. Nella soluzione si trovano gli ioni carichi che risentono del campo elettrico presente fra gli elettrodi e si muovono verso l'elettrodo di segno opposto: gli ioni positivi, detti **cationi**, si muovono verso il catodo e gli ioni negativi, detti **anioni** si muovono verso l'anodo. Quando gli ioni raggiungono gli elettrodi avviene una reazione durante la quale gli ioni depositano la loro carica elettrica sull'elettrodo permettendo quindi il passaggio della carica elettrica attraverso il circuito metallico esterno.



**Figura 8.13:** Una cella elettrolitica.

L'insieme di processi che avvengono in una soluzione elettrolitica al passaggio della corrente elettrica prende il nome di **elettrolisi**. Si considerino i seguenti esempi.

**1.** In soluzione vi è acido cloridrico. Ogni ione  $\text{Cl}^-$  che arriva all'anodo che si neutralizza cedendo un elettrone secondo la reazione



formando quindi molecole di  $\text{Cl}_2$  gassoso che si liberano gorgogliando. Allo stesso tempo ogni ione  $\text{H}_3\text{O}^+$  che giunge al catodo si neutralizza acquistando un elettrone secondo la reazione

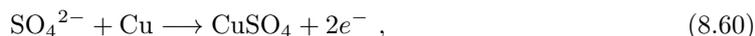


formando quindi molecole di  $\text{H}_2$  gassoso che si liberano gorgogliando.

**2.** In soluzione vi è solfato d'argento  $\text{Ag}_2\text{SO}_4$ , dissociato negli ioni  $2\text{Ag}^+$  ed  $\text{SO}_4^{2-}$ ; inoltre l'anodo è costituito da un elettrodo di rame. Al catodo ogni ione d'argento si neutralizza acquistando un elettrone secondo la reazione



formando atomi d'argento che si depositano sul catodo. All'anodo l'anione  $\text{SO}_4^{2-}$  reagisce con il rame dell'elettrodo depositando due elettroni secondo la reazione



si forma in questo modo una molecola di solfato di rame che resta in soluzione.

## 8.9 LE LEGGI DI FARADAY.

L'elettrolisi, che sopra è stata descritta qualitativamente, è descritta quantitativamente dalle seguenti leggi.

**Prima legge di Faraday.** *La massa di una sostanza che si libera ad un elettrodo di una cella elettrolitica è direttamente proporzionale alla quantità di carica elettrica che ha attraversato la soluzione e la costante di proporzionalità viene detta **equivalente elettrochimico** della sostanza in questione.*

**Seconda legge di Faraday.** *Date diverse celle elettrolitiche attraversate dalla stessa quantità di carica elettrica, le masse delle sostanze che si liberano agli elettrodi sono direttamente proporzionali ai rispettivi equivalenti elettrochimici.*

È possibile rendere conto teoricamente di queste leggi trovate da Faraday sperimentalmente. Si supponga che attraverso la soluzione elettrolitica siano transitate  $n$  moli di una sostanza avente massa molare  $M_0$ , allora la massa totale liberata all'elettrodo è

$$M = nM_0 . \quad (8.61)$$

Sia  $F$  la carica elettrica portata da una mole di ioni monovalenti; allora la carica elettrica portata da una mole di ioni bivalenti è  $2F$  e quella portata da una mole di ioni di valenza  $\nu$  è  $\nu F$ ; se poi transitano  $n$  moli di ioni di valenza  $\nu$  la carica elettrica totale transitata attraverso la soluzione è

$$Q = n\nu F . \quad (8.62)$$

Mettendo insieme i risultati delle ultime due equazioni si ottiene

$$M = \frac{M_0}{\nu F} Q . \quad (8.63)$$

La costante  $F$ , la carica elettrica di una mole di ioni monovalenti, è stata misurata da Faraday e da allora prende il nome di **costante di Faraday**, ed il suo valore è<sup>4</sup>

$$F = 96\,485.333\,212 \text{ C mol}^{-1} , \quad (8.64)$$

anche se viene spesso approssimato al valore 96500.

Si osservi che l'equazione (8.63) è la forma matematica della prima legge di Faraday, ove si identifichi l'equivalente elettrochimico con la quantità  $M_0/\nu F$ .

Si osservi inoltre che la medesima equazione (8.63) dice anche che, a parità di  $Q$ , per diverse celle elettrolitiche, la massa  $M$  è proporzionale all'equivalente chimico, che è il contenuto della seconda legge di Faraday.

<sup>4</sup> Si veda il sito del NIST: <https://physics.nist.gov/cuu/Constants/index.html>. La costante è considerata esatta.

**Osservazioni**

1. L'interpretazione data delle leggi di Faraday poggia essenzialmente sul modello atomico della materia che, ai tempi di Faraday era ancora solo un'ipotesi. La bontà di tale interpretazione è da considerarsi come un importante sostegno teorico all'ipotesi atomica.
2. La costante di Faraday è la carica elettrica di una mole di ioni monovalenti. Indicata con  $e$  il valore della carica elettrica di uno di questi ioni e con  $N_A$  il numero di elementi costituenti una mole (il numero di Avogadro<sup>5</sup>) è chiaro che posso scrivere

$$F = eN_A , \tag{8.65}$$

quindi la misura del numero di Avogadro è anche una misura indiretta della carica elettrica elementare.

---

<sup>5</sup> Amedeo Avogadro (1776-1856), giurista e fisico matematico di Torino.

# 9

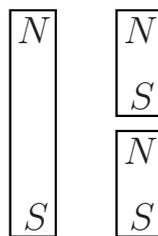
## MAGNETOSTATICA.

---

Le proprietà magnetiche della materia, come quelle elettriche, sono note fin dall'antichità. Il nome stesso deriva da quello della antica città di *Magnesia* in Asia minore dove veniva estratto un minerale, che oggi viene chiamato *magnetite* (ed è un ossido di ferro:  $\text{FeO}\cdot\text{Fe}_2\text{O}_3$ ); pezzi di questo minerale hanno la proprietà di attrarre il ferro e di avere reciproche interazioni di attrazione e repulsione con altri pezzi di magnetite. In periodo medievale, verso il 1100, si diffuse nel Mediterraneo l'uso della bussola come ausilio alla navigazione; questa, come oggi, era costituita di un sottile e leggero ago di magnetite che, sospeso sul suo baricentro si orientava nella direzione nord-sud. Si osservò inoltre che ogni pezzo di magnetite (detto magnete naturale) ha la proprietà di orientarsi in modo che due punti si disponessero nella direzione nord-sud. Questi due punti, che si osservarono anche coincidere con i punti in cui il magnete esercita maggiormente la sua forza attrattiva, vennero detti **poli magnetici**: polo nord quello che tende a disporsi verso nord e polo sud quello che tende a disporsi verso sud. Si osservò inoltre che poli dello stesso tipo si respingono mentre poli di tipo diverso si attraggono. Nel 1600 Gilbert pubblicò il *De magnete* in cui sostenne che la spiegazione del funzionamento della bussola sta nel fatto che la Terra stessa è un enorme magnete con il polo sud nei pressi del polo nord geografico e quindi verso qui viene attratto il polo nord dell'ago della bussola. Gilbert sostenne la sua tesi con vari esperimenti, fra questi è da notare che egli si procurò una sfera di magnetite, che chiamò *terrella*, e osservò che l'ago di una bussola posta sulla sua superficie si disponeva sempre lungo un 'meridiano' della sfera di magnetite, in perfetta analogia con quanto accade sulla superficie terrestre. Coulomb studiò quantitativamente le interazioni fra magneti a giunse a formulare una legge simile a quella valida per le interazioni fra cariche elettriche

$$F = k \frac{m_1 m_2}{r^2}, \quad (9.1)$$

ove  $m_1$  ed  $m_2$  sono dette cariche magnetiche dei poli del magnete. Il problema di questa legge è che non esistono cariche magnetiche isolate. Considerando un magnete e spezzandolo cercando di separare i due poli si ottengono due nuovi magneti ciascuno completo delle sue due polarità.



**Figura 9.1:** Inseparabilità dei poli magnetici.

Questa proprietà porta ad abbandonare la descrizione dei magneti in termini di poli magnetici ed ad adottare una descrizione in termini di dipoli magnetici, in analogia a quanto visto per i dipoli elettrici. Su ciò si tornerà più avanti.

Il primo esperimento che cominciò a gettare della luce sui meccanismi magnetici fu fatto nel 1820 da Ørsted<sup>1</sup> che misurò l'azione di una corrente elettrica su di un ago di bussola dimostrando quindi che una corrente elettrica genera effetti magnetici. L'esperimento di Ørsted generò un grande interesse in tutta Europa e ovunque si eseguirono esperimenti per indagare ulteriormente le relazioni fra elettricità e magnetismo.

<sup>1</sup> Hans Christian Ørsted (1777-1851), fisico danese.

Particolare importanza riveste il lavoro di Ampère<sup>2</sup> che studiò le mutue interazioni fra correnti elettriche giungendo a riconoscere che tutti i fenomeni magnetici sono originati da una corrente elettrica e formulando un principio di equivalenza, su cui si tornerà oltre, fra il dipolo magnetico ed una spira percorsa da corrente.

### Osservazioni

1. Il lavoro di Ampère consente di individuare una proprietà comune di tutte le interazioni a distanza finora incontrate: la gravitazionale, l'elettrica e la magnetica. In tutti e tre i casi si tratta di forza che agiscono fra oggetti dello stesso tipo: le masse per la forza gravitazionale, le cariche elettriche per la forza elettrica e le correnti per la forza magnetica.
2. È già noto che l'interazione gravitazionale fra due masse può essere utilmente descritta in termini di un campo gravitazionale generato da una massa ed agente sull'altra massa (o viceversa); similmente l'interazione elettrica fra due cariche elettriche viene descritta in termini di un campo elettrico generato da una carica elettrica ed agente sull'altra. Si tratta quindi di vedere se sia possibile descrivere anche l'interazione magnetica fra correnti in termini di un campo magnetico.

In quel che segue verrà introdotto il concetto di campo magnetico e quindi analizzata dapprima la sua azione sulle cariche elettriche in movimento e sulle correnti, quindi quale sia la relazione fra il campo magnetico e le correnti che lo hanno generato.

## 9.1 IL CAMPO MAGNETICO.

Sperimentalmente si verifica che un corpo dotato di carica elettrica  $q$  e di velocità  $\mathbf{v}$  è sottoposto, in presenza di un magnete o di una corrente elettrica, ad una forza con le seguenti proprietà:

- a) la direzione della forza è perpendicolare alla direzione del vettore  $\mathbf{v}$ ;
- b) il modulo della forza è proporzionale a  $q$  e al modulo  $v$  della velocità; nel caso che la carica elettrica sia ferma la forza è nulla;
- c) la direzione della forza è sempre perpendicolare ad una certa fissata direzione dello spazio;
- d) l'intensità della forza è nulla quando  $\mathbf{v}$  è parallela a questa certa direzione ed è massima quando le è perpendicolare;
- e) la forza agente su di una carica elettrica positiva ha la stessa direzione ma verso opposto rispetto alla forza agente su di una carica elettrica negativa, a parità delle altre condizioni.

Tutte queste proprietà vengono correttamente descritte definendo in ogni punto dello spazio un vettore  $\mathbf{B}$  diretto nella direzione individuata dalla proprietà c) e tale che la forza sulla carica elettrica  $q$  possa venir espressa dalla seguente equazione

$$\mathbf{F} = q\mathbf{v} \wedge \mathbf{B} . \quad (9.2)$$

Il vettore  $\mathbf{B}$  è detto **campo magnetico**. La forza definita dall'equazione (9.2) è detta **forza di Lorentz**<sup>3</sup> agente sulla carica elettrica  $q$ .

<sup>2</sup> André Marie Ampère (1775-1836) fisico francese.

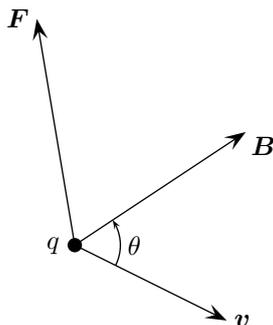
<sup>3</sup> Hendrick Antoon Lorentz (1853-1928), fisico olandese.

### Osservazioni

1. L'equazione (9.2), deve essere considerata una *definizione operativa* del campo magnetico.
2. Si osservi che, indicato con  $\theta$  l'angolo formato dalle direzioni di  $\mathbf{v}$  e di  $\mathbf{B}$ , il modulo della forza di Lorentz è dato da

$$F = qvB \sin \theta . \quad (9.3)$$

3. Richiamando la definizione di prodotto vettoriale, si fa presente che la direzione della forza è quella perpendicolare al piano su cui giacciono i vettori  $\mathbf{v}$  e  $\mathbf{B}$ .



**Figura 9.2:** La forza di Lorentz.

Per determinarne il verso occorre tenere presente che i tre vettori  $\mathbf{v}$ ,  $\mathbf{B}$  e  $\mathbf{F}$  devono costituire una terna levogira, essere cioè disposti come gli assi  $x$ ,  $y$  e  $z$  di un sistema di assi cartesiani; questo si realizza osservando che la rotazione che porta a sovrapporre il primo vettore del prodotto vettoriale,  $\mathbf{v}$ , sul secondo,  $\mathbf{B}$  deve essere vista in senso antiorario dal vettore risultante  $\mathbf{F}$ .

4. L'unità di misura del campo magnetico è detta **tesla**<sup>4</sup>, simbolo T; è a volte usato anche il sottomultiplo *gauss*, simbolo G:  $1 \text{ T} = 10^4 \text{ G}$  La dimensioni del tesla sono

$$[\text{T}] = [\text{N A}^{-1} \text{s}^{-1}] . \quad (9.4)$$

5. Come visto nella forza di Lorentz,  $\mathbf{F}$  è sempre perpendicolare al piano di  $\mathbf{v}$  e  $\mathbf{B}$ ; per una corretta comprensione dei fenomeni magnetici è quindi indispensabile la rappresentazione tridimensionale dei vettori. In particolare è molto frequente la necessità di rappresentare vettori, o correnti elettriche, perpendicolari al foglio, entranti od uscenti. Si introduce quindi la seguente notazione: il simbolo  $\odot$  rappresenta un vettore o una corrente uscenti dal foglio, mentre il simbolo  $\otimes$  rappresenta un vettore o una corrente entranti nel foglio.

Si osservi che, essendo la forza di Lorentz sempre perpendicolare alla velocità della carica elettrica, il lavoro fatto sulla carica elettrica per uno spostamento  $\Delta \mathbf{s}$  è sempre nullo:

$$\mathcal{L} = \mathbf{F} \cdot \Delta \mathbf{s} = (q\mathbf{v} \wedge \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{v}\Delta t) = 0 , \quad (9.5)$$

la forza di Lorentz quindi non può variare il modulo della velocità di una carica elettrica, e quindi la sua energia cinetica, ma solo deviarne la traiettoria.

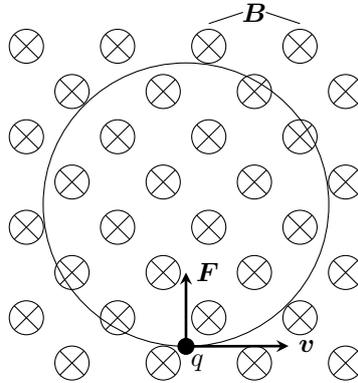
## 9.2 MOTO DI CARICHE ELETTRICHE IN UN CAMPO MAGNETICO.

In quel che segue verranno analizzati i tipi di moti che una carica elettrica può avere se si trova in una regione dello spazio in cui sia presente un campo magnetico.

<sup>4</sup> Nicholas Tesla (1857-1943), ingegnere croato.

**9.2.1 MOTO CIRCOLARE UNIFORME.**

Si consideri il caso in cui una carica elettrica positiva  $q$  si trovi ad avere, all'istante  $t$ , una velocità  $\mathbf{v}$  di modulo perpendicolare ad un campo magnetico costante ed uniforme  $\mathbf{B}$ , in figura rappresentato entrante nel foglio.



**Figura 9.3:** Moto circolare.

In questo caso la forza di Lorentz è in ogni punto perpendicolare alla velocità ed ha modulo costante pari a

$$F = qvB . \tag{9.6}$$

La forza in ogni punto perpendicolare alla velocità genera, com'è noto, un moto circolare uniforme di accelerazione centripeta

$$a = \frac{F}{m} = \frac{qv}{m} B = \frac{v^2}{r} , \tag{9.7}$$

da cui si ottengono il raggio della traiettoria circolare

$$r = \frac{mv}{qB} , \tag{9.8}$$

il periodo e la frequenza

$$T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi m}{qB} , \quad \nu = \frac{qB}{2\pi m} , \tag{9.9}$$

e la velocità angolare

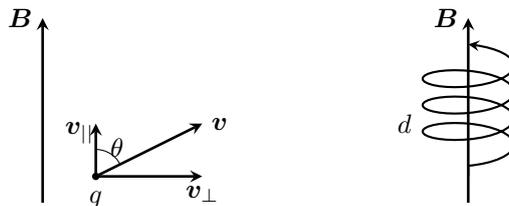
$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{qB}{m} . \tag{9.10}$$

Nel caso in cui la carica elettrica  $q$  sia negativa, la discussione resta invariata, cambia solo il verso di percorrenza della traiettoria circolare.

**9.2.2 MOTO ELICOIDALE.**

Si consideri ora il caso in cui la velocità non abbia direzione perpendicolare al campo magnetico ma formi con la direzione del campo un angolo diverso da novanta gradi. In questo caso è possibile scomporre il vettore  $\mathbf{v}$  in due componenti, una parallela ed una perpendicolare a  $\mathbf{B}$ :

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_{||} + \mathbf{v}_{\perp} . \tag{9.11}$$



**Figura 9.4:** Moto elicoidale.

Allora per la forza di Lorentz posso scrivere

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{v}_{\parallel} + \mathbf{v}_{\perp}) \wedge \mathbf{B} = q\mathbf{v}_{\perp} \wedge \mathbf{B} , \tag{9.12}$$

ed il moto della carica elettrica  $q$  viene determinato dalla composizione di due moti: quello di traiettoria circolare su un piano perpendicolare a  $\mathbf{B}$ , dovuto alla forza di Lorentz, di raggio

$$r = \frac{mv_{\perp}}{qB} , \tag{9.13}$$

e quello rettilineo uniforme con velocità  $\mathbf{v}_{\parallel}$  parallelo a  $\mathbf{B}$ . Il moto risultante è quindi elicoidale. Per determinare il passo  $d$  dell'elica, si osservi che esso è la distanza  $d$  percorsa dal moto uniforme nel tempo  $T$ , dato dalla prima delle (9.9), impiegato dal moto circolare a compiere un'intera circonferenza. Quindi, indicando con  $\theta$  l'angolo fra  $\mathbf{v}$  e  $\mathbf{B}$ , si ottiene

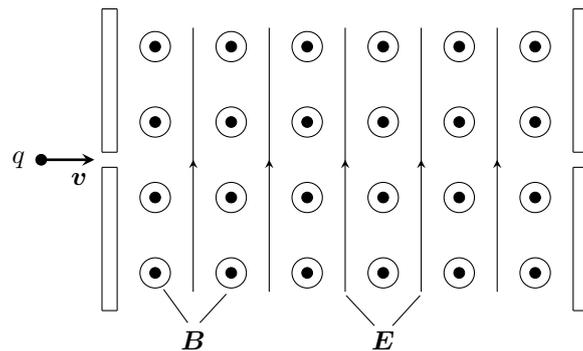
$$d = \frac{2\pi mv_{\parallel}}{qB} = \frac{2\pi mv}{qB} \cos \theta . \tag{9.14}$$

**Osservazioni**

1. Si osservi che nel caso particolare in cui  $\mathbf{v}$  sia parallela a  $\mathbf{B}$ , la forza di Lorentz è nulla e la carica elettrica si muove di moto rettilineo uniforme nella direzione di  $\mathbf{B}$  con velocità di modulo  $v$ .
2. Si sottolinea che i casi qui esaminati del moto circolare ed elicoidale, sono una descrizione corretta di ciò che accade solo se il campo magnetico è uniforme in tutto lo spazio interessato dal moto. Ove  $\mathbf{B}$  sia non costante l'analisi del moto risultante è più complicata e non viene affrontata in queste note.

**9.2.3 IL SELETTORE DI VELOCITÀ.**

Si supponga di disporre di una sorgente che emette, per esempio per effetto fotoelettrico o altro, particelle cariche di varie velocità e si supponga di voler ottenere invece uno fascio di particelle tutte con stessa velocità. Si può procedere secondo le linee seguenti.



**Figura 9.5:** Il selettore di velocità.

Con riferimento alla figura, si consideri una regione di spazio in cui si trovino un campo elettrico, volto verso l'alto, ed un campo magnetico uscente dal foglio, uniformi e fra loro perpendicolari. La particella di carica elettrica positiva  $q$ , che entri, attraverso una sottile fenditura, nella regione in cui si trovano i campi subisce una forza elettrica, di modulo  $F_E = qE$ , diretta verso l'alto ed una forza magnetica di modulo  $F_M = qvB$  diretta verso il basso. La forza totale quindi è nulla se

$$qE = qvB \quad \longrightarrow \quad v = \frac{E}{B} . \tag{9.15}$$

Con un'opportuna scelta dei valori di  $E$  e di  $B$ , è quindi possibile annullare la forza totale agente sulla carica elettrica che entri nel dispositivo con velocità  $v$  data dalla (9.15); questa quindi si muove di moto rettilineo ed uniforme e riesce a passare per la sottile fenditura che si trova in uscita. Particelle aventi velocità diverse da quella data dalla (9.15), vengono deviate e non passano; quindi si ottiene un fascio di particelle tutte con la stessa velocità. Si osservi, inoltre, che il dispositivo illustrato non distingue fra particelle con cariche elettriche differenti.

#### 9.2.4 LO SPETTROMETRO DI MASSA.

Si tratta ora di descrivere un dispositivo che consente di distinguere i diversi isotopi che compongono uno stesso elemento; questi, una volta ionizzati, si trovano ad avere la stessa carica elettrica ma una massa leggermente diversa (a causa, com'è noto, del diverso numero di neutroni che compongono il nucleo).

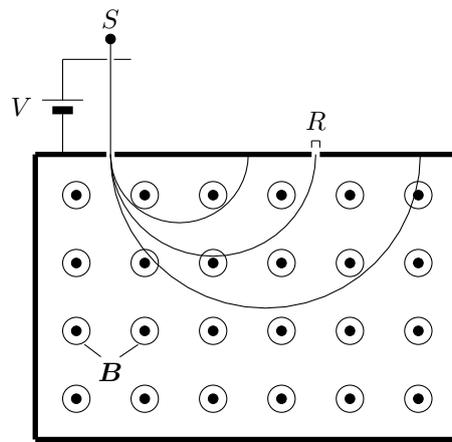


Figura 9.6: Lo spettrometro di massa.

Si consideri quindi una sorgente  $S$  di ioni di carica elettrica  $q$ , in figura 9.6 si sono presi in considerazione ioni negativi, di uno stesso elemento di cui si debbano distinguere gli isotopi. Si facciano collimare gli ioni in un fascio tramite due sottili fenditure allineate fra le quali si sia posta una d.d.p.  $V$  in modo che gli ioni che escono dalle fenditure abbiano una energia cinetica nota data

$$\frac{1}{2}mv^2 = qV ; \quad (9.16)$$

oltre le fenditure ciascuno ione viene a trovarsi in una zona ove è presente un campo magnetico uniforme e perpendicolare al foglio. Ogni ione da questo punto in poi percorre una traiettoria circolare di raggio dato dalla (9.8), per cui, ricavando  $v$  dall'equazione precedente si ottiene

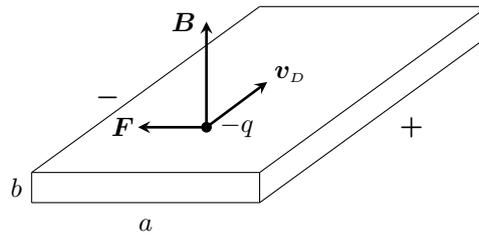
$$r = \frac{1}{B} \sqrt{\frac{2mV}{q}} , \quad (9.17)$$

da cui si vede che ioni con massa diversa percorrono traiettorie con raggi diverso e possono essere selezionati aprendo una fenditura nel punto corrispondente al raggio desiderato e contattati mediante il rivelatore  $R$ .

#### 9.2.5 L'EFFETTO HALL.

Si consideri un conduttore a forma di lamina sottile la cui sezione abbia lunghezza  $a$  e altezza  $b$ ; lungo la lamina si faccia passare la corrente elettrica di intensità  $i$ . Perpendicolare alla lamina vi sia un campo magnetico  $\mathbf{B}$ . Le cariche elettriche in moto risentono di una forza di Lorentz che le spinge trasversalmente fino a che non si accumula una d.d.p. sufficiente da equilibrare la forza di Lorentz. Tale d.d.p.  $V_H$  è detta **di Hall**<sup>5</sup>.

<sup>5</sup> Edwin Herbert Hall (1855-1938), fisico statunitense.



**Figura 9.7:** Il dispositivo per l'effetto Hall.

In condizione di equilibrio, quindi vale

$$qv_D B = q \frac{V_H}{a} \quad \longrightarrow \quad V_H = v_D B a . \quad (9.18)$$

In questa equazione  $v_D$  è la velocità dello spostamento delle cariche elettriche che danno origine alla corrente elettrica. Questa velocità è legata alla densità di corrente  $\mathbf{j}$  dall'equazione (8.6), l'intensità di corrente quindi può venire scritta nella forma, si veda anche l'equazione (8.3):

$$i = \mathbf{j} \cdot \mathbf{n} ab = Nq\mathbf{v}_D \cdot \mathbf{n} ab = Nqv_D ab , \quad (9.19)$$

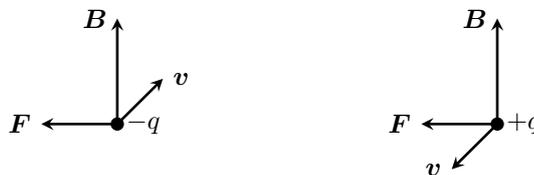
quindi

$$v_D = \frac{i}{Nq ab} \quad \longrightarrow \quad V_H = \frac{Bi}{Nqb} . \quad (9.20)$$

Questa espressione della d.d.p. di Hall si rivela preziosa perché può essere utilizzata nella costruzione di vari dispositivi. In particolare, se misurata la  $V_H$  in condizioni in cui si conoscano  $B$ ,  $i$  e  $q$ , solitamente abbastanza facili da determinare, la (9.20) può essere utilizzata per determinare la densità volumica  $N$  delle cariche elettriche in movimento. Se viene utilizzata una lamina di un conduttore per cui  $N$  sia noto, l'effetto Hall può essere utilizzato per la misura di  $B$ .

### Osservazioni

1. Il segno della  $V_H$  dipende dal segno dei portatori di carica elettrica. In figura 9.7 è rappresentato un moto di cariche elettriche negative e quindi la corrente fluisce in senso inverso alle cariche elettriche. Per aver la stessa corrente con cariche elettriche positive, è necessario che fluiscano in senso inverso, dando quindi origine ad una  $V_H$  di segno opposto. Quindi dalla misura del segno della d.d.p. di Hall è possibile determinare il segno dei portatori di carica elettrica.



**Figura 9.8:** Determinazione del segno dei portatori di carica elettrica.

In entrambe le situazioni rappresentate in figura la corrente scorre nello stesso verso, e la forza di Lorentz spinge nello stesso verso cariche elettriche di segno opposto, quindi la  $V_H$  risultante ha segno opposto.

## 9.3 FORZA MAGNETICA SU UNA CORRENTE ELETTRICA.

Se, come visto sopra, la presenza di un campo magnetico si manifesta come forza agente sulle cariche elettriche in movimento, ci si aspetta una forza magnetica agente sulle correnti elettriche.

Si consideri quindi un filo percorso da una corrente elettrica  $i$  e se ne consideri un piccolo tratto di lunghezza  $\Delta\ell$  e sezione  $\Delta S$ . Nella regione di spazio ove si trova il tratto di filo in questione sia presente il campo magnetico  $\mathbf{B}$ ; ogni carica elettrica  $q$  in moto in esso risente di una forza di Lorentz.

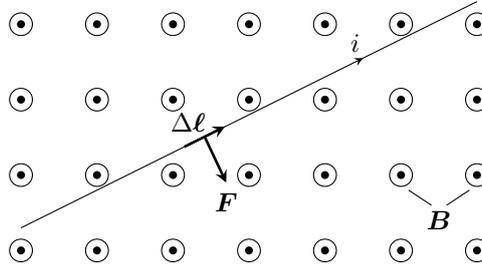


Figura 9.9: La forza magnetica su una corrente.

Si vuole determinare allora la forza totale agente sul tratto di filo  $\Delta\ell$ . Sia  $N$  la densità delle cariche elettriche in moto all'interno del filo,  $\mathbf{v}_D$  la loro velocità. All'interno del tratto di filo che sto considerando il numero delle cariche elettriche in moto è quindi  $N\Delta S\Delta\ell$  e la forza agente su ciascuna di loro è

$$\mathbf{F}_q = q\mathbf{v}_D \wedge \mathbf{B} , \quad (9.21)$$

quindi la forza totale è

$$\mathbf{F} = N\Delta S\Delta\ell\mathbf{F}_q = N\Delta S\Delta\ell q\mathbf{v}_D \wedge \mathbf{B} . \quad (9.22)$$

A questo punto conviene introdurre il vettore  $\Delta\ell$  avente il modulo e la direzione di  $\Delta\ell$  e come verso quello in cui scorre la corrente. Quindi, ricordando l'equazione (8.3) e osservando che i vettori  $\mathbf{v}_D$  e  $\Delta\ell$  hanno la stessa direzione e lo stesso verso, vale

$$\mathbf{F} = i\Delta\ell \wedge \mathbf{B} . \quad (9.23)$$

Questa equazione dà la forza magnetica su una porzione di circuito di lunghezza  $\Delta\ell$  ed è nota con il nome di **seconda legge elementare di Laplace**.<sup>6</sup>

Il modulo della forza (9.23) dipende dall'angolo  $\theta$  compreso fra i vettori  $\ell$  e  $\mathbf{B}$ ; vale infatti la relazione

$$F = i\Delta\ell B \sin \theta . \quad (9.24)$$

Una precisa formulazione matematica della seconda legge elementare di Ampère si enuncia utilizzando una porzione infinitesima  $d\ell$  di filo conduttore.

$$d\mathbf{F} = id\ell \wedge \mathbf{B} . \quad (9.25)$$

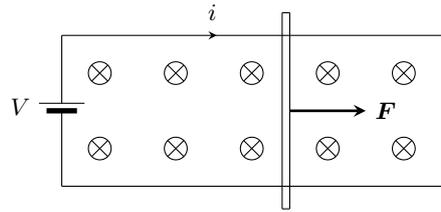
In questo caso, quindi, il modulo della forza sull'intero circuito di lunghezza  $L$  è dato dall'integrale

$$F = \int_0^L iB \sin \theta d\ell . \quad (9.26)$$

Se ne vedranno degli esempi nel seguito.

Per una verifica sperimentale della seconda legge di Laplace si consideri il seguente apparato sperimentale. Un circuito è costituito da due conduttori paralleli, distanti  $\ell$ , collegati ad un generatore di tensione  $V$ , su cui si trova appoggiato un conduttore in grado di scorrere strisciando senza attrito sui due conduttori paralleli. Nel circuito così costituito scorre la corrente  $i$ . Nell'area ove si trova il dispositivo vi è un campo magnetico  $\mathbf{B}$  perpendicolare al foglio, entrante in figura 9.10.

<sup>6</sup> Pierre-Simon de Laplace (1749-1827), fisico e matematico francese.



**Figura 9.10:** Dispositivo per la verifica sperimentale della seconda legge di Laplace.

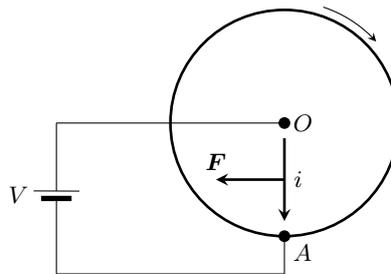
Sul conduttore mobile agisce una forza diretta come in figura che, secondo la legge (9.23), ha modulo

$$F = i\ell B . \quad (9.27)$$

Questa forza si può misurare con un dinamometro consentendo la verifica della (9.27).

### 9.3.1 DISCO DI BARLOW.

Si consideri un disco metallico conduttore imperniato in modo da poter ruotare liberamente attorno al suo centro  $O$ . In  $O$  sia fissato un filo che porta ad un generatore di tensione; il circuito viene chiuso tramite un contatto strisciante sul bordo del disco, in  $A$ , ottenuto, per esempio, per mezzo di una vaschetta di mercurio.



**Figura 9.11:** Il disco di Barlow.

Perpendicolare al disco vi è un campo magnetico uscente (non indicato in figura) che mette in rotazione il disco. Il dispositivo così concepito è detto **disco di Barlow**<sup>7</sup>

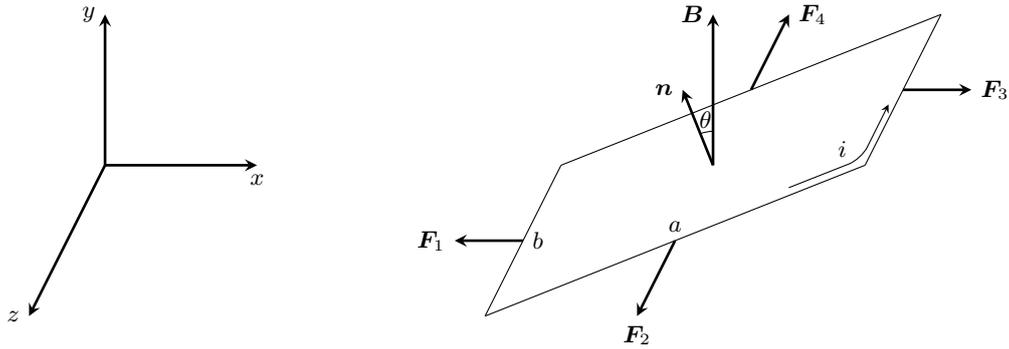
#### Osservazioni

1. Si osservi che la forza di Lorentz agisce sulle cariche elettriche in movimento, quindi sugli elettroni di conduzione. Questi trasmettono il moto direttamente al disco che si pone in rotazione. La cosa potrebbe essere sorprendente; ma si osservi che vi è attrito fra gli elettroni di conduzione e questo si manifesta macroscopicamente nella resistenza elettrica del metallo. Se il dispositivo lavorasse in condizioni di superconduttività non vi sarebbe alcuna rotazione del disco.

## 9.4 FORZA MAGNETICA SU UNA SPIRA RETTANGOLARE.

Come primo, importante esempio, si consideri la forza magnetica di un campo magnetico uniforme  $\mathbf{B}$  agente su di una spira rettangolare di lati  $a$  e  $b$  percorsa dalla corrente  $i$ . Sia  $y$  la direzione in cui è diretto il vettore  $\mathbf{B}$ ; due lati della spira siano posti lungo la direzione  $z$ , e gli altri due siano inclinati in modo tale che il versore  $\mathbf{n}$ , perpendicolare al piano della spira e applicato nel suo centro, formi un angolo  $\theta$  con la direzione di  $\mathbf{B}$ ; inoltre il verso di  $\mathbf{n}$  sia tale che un uomo disposto nello stesso modo veda la corrente scorrere nella spira in senso antiorario. Su ciascuno dei lati della spira agisce una forza magnetica della forma (9.23). Con riferimento alla figura 9.12, le forze  $\mathbf{F}_2$  ed  $\mathbf{F}_4$  sono dirette lungo l'asse delle  $z$  ed hanno verso opposto, quindi, avendo entrambe modulo  $F_2 = F_4 = iaB \cos \theta$ , danno somma nulla. Le altre due forze  $\mathbf{F}_1$  ed  $\mathbf{F}_3$  sono dirette lungo l'asse  $x$ , hanno versi opposti e lo stesso modulo  $F_1 = F_3 = ibB$ , ma, diversamente dalle due precedenti, le loro rette di applicazione *non* coincidono, ma si trovano su rette parallele distanti  $d = a \sin \theta$ .

<sup>7</sup> Peter Barlow (1776-1862), matematico inglese.



**Figura 9.12:** Azione di un campo magnetico uniforme su una spira rettangolare.

Le due forze formano, pertanto, una coppia di momento

$$M = F_2 d = i b a B \sin \theta . \tag{9.28}$$

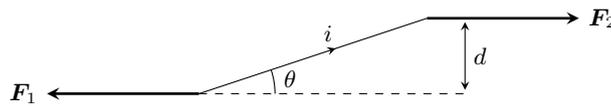
Sotto l'azione della coppia, quindi la spira ruota attorno all'asse  $z$  fino a che il vettore  $\mathbf{n}$  non si trova allineato con  $\mathbf{B}$ . Si osservi che vale la relazione vettoriale

$$\mathbf{M} = i a b \mathbf{n} \wedge \mathbf{B} . \tag{9.29}$$

La quantità  $i a b \mathbf{n}$  è un vettore che ha come modulo il prodotto della corrente per l'area della spira e come direzione e verso quelli del vettore unitario  $\mathbf{n}$ . Questo vettore è detto **momento magnetico** della spira e viene denotato con  $\mathbf{m} = i a b \mathbf{n}$ . Con questa definizione il momento di forze agente sulla spira si può scrivere nella forma

$$\mathbf{M} = \mathbf{m} \wedge \mathbf{B} . \tag{9.30}$$

Si noti che questa equazione è formalmente identica a quella trovata per un dipolo elettrico immerso in campo elettrico. Questa identità formale suggerisce di identificare la spira con un dipolo magnetico (i cui poli sono evidentemente inseparabili); si veda oltre il postulato di equivalenza di Ampère, capitolo 12.



**Figura 9.13:** La coppia di forze agente sulla spira.

In modo del tutto analogo a quello visto per l'energia del dipolo elettrico, equazione (7.115), si può ricavare per l'energia della spira immersa in un campo magnetico esterno  $\mathbf{B}$  l'espressione

$$W = -\mathbf{m} \cdot \mathbf{B} . \tag{9.31}$$

### 9.4.1 GALVANOMETRO.

È possibile utilizzare l'effetto ora studiato del campo magnetico sulla spira per costruire un dispositivo detto *galvanometro* in grado di misurare l'intensità di una corrente elettrica anche molto piccola. Con riferimento allo schema in figura 9.14, si collochi una spira fra i due poli di un magnete permanente, sufficientemente grande da far sí che sulla spira agisca un campo magnetico con buona approssimazione uniforme. Se viene fatta circolare la corrente di intensità  $i$  nella spira, su questa viene ad agire un momento torcente che tende a portare il piano della spira perpendicolare al vettore  $\mathbf{B}$ . Se la spira viene tenuta in posizione da una molla (non indicata in figura), la spira ruota fino a che il momento torcente dovuto all'effetto magnetico e quello dovuto all'azione della molla si equilibrano. Maggiore è la corrente che passa lungo la spira maggiore è l'angolo di cui questa ruota prima di raggiungere la posizione di equilibrio.

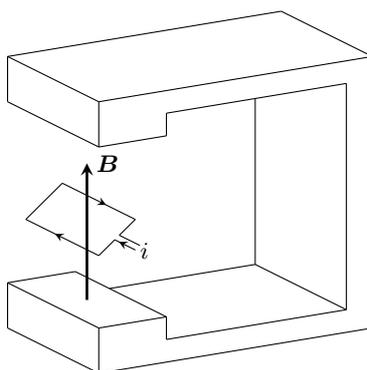


Figura 9.14: Il galvanometro.

Una misura di tale angolo, fatta magari mediante un ago fissato alla spira che si muove lungo una scala opportunamente graduata e tarata, fornisce la misura cercata dell'intensità  $i$ .

## 9.5 LE LEGGI DEL CAMPO MAGNETICO.

Si è visto sopra che dall'esperimento di Ørsted è noto che le correnti elettriche producono effetti magnetici. Si tratta a questo punto di enunciare le leggi quantitative che consentono, data una corrente, di determinare il campo magnetico da essa generato. La prima legge è nota come **legge di Ampère**, di origine empirica e dovuta al lavoro sperimentale di Ampère e di Biot e Savart<sup>8</sup>, può essere enunciata come segue

*La circuitazione del campo magnetico lungo una qualsiasi curva chiusa orientata  $\gamma$  è proporzionale alla corrente concatenata con  $\gamma$ .*

La legge di Ampère ora enunciata è formalizzata dall'equazione

$$\Gamma_{\gamma}(\mathbf{B}) = \mu_0 i . \quad (9.32)$$

La costante di proporzionalità  $\mu_0$  è detta **permeabilità magnetica del vuoto** ed il suo valore numerico è

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ N A}^{-2} \quad (9.33)$$

Occorre spiegare che cosa s'intenda con corrente concatenata.

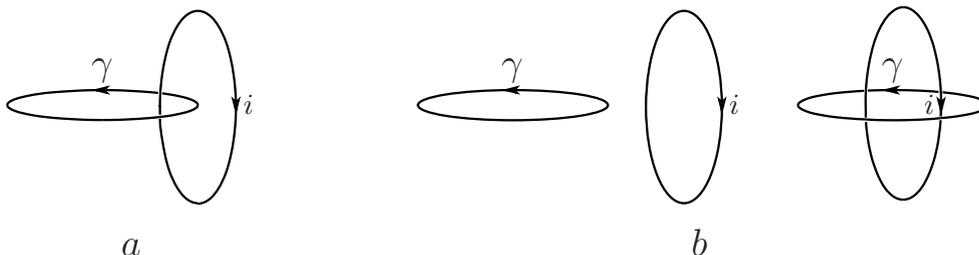


Figura 9.15: a: corrente concatenata a  $\gamma$ ; b: correnti non concatenate a  $\gamma$ .

Una corrente elettrica scorre sempre in un circuito chiuso. Si dice che una corrente è concatenata alla curva chiusa  $\gamma$  quando il circuito e la curva sono prese una dentro l'altra come due anelli di una catena; si veda la figura 9.15.

La legge di Ampère viene talvolta enunciata anche diversamente dicendo che la circuitazione di  $\mathbf{B}$  è proporzionale alla corrente che fluisce attraverso una qualunque superficie che abbia  $\gamma$  come bordo. Si osservi che nei due casi rappresentati in figura 9.15b la corrente che attraversa una tale superficie è nulla. È necessario completare la legge di Ampère con una convenzione sul verso di  $\gamma$ . Questa deve essere tale

<sup>8</sup> Jean Baptiste Biot (1774-1862) e Felix Savart (1791-1841), fisici francesi.

che la corrente che entra nell'anello da essa formato veda l'orientazione di  $\gamma$  in senso antiorario. Allo stesso modo,  $\gamma$  entrando nell'anello formato dal circuito elettrico in cui scorre  $i$  vede la corrente scorrere in senso antiorario; la corretta orientazione è rappresentata in figura 9.15a. Nel caso in cui i versi siano orientati diversamente, occorre cambiare il segno alla circuitazione di  $\mathbf{B}$  e la legge di Ampère diviene  $\Gamma_\gamma(\mathbf{B}) = -\mu_0 i$ .

La seconda legge è necessaria a determinare univocamente il campo magnetico generato da una corrente data riguarda il flusso di  $\mathbf{B}$  [si veda a questo proposito la seconda osservazione dopo l'equazione (6.13)]. Ricordando che non esistono in natura cariche magnetiche ma solo dipoli, le linee di campo magnetico non possono partire dalla carica elettrica positiva e finire in quella negativa, come nel caso del campo elettrico; quindi le linee di campo magnetico sono sempre chiuse. In tal modo qualsiasi sia la superficie chiusa che si scelga, il flusso magnetico attraverso di essa deve essere nullo in quanto ogni linea uscente in un punto della superficie deve necessariamente rientrare nella superficie in un punto diverso per chiudersi. Si può così enunciare la legge, anche nota come **legge di Gauss per il campo magnetico**.

*Il flusso del campo magnetico  $\mathbf{B}$  attraverso qualsiasi superficie chiusa  $S$  è nullo.*

Legge che può essere formalizzata nell'equazione

$$\boxed{\Phi_S(\mathbf{B}) = 0} . \quad (9.34)$$

### Osservazioni

1. L'unità di misura del flusso magnetico è detta weber<sup>9</sup>, simbolo Wb, le cui dimensioni sono

$$\text{Wb} = \text{T m}^2 = \text{J A}^{-1} \quad (9.35)$$

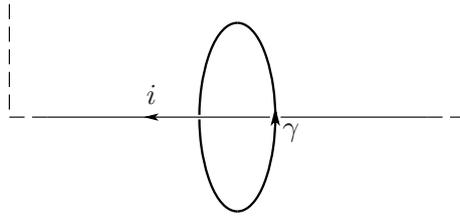
2. Discutendo le proprietà della circuitazione del campo elettrico, si era osservato che il fatto che la circuitazione lungo una linea chiusa fosse nulla di fatto è equivalente a dire che il campo elettrico è un campo conservativo. Estendendo quella osservazione al campo magnetico, si può dire che la legge di Ampère implica che il campo magnetico *non* è un campo conservativo; in particolare non esiste un *potenziale magnetico*.
3. Si è visto che le linee del campo magnetico sono sempre chiuse e che la circuitazione di  $\mathbf{B}$  è non nulla quando la curva lungo cui è calcolata è concatenata ad una corrente elettrica. Questi due fatti ci portano a concludere che le linee di campo magnetico sono sempre concatenate ad una corrente elettrica.
4. Si vedrà più avanti che la precedente osservazione andrà corretta quando si vedrà che è possibile generare un campo magnetico anche in assenza di correnti elettriche, ma su questo si tornerà oltre.
5. Sia per il campo elettrico che per il campo magnetico vi sono quindi due equazioni: una che riguarda il flusso attraverso una superficie chiusa, ed una che riguarda la circuitazione lungo una linea orientata chiusa, in armonia con quanto detto nella già citata osservazione. Occorre sottolineare che queste equazioni sono valide solo nel caso di campi statici, cioè non variabili nel tempo. Si vedrà oltre come le quattro leggi fin qui enunciate vengono modificate nel caso di campi variabili.

#### 9.5.1 CAMPO MAGNETICO GENERATO DA UN FILO INDEFINITO.

Si consideri un circuito elettrico molto grande costituito da un lungo filo rettilineo e chiuso in una regione dello spazio molto lontana da quella che viene qui considerata per la determinazione del campo magnetico. Il filo sia percorso da una corrente elettrica di intensità  $i$ . Si consideri una curva chiusa  $\gamma$  circolare concatenata al circuito in modo che il filo lungo sia l'asse di simmetria di  $\gamma$ , come in figura 9.16. Per la legge di Ampère la circuitazione di  $\mathbf{B}$  lungo  $\gamma$  è uguale a  $\mu_0 i$ . Facendo l'ipotesi aggiuntiva che il circuito sia sufficientemente grande da poter trascurare gli effetti di tutti i fili lontani, e tratteggiati in figura 9.16, si può affermare che il campo di cui si sta calcolando la circuitazione è generato dalla sola corrente rettilinea attorno a cui si avvolge  $\gamma$ . In ogni punto di  $\gamma$  il campo  $\mathbf{B}$ , per simmetria, ha lo stesso modulo  $B$ ; inoltre, con la promessa di dimostrarlo tra poco, è tangente alla curva. Quindi il calcolo della circuitazione è il prodotto della lunghezza della curva per  $B$  vale cioè:  $\Gamma_\gamma(\mathbf{B}) = 2\pi r B$ ; a questo punto la legge di Ampère diventa

$$2\pi r B = \mu_0 i , \quad (9.36)$$

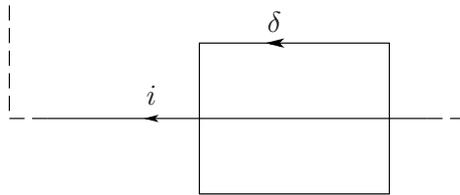
<sup>9</sup> Wilhelm Eduard Weber (1804-1891), fisico tedesco.



**Figura 9.16:** Determinazione del campo  $\mathbf{B}$  generato da un filo rettilineo.

e permette la determinazione del campo magnetico generato dal filo rettilineo:

$$B = \mu_0 \frac{i}{2\pi r}. \quad (9.37)$$



**Figura 9.17:** La curva chiusa  $\delta$ .

Resta da dimostrare che in ogni punto di  $\gamma$  il campo  $\mathbf{B}$  ha solo componente tangente. Intanto si può escludere che abbia una componente radiale (cioè diretta verso il filo), infatti se così fosse in ogni punto ad una distanza  $r$  dal filo si avrebbe una componente di  $\mathbf{B}$  diretta verso il filo o verso l'esterno; in entrambi i casi il flusso di  $\mathbf{B}$  attraverso una qualunque superficie cilindrica, avente il filo come asse, sarebbe non zero contro la legge di Gauss. Viene così esclusa una componente radiale. Rimane da discutere la componente perpendicolare al piano di  $\gamma$  (e quindi parallela al filo), che si denota con il simbolo  $B_{\perp}$ . Se essa fosse diversa da zero potrei costruire una curva chiusa  $\delta$  tangente a  $B_{\perp}$  in un punto e disposta, come in figura 9.17, nel piano perpendicolare a  $\gamma$ . Allora la circuitazione di  $\mathbf{B}$  lungo  $\delta$  sarebbe non nulla e quindi, per la legge di Ampère, dovrebbe esistere una corrente  $i$  concatenata con  $\delta$ ; il che è falso. Quindi anche la componente perpendicolare di  $\mathbf{B}$  deve essere zero. Non resta quindi che la componente tangente. Resta così dimostrato che il campo magnetico generato da un filo rettilineo percorso da corrente è in ogni punto tangente ad una circonferenza avente il filo come asse di simmetria.

### 9.5.2 FORZA MAGNETICA FRA DUE FILI RETTILINEI PERCORSI DA UNA CORRENTE ELETTRICA.

Come immediata applicazione dell'esempio ora visto, si calcola ora la forza agente fra due fili rettilinei percorsi da corrente. In effetti ci si aspetta una forza: ciascuna delle due correnti produce un campo magnetico che agisce sull'altra corrente secondo l'equazione (9.23); inoltre, per il terzo principio della dinamica, le due forze sono uguali e contrarie. Quindi, si considerino due fili rettilinei di lunghezza  $\ell$  sufficientemente grande da poter applicare, con ragionevole approssimazione, l'equazione (9.37) che fornisce il campo magnetico dovuto ad un filo indefinito. Si supponga inoltre che i due fili si trovino alla distanza  $r$  e siano percorsi dalle due correnti  $i_1$  ed  $i_2$  dirette nello stesso verso. Il campo  $\mathbf{B}_1$ , dovuto alla corrente  $i_1$ , agisce sulla corrente  $i_2$ . La direzione ed il verso di  $\mathbf{B}_1$  sono quelli indicati in figura (il campo indicato in figura, per chiarezza grafica, è solo quello generato dalla corrente  $i_1$ ), e quindi nella zona di spazio ove si trova il filo percorso dalla corrente  $i_2$  il campo magnetico generato da  $i_1$  è entrante. Il suo modulo è dato da

$$B_1 = \mu_0 \frac{i_1}{2\pi r}; \quad (9.38)$$

quindi la forza magnetica agente sulla corrente  $i_2$ , in accordo con l'equazione (9.24) (nel caso presente  $\theta = 0$ ), ha la direzione ed il verso indicati in figura ed il modulo

$$F_1 = \mu_0 \frac{i_1 i_2}{2\pi r} \ell. \tag{9.39}$$

Si veda la figura 9.18.

Si lascia al lettore studioso il compito di determinare il campo  $\mathbf{B}_2$  generato dalla corrente  $i_2$  ed agente sulla corrente  $i_1$  e che la forza che ne risulta è uguale e contraria a quella ora calcolata.

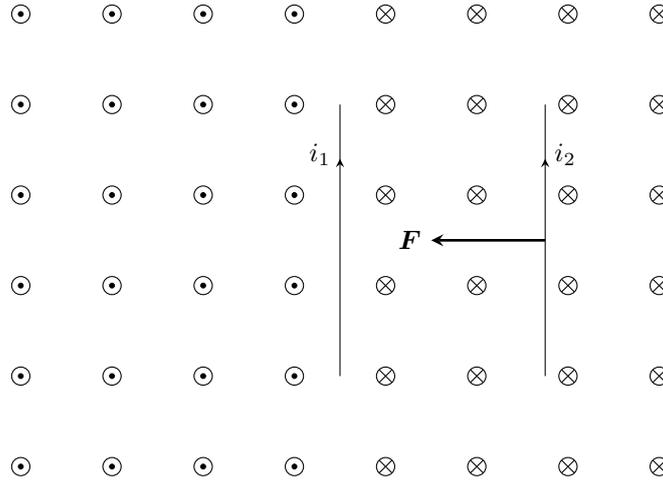


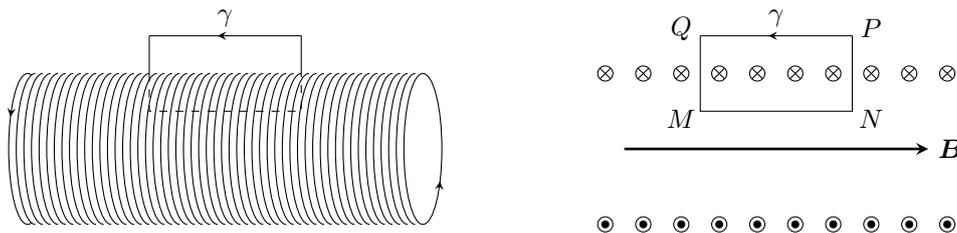
Figura 9.18: I due fili percorsi da corrente elettrica.

In definitiva due correnti parallele ed equiverse si attirano.

Mediante la misura della forza con cui si attirano due fili elettrici percorsi da corrente è possibile dare una definizione operativa dell'ampere, l'unità di misura dell'intensità di corrente, e del coulomb, unità di misura della carica elettrica. Se due fili rettilinei indefiniti posti alla distanza di un metro esercitano uno sull'altro una forza di  $\mu_0/2\pi = 2 \cdot 10^{-7}$  N per ogni metro, essi sono percorsi dalla corrente di un ampere. Conseguentemente, un coulomb è la carica elettrica che passa attraverso una sezione di un filo percorso dalla corrente di un ampere in un secondo.

### 9.5.3 SOLENOIDE RETTILINEO.

Come secondo esempio, si consideri una bobina di filo avvolto secondo una fitta spirale in cui vi siano  $n$  avvolgimenti per unità di lunghezza ed in cui passi una corrente costante. Ad un tale sistema si dà comunemente il nome di *solenoide*. Supponendo che il solenoide sia indefinitamente lungo, le linee di campo magnetico sono tutte interne al solenoide e parallele al suo asse. Per rendersi conto di ciò si osservi che le linee di campo magnetico devono essere concatenate alla corrente, devono quindi essere curve che passano all'interno del solenoide e si chiudono fuori; visto che il solenoide è indefinito, questa chiusura avviene infinitamente lontano. Questo dice che il campo magnetico è nullo al di fuori del solenoide. Si consideri quindi la curva rettangolare chiusa  $\gamma$  come in figura, e tale che sia  $\ell$  la misura della base del rettangolo, è chiaro che contribuisce alla circuitazione del campo magnetico il solo lato  $MN$ . Infatti lungo il lato  $PQ$ , esterno al solenoide, il campo è nullo, mentre i lati  $BC$  e  $DA$  sono perpendicolari alla direzione di  $\mathbf{B}$  e quindi non contribuiscono alla circuitazione.



**Figura 9.19:** Un solenoide rettilineo.

In definitiva, si ottiene

$$\Gamma_\gamma(\mathbf{B}) = B\ell \tag{9.40}$$

ora si indichi con  $N$  il numero di fili dell'avvolgimento racchiusi da  $\gamma$ , ciascuno dei quali porta una corrente  $i$ ; la corrente concatenata con  $\gamma$  è quindi  $Ni$ . Utilizzando la legge di Ampère si ottiene

$$B\ell = \mu_0 Ni \quad \longrightarrow \quad B = \mu_0 n i , \tag{9.41}$$

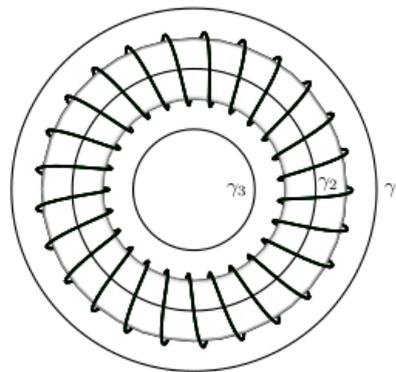
ove, come detto,  $n = \frac{N}{\ell}$  è il numero di fili del solenoide per unità di lunghezza.

**Osservazioni**

1. L'approssimazione di solenoide indefinitamente lungo è da intendersi nel senso che deve essere sufficientemente lungo da rendere trascurabile il campo magnetico all'esterno. Questo, per bobine molto fitte, almeno con qualche centinaio di avvolgimenti al centimetro, si verifica con solenoide lunghi poche decine di centimetri.

**9.5.4 SOLENOIDE TOROIDALE.**

Si consideri un avvolgimento e sezione circolare ma non piú rettilineo bensí toroidale, cioè 'a ciambella' come quello rappresentato in figura 9.20 Sia  $i$  l'intensità della corrente elettrica che passa per gli  $N$  avvolgimenti del solenoide. Si consideri una curva  $\gamma_1$ , esterna al solenoide. Non c'è alcuna corrente ad essa concatenata quindi per la legge di Ampère la circuitazione di  $\mathbf{B}$  lungo  $\gamma_1$  è nulla; quindi, vista l'arbitrarietà della scelta di  $\gamma_1$ , si può concludere che il campo magnetico è nullo in tutti i punti esterni al solenoide. Un ragionamento perfettamente analogo si può costruire per una curva arbitraria  $\gamma_3$  interamente interna al solenoide. Si consideri ora una curva  $\gamma_2$  circolare di raggio  $r$  e concentrica al solenoide. Questa è concatenata con tutte le  $N$  spire di cui è costituito il solenoide; la circuitazione è quindi non nulla: all'interno del solenoide vi è un campo magnetico. Per il calcolo della circuitazione si osservi che, per la simmetria del problema, le linee chiuse del campo possono essere solamente concentriche anch'esse al solenoide e quindi  $\mathbf{B}$  è tangente a  $\gamma_2$  ed ha lo stesso valore in tutti i punti della curva.



**Figura 9.20:** Un solenoide toroidale.

La circuitazione è quindi data dal prodotto del campo per la lunghezza di  $\gamma_2$ :

$$\Gamma_{\gamma_2}(\mathbf{B}) = 2\pi r B ; \tag{9.42}$$

ma per la legge di Ampère tale circuitazione deve essere proporzionale alla corrente totale concatenata che è  $Ni$ , cioè

$$\Gamma_{\gamma_2}(\mathbf{B}) = \mu_0 Ni , \tag{9.43}$$

quindi si ottiene

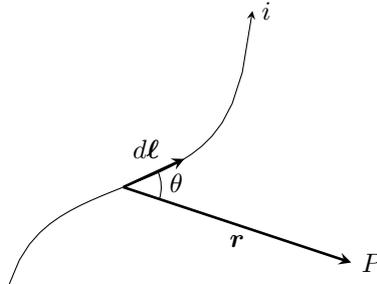
$$2\pi r B = \mu_0 N i \quad \longrightarrow \quad B = \mu_0 \frac{N i}{2\pi r} . \quad (9.44)$$

Si osservi che se aumenta il raggio del solenoide, e si vuole mantenere costante la densità delle spire dell'avvolgimento, occorre far crescere  $N$  proporzionalmente ad  $r$  in modo che il rapporto  $\frac{N}{2\pi r}$  resti costante. Questa costante, pari alla densità delle spire, viene indicata con  $n$ . Ora se  $r$  tende all'infinito, insieme a  $N$ , la situazione diviene indistinguibile dal caso del solenoide rettilineo; ed infatti si ottiene

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \mu_0 \frac{N i}{2\pi r} = \mu_0 i \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{N}{2\pi r} = \mu_0 n i . \quad (9.45)$$

## 9.6 CAMPO MAGNETICO GENERATO DA UNA CORRENTE ELETTRICA.

Si è visto sopra che le correnti elettriche generano campi magnetici e che correnti generatrici e campi generati sono legati dalla legge di Ampère. Qui si vuole dare la legge generale che permette, nota la corrente generatrice, di calcolare il campo magnetico da essa generato.



**Figura 9.21:** L'elemento di circuito  $d\ell$  che genera il campo in  $P$ .

Data una generica corrente elettrica di intensità  $i$  che scorre in un dato circuito, il campo magnetico infinitesimo  $d\mathbf{B}$  prodotto dall'elemento infinitesimo  $d\ell$  del circuito nel punto  $P$  individuato dal vettore  $\mathbf{r}$ , è dato dalla seguente legge detta **prima legge elementare di Laplace**:

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} i \frac{d\ell \wedge \mathbf{r}}{r^3} . \quad (9.46)$$

### Osservazioni

1. La legge (9.46) è anche nota con il nome di **legge di Biot e Savart**.
2. Sebbene la dimostrazione non sia elementare, e quindi venga qui omessa, è bene tenere presente che la prima legge elementare di Laplace può essere dedotta dalle leggi (9.32) e (9.34) è cioè una conseguenza delle legge fondamentali della magnetostatica.
3. Si noti che il modulo del vettore  $d\mathbf{B}$  è dato dall'equazione

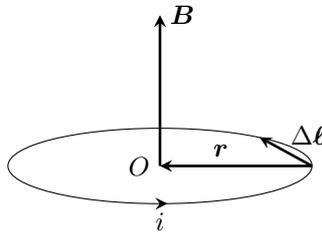
$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} i \frac{d\ell}{r^2} \sin \theta , \quad (9.47)$$

ove  $\theta$  è l'angolo formato dai vettori  $d\ell$  e  $\mathbf{r}$  (si veda la figura 9.21). Questo, in particolare, ha come conseguenza che l'elemento di circuito infinitesimo  $d\ell$  non produce alcun campo magnetico nei punti a lui allineati, cioè per  $\theta = 0$  e per  $\theta = \pi$ , e dà un contributo massimo nelle direzioni ad esso perpendicolari, cioè per  $\theta = \pi/2$ .

4. La direzione di  $d\mathbf{B}$  è perpendicolare al piano su cui si trovano  $d\ell$  e  $\mathbf{r}$  e di verso dato dalla regola della mano destra. In figura 9.21, non rappresentato, è un vettore perpendicolare al foglio, uscente.
5. Si osservi che, a rigore, la legge (9.46) non ha significato fisico esperibile. In effetti non è possibile verificarla sperimentalmente, non essendo possibile separare un tratto dall'intero circuito senza interrompere la corrente. La legge rimane comunque di fondamentale importanza per la determinazione dei campi generati da una corrente elettrica ove vengano sommati tutti i contributi dell'intero circuito. Tale somma, in generale sarà un integrale. Se ne vedono di seguito degli esempi.

### 9.6.1 CAMPO MAGNETICO GENERATO DA UNA SPIRA CIRCOLARE.

L'esempio piú semplice dell'applicazione della prima legge elementare di Laplace è il calcolo del campo magnetico prodotto da un circuito elettrico circolare di raggio  $R$  (una *spira*) nel suo centro  $O$ .

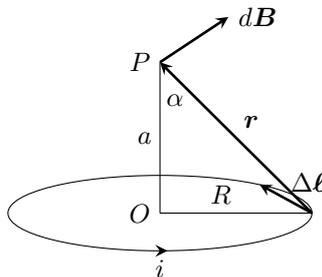


**Figura 9.22:** Il campo magnetico generato da una spira circolare nel suo centro.

Con riferimento alla figura 9.22, si osservi che, per simmetria, tutti gli elementi del circuito contribuiscono al campo magnetico nello stesso modo. Si noti inoltre che il vettore  $\mathbf{r}$  è sempre diretto nella direzione del raggio e quindi è sempre perpendicolare agli elementi del circuito. I prodotti vettoriali sono quindi particolarmente semplici e la somma dà la lunghezza della circonferenza. Per il modulo di  $\mathbf{B}$  si ottiene quindi:

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} i \frac{2\pi R}{R^2} = \frac{\mu_0 i}{2R} ; \quad (9.48)$$

per la direzione ed il verso si usa la convenzione della mano destra ottenendo il risultato rappresentato in figura 9.22.

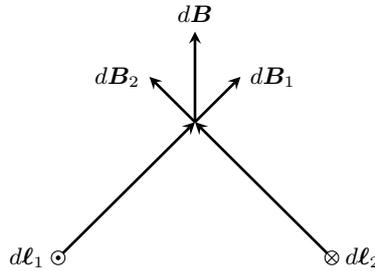


**Figura 9.23:** Il campo magnetico generato da una spira circolare in un punto  $P$  dell'asse di simmetria.

È istruttivo calcolare il campo magnetico generato dalla spira in un punto  $P$  che si trova sull'asse di simmetria della spira ad una distanza  $a$  dal centro. Osservando che ogni elemento infinitesimo del circuito è perpendicolare al vettore  $\mathbf{r}$  che lo unisce al punto  $P$ , il campo magnetico  $d\mathbf{B}$  generato dall'elemento infinitesimo  $d\ell$  in  $P$  è quello rappresentato in figura; il suo modulo vale

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} i \frac{d\ell}{R^2 + a^2} . \quad (9.49)$$

Per avere il contributo totale dall'intero circuito, si osservi che gli elementi infinitesimi possono essere accoppiati a due a due (diametralmente opposti) in modo tale che la componente perpendicolare all'asse del campo da loro generato sia nulla.



**Figura 9.24:** L'annullamento delle componenti perpendicolari all'asse.

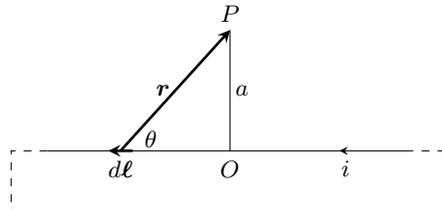
Quindi ogni elemento infinitesimo contribuisce al campo magnetico totale con la sola componente di (9.49) parallela all'asse di simmetria della spira  $dB \sin \alpha = dB \frac{R}{r}$ . Quindi il campo totale è dato dall'integrale

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} i \frac{1}{R^2 + a^2} \frac{R}{r} \int_0^{2\pi R} dl = \frac{\mu_0}{2} i \frac{R^2}{(R^2 + a^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0}{2} i \frac{R^2}{r^3}. \quad (9.50)$$

Per  $a = 0$ , cioè nel caso che  $P$  sia nel centro della spira, si ritrova il risultato ottenuto sopra.

### 9.6.2 CAMPO MAGNETICO GENERATO DA UN FILO RETTILINEO.

Si consideri un circuito in cui circola una corrente elettrica di intensità  $i$ . Si suppone che il circuito sia costituito da un filo rettilineo lungo  $L$  e che sia chiuso in una regione di spazio sufficientemente lontana da poter trascurare le influenze delle altre porzioni del circuito sul campo magnetico che si vuole calcolare. In altre parole nel calcolo di  $\mathbf{B}$  si andranno a considerare solo gli effetti prodotti dal filo in questione.



**Figura 9.25:** Il campo generato da un filo rettilineo.

Sia  $O$  il punto medio del filo e sia  $P$  un punto distante  $a$  da  $O$ . Si consideri inoltre un elemento elementare  $d\ell$  del circuito che si trovi a distanza  $\ell$  da  $O$ . Il campo magnetico infinitesimo generato da  $d\ell$  ha modulo

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} i \frac{d\ell}{r^2} \sin \theta = \frac{\mu_0}{4\pi} i \frac{d\ell}{r^2} \frac{a}{r} = \frac{\mu_0}{4\pi} i \frac{a}{(a^2 + \ell^2)^{3/2}} d\ell. \quad (9.51)$$

Con riferimento alla situazione di figura 9.25, questo campo magnetico è entrante nel foglio (e, per chiarezza pittorica, non è rappresentato in figura). Per determinare il campo totale generato dal filo è necessario sommare i contributi di tutti gli elementi infinitesimi del circuito, e quindi calcolare il seguente integrale

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} i a \int_{-L/2}^{+L/2} \frac{d\ell}{(a^2 + \ell^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0}{4\pi a^2} i \int_{-L/2}^{+L/2} \frac{d\ell}{\left(1 + \frac{\ell^2}{a^2}\right)^{3/2}}. \quad (9.52)$$

Con la sostituzione  $\frac{\ell}{a} = \tan t$ , si trova  $1 + \frac{\ell^2}{a^2} = 1 + \tan^2 t = \frac{1}{\cos^2 t}$  e  $d\ell = \frac{a}{\cos^2 t} dt$  quindi l'integrale nell'equazione precedente diventa

$$\int \frac{d\ell}{\left(1 + \frac{\ell^2}{a^2}\right)^{3/2}} = a \int \frac{dt}{\cos^2 t} \cos^3 t = a \int \cos t dt = a \sin t, \quad (9.53)$$

sostituendo sopra questo risultato si trova

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi a} i \left[ \operatorname{sen} \left( \arctan \frac{\ell}{a} \right) \right]_{-L/2}^{+L/2} = \frac{\mu_0}{2\pi a} i \operatorname{sen} \left( \arctan \frac{L}{2} \right) . \quad (9.54)$$

Prendendo il limite  $L \rightarrow \infty$  si trova il campo magnetico generato da un filo indefinito

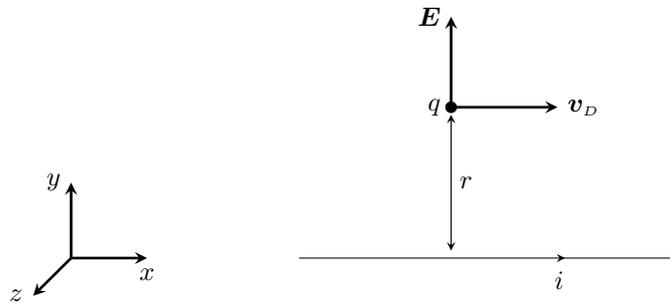
$$\lim_{L \rightarrow \infty} B = \frac{\mu_0}{2\pi a} i \lim_{L \rightarrow \infty} \operatorname{sen} \left( \arctan \frac{L}{2} \right) = \frac{\mu_0}{2\pi a} i \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} = \frac{\mu_0}{2\pi a} i , \quad (9.55)$$

in accordo con il risultato (9.37) trovato utilizzando la legge di Ampère.

### 9.7 CONTENUTO RELATIVISTICO DELLA TEORIA ELETTROMAGNETICA.

Si consideri un filo conduttore percorso da una corrente elettrica di intensità  $i$  diretta nel verso delle  $x$  negative e sia  $q$  una carica elettrica positiva posta ad una distanza  $r$  dal filo. Il filo è elettricamente neutro nel senso che è costituito da cariche elettriche positive ferme e cariche elettriche negative in moto, la cui somma algebrica totale è zero; il filo genera quindi un campo elettrico nullo. Nel sistema di riferimento  $\mathcal{S}$ , in cui la carica elettrica  $q$  è ferma e nel filo scorrono cariche elettriche negative con velocità  $v_D$ , la carica elettrica non è sottoposta ad alcuna forza: non vi è infatti campo elettrico dovuto al filo poiché esso è elettricamente neutro; non vi è forza magnetica poiché la carica elettrica è ferma.

Nel sistema di riferimento  $\mathcal{S}'$ , in cui le cariche elettriche negative all'interno del filo sono ferme mentre le cariche elettriche positive (quelle dei nuclei del metallo) e la carica elettrica  $q$  si muovono con la medesima velocità  $v_D$  ma diretta nello stesso verso (delle  $x$  positive), le cose stanno diversamente. Il campo elettrico generato dal filo è ancora nullo e quindi non c'è interazione elettrica fra il filo e la carica elettrica. Quanto alla forza magnetica, vi è una corrente di cariche elettriche positive che generano un campo magnetico che ora agisce su di una carica elettrica in moto con una forza di Lorentz diretta verso il filo (non rappresentata in figura).



**Figura 9.26:** La situazione nel sistema  $\mathcal{S}'$ .

Quindi, diversamente da  $\mathcal{S}$ , in  $\mathcal{S}'$  la carica elettrica  $q$  è sottoposta ad una forza. Apparentemente la situazione viola il principio di relatività; i due sistemi di riferimento sono infatti in moto rettilineo ed uniforme uno rispetto all'altro, eppure in  $\mathcal{S}$  la carica elettrica  $q$  rimane ferma, mentre in  $\mathcal{S}'$  è accelerata. La situazione, apparentemente paradossale, diventa chiara ove si applichino correttamente le trasformazioni di Lorentz che collegano i due sistemi di riferimento in moto relativo.

Si supponga, come detto sopra, che in  $\mathcal{S}$  il filo sia neutro, in tal caso la densità lineare delle cariche elettriche positive  $\lambda_+$  uguaglia quella delle cariche elettriche negative  $\lambda_-$ , vale cioè

$$\lambda_+ = \lambda_- ; \quad (9.56)$$

in tal modo il filo in  $\mathcal{S}$  risulta neutro e non genera alcun campo elettrico. Nel sistema  $\mathcal{S}'$  le cariche elettriche positive e  $q$  si muovono con velocità  $v_D$  nella direzione delle  $x$  crescenti. In  $\mathcal{S}'$ , quindi il filo è percorso, nel verso delle  $x$  positive da una corrente elettrica la cui intensità si può

facilmente determinare. Se la densità lineare di carica elettrica in moto con velocità  $v_D$  è  $\lambda'_+$  (si noti l'apice, che sta ad indicare quantità misurate in  $\mathcal{S}'$ ), nel tempo  $\Delta t'$  si sposta una carica elettrica  $\Delta Q' = \lambda'_+ v_D \Delta t'$ . L'intensità della corrente elettrica è quindi

$$i' = \frac{\Delta Q'}{\Delta t'} = \lambda'_+ v_D . \quad (9.57)$$

Si osservi inoltre che le cariche elettriche positive, ora in movimento, vedono il filo accorciato dalla contrazione di Lorentz; la loro densità lineare in  $\mathcal{S}$  è quindi maggiore di quella in  $\mathcal{S}'$  e vale la relazione

$$\lambda'_+ = \frac{\lambda_+}{\sqrt{1 - \frac{v_D^2}{c^2}}} . \quad (9.58)$$

Simmetricamente, le cariche elettriche negative, ora ferme, vedono il filo allungato; la loro densità lineare in  $\mathcal{S}'$ , quindi, diminuisce e vale

$$\lambda'_- = \lambda_- \sqrt{1 - \frac{v_D^2}{c^2}} . \quad (9.59)$$

Pertanto

$$\frac{\lambda'_-}{\lambda'_+} = \frac{\lambda_-}{\lambda_+} \left(1 - \frac{v_D^2}{c^2}\right) \quad \longrightarrow \quad \lambda'_- = \lambda'_+ \left(1 - \frac{v_D^2}{c^2}\right) . \quad (9.60)$$

In  $\mathcal{S}'$ , quindi, le densità di carica elettrica positive e negative non si compensano, il filo risulta complessivamente carico positivamente, il che dà origine ad un campo elettrico disposto lungo la direzione indicata come asse delle  $y$  in figura 9.26; tale campo ha modulo [si ricordi l'equazione (7.40)]

$$E' = \frac{\lambda'_+ - \lambda'_-}{2\pi\epsilon_0 r} , \quad (9.61)$$

cioè

$$E' = \frac{1}{2\pi\epsilon_0 r} \lambda'_+ \left(1 - 1 + \frac{v_D^2}{c^2}\right) = \frac{\lambda'_+}{2\pi\epsilon_0 r} \frac{v_D^2}{c^2} . \quad (9.62)$$

La corrente  $i'$  sopra determinata, d'altra parte, origina un campo magnetico che agisce sulla carica elettrica  $q$  in moto; questo campo magnetico è uscente dal foglio lungo l'asse  $z$  ed ha modulo,

$$B' = \mu_0 \frac{i'}{2\pi r} = \mu_0 \frac{\lambda'_+ v_D}{2\pi r} . \quad (9.63)$$

Quindi sulla carica elettrica  $q$  agiscono una forza elettrica repulsiva  $\mathbf{F}'_E = q\mathbf{E}'$  ed una forza magnetica attrattiva  $\mathbf{F}'_M = q\mathbf{v}_D \wedge \mathbf{B}'$ . I moduli delle due forze sono

$$F'_E = \frac{q\lambda'_+}{2\pi\epsilon_0 r} \frac{v_D^2}{c^2} \quad , \quad F'_M = \mu_0 \frac{q\lambda'_+ v_D}{2\pi r} . \quad (9.64)$$

Questi due moduli sono uguali, e quindi le due forze coincidono, se vale la relazione

$$\mu_0 = \frac{1}{\epsilon_0 c^2} . \quad (9.65)$$

Si può verificare che, con i valori (7.4) e (9.33) per  $\epsilon_0$  e  $\mu_0$  e prendendo  $c = 299792458$  m/s, questa relazione è esattamente verificata. Quindi anche in  $\mathcal{S}'$ , come in  $\mathcal{S}$ , la carica elettrica  $q$  è sottoposta ad una forza nulla.

<sup>10</sup>È molto istruttivo confrontare il risultato sopra ottenuto con il seguente esempio. Si supponga di avere un filo indefinito ove si trovi una distribuzione rettilinea, ferma nel sistema di riferimento  $\mathcal{S}$ , di cariche elettriche positive con densità lineare  $\lambda$ ; a distanza  $d$  da questa si trovi la carica

<sup>10</sup> Devo ringraziare Carlo Cássola per aver richiamato la mia attenzione su questo importante esempio.

elettrica positiva  $q$ , anch'essa ferma in  $\mathcal{S}$ . La carica elettrica viene respinta con una forza di modulo [si ricordi l'equazione (7.40)]

$$F = q \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 d} . \quad (9.66)$$

Si consideri ora il sistema  $\mathcal{S}'$  in moto rispetto a  $\mathcal{S}$  con velocità  $\mathbf{v}$  parallela al filo. Per la contrazione di Lorentz, in  $\mathcal{S}'$  il filo è piú corto di un fattore  $1/\gamma$ , ma la carica elettrica totale in esso presente rimane invariata, quindi la densità di carica elettrica aumenta di un fattore  $\gamma$ , e quindi

$$\lambda' = \gamma\lambda . \quad (9.67)$$

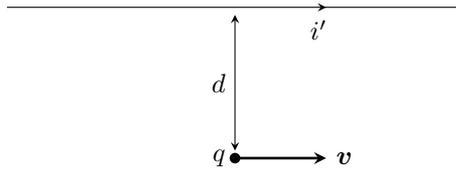
Diversamente da quanto accade nel sistema di riferimento  $\mathcal{S}$ , in  $\mathcal{S}'$  il filo è percorso da una corrente di intensità

$$i' = \lambda'V ; \quad (9.68)$$

infatti la carica elettrica che attraversa una data sezione del filo nel tempo infinitesimo  $dt'$  è

$$dq' = \lambda' dx' , \quad (9.69)$$

ove  $dx' = V dt'$  è la distanza percorsa dalle cariche elettriche in moto con velocità  $V$  nel tempo  $dt'$ . Quindi si ricava  $i' = \frac{dq'}{dt'} = \lambda'V$ , come detto.



**Figura 9.27:** La corrente elettrica  $i'$  nel sistema  $\mathcal{S}'$ .

Questa corrente elettrica genera un campo magnetico di modulo [si ricordi l'equazione (9.37)]

$$B' = \mu_0 \frac{i'}{2\pi d} = \mu_0 \frac{\lambda'V}{2\pi d} . \quad (9.70)$$

Il vettore  $\mathbf{B}$  ruota attorno alla corrente in senso antiorario; in figura, ove si trova  $q$  è entrante (non rappresentato). Ma la carica elettrica  $q$  è in movimento con velocità  $\mathbf{v}$  nella stessa direzione e nello stesso verso della corrente. Vi è quindi una forza magnetica attrattiva di modulo

$$F'_M = qVB' = \mu_0 q \frac{\lambda'V^2}{2\pi d} . \quad (9.71)$$

Continua ad esserci, anche in  $\mathcal{S}'$ , una forza elettrica repulsiva di modulo

$$F'_E = q \frac{\lambda'}{2\pi\epsilon_0 d} ; \quad (9.72)$$

la forza totale agente sulla carica elettrica  $q$  è quindi

$$F' = F'_E - F'_M = q \frac{\lambda'}{2\pi\epsilon_0 d} - \mu_0 q \frac{\lambda'V^2}{2\pi d} = \frac{q\lambda'}{2\pi d} \left( \frac{1}{\epsilon_0} - \mu_0 V^2 \right) ; \quad (9.73)$$

che, ricordando la (9.65), diviene

$$F' = \frac{q\lambda'}{2\pi\epsilon_0 d} \left( 1 - \frac{V^2}{c^2} \right) . \quad (9.74)$$

A questo punto la (9.67) mi consente di scrivere

$$F' = \frac{q\lambda}{2\pi\epsilon_0 d} \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} \left( 1 - \frac{V^2}{c^2} \right) = \frac{q\lambda}{2\pi\epsilon_0 d} \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} . \quad (9.75)$$

Questa equazione confrontata con l'espressione della forza in  $\mathcal{S}$ , equazione (9.66), dà

$$F' = \frac{F}{\gamma} . \quad (9.76)$$

La forza dunque è diversa nei due sistemi di riferimento. Che quella appena ottenuta sia la relazione corretta fra le componenti della forza perpendicolari a  $\boldsymbol{v}$  si capisce dal ragionamento seguente. La componente perpendicolare a  $\boldsymbol{v}$  della quantità di moto  $p$  non cambia (si ricordi che nelle trasformazioni di Lorentz si modificano solo le componenti longitudinale e temporale di un quadrivettore). Quindi dalle relazioni

$$F = \frac{dp}{dt} \quad , \quad F' = \frac{dp'}{dt'} \quad (9.77)$$

si evince

$$dp = dp' \quad \longrightarrow \quad F dt = F' dt' . \quad (9.78)$$

ma per la dilatazione dei tempi vale

$$dt' = \gamma dt , \quad (9.79)$$

quindi

$$F' = \frac{F}{\gamma} , \quad (9.80)$$

come trovato sopra. La relazione (9.76) è quindi coerente con il principio di relatività. Nel caso particolare in cui la  $F$  sia nulla evidentemente è nulla anche la  $F'$  coerentemente con quanto trovato sopra.

### Osservazioni

1. Da quanto visto sopra emerge che la descrizione che viene qui data della teoria dei campi elettrico e magnetico e delle loro interazioni con le cariche elettriche è coerente, cioè rispetta il principio di relatività, *solo se* per passare da un sistema di riferimento ad un altro in moto relativo uniforme si usano le trasformazioni di Lorentz. Quindi, diversamente dalle teorie viste precedentemente, segnatamente meccanica e termodinamica, quella elettromagnetica è una teoria essenzialmente relativistica nel senso einsteiniano: se vista fuori da tale modello essa è completamente incoerente.
2. La relazione (9.65) è corretta. Si sottolinea qui che il valore di  $\mu_0$  rimane fissato, come si è visto sopra, definendo l'unità di misura dell'intensità di corrente elettrica; il valore di  $\epsilon_0$ , dato nell'equazione (7.4), rimane fissato di conseguenza. Entrambi i valori di queste costanti, come quello di  $c$  sono quindi noti esattamente per definizione.
3. Negli esempi qui svolti si è visto che la stessa situazione fisica vista da diversi sistemi di riferimento viene interpretata in termini di forze solo elettriche, solo magnetiche o di una loro sovrapposizione. Da un punto di vista relativistico, quindi, la separazione tra interazione elettrica e magnetica non ha alcun significato in quanto essa dipende dal sistema di riferimento prescelto. Esse sono quindi interpretate come due aspetti del *medesimo fenomeno*: il **campo elettromagnetico**, in termini del quale la formulazione, non trattata in queste note, è indipendente dalla scelta del sistema di riferimento.

# 10

## INDUZIONE ELETTROMAGNETICA.

---

Si è visto nel capitolo precedente come, in seguito allo studio delle interazioni fra correnti elettriche, Ampère, Laplace e altri giunsero a capire che i fenomeni osservati potevano essere descritti in termini di campi magnetici generati dalle correnti. Verso il 1830 Faraday cominciò a chiedersi se non sia da aspettarsi anche il fenomeno opposto cioè che un buon conduttore posto in una regione di spazio ove vi sia un campo magnetico non divenga sede di correnti elettriche. Il suo punto di partenza, in questa indagine, è stata l'analogia con l'induzione elettrostatica: come una carica elettrica, tramite il campo (elettrico) che genera, può indurre una carica elettrica su di un altro corpo, allo stesso modo è pensabile che una corrente elettrica, circolante in un dato circuito, tramite il campo (magnetico) che genera, possa indurre una corrente elettrica in un altro circuito. Una sua pubblicazione del 1831 descrive il seguente esperimento. Dati due circuiti, vicini ma isolati fra loro, uno su cui si trovi un galvanometro ed uno collegabile ad un generatore di tensione. Faraday osservò che il galvanometro segnala il passaggio di corrente solo all'atto in cui l'altro circuito veniva collegato al o scollegato dal generatore, e nei due casi le correnti che attraversano il galvanometro hanno versi opposti. Similmente avviene se i due circuiti, uno dei quali collegato al generatore, sono in moto relativo. Faraday interpretò queste osservazioni ipotizzando che la corrente circolante in un circuito *inducesse* una corrente sul secondo circuito. Scopo del presente capitolo è di indagare la teoria di Faraday.

### 10.1 UN PRIMO ESEMPIO.

Si consideri il dispositivo introdotto per la verifica sperimentale della seconda legge di Laplace (si veda la figura 9.10). Si è visto che in tale situazione sulla sbarretta mobile di lunghezza  $\ell$  e resistenza  $R$  percorsa da una corrente elettrica di intensità  $i$  in un campo magnetico uniforme perpendicolare agisce una forza di modulo

$$F = i\ell B . \quad (10.1)$$

Si supponga ora di bloccare la sbarretta: in questo caso il generatore per far scorrere nel circuito la corrente elettrica di intensità  $i_0 = \frac{V}{R}$  deve fornire la potenza

$$P = Vi_0 = Ri_0^2 . \quad (10.2)$$

Se la sbarretta viene lasciata libera il generatore deve anche fornire l'energia necessaria al moto della sbarretta. Per muovere la sbarretta di un tratto infinitesimo  $dx$  la forza  $F$  scritta sopra compie il lavoro

$$d\mathcal{L} = i\ell B dx , \quad (10.3)$$

il generatore quindi deve fornire la potenza

$$P = \frac{d\mathcal{L}}{dt} = i\ell B \frac{dx}{dt} = i\ell Bv = i \frac{d(\ell Bx)}{dt} = i \frac{d\Phi_S(\mathbf{B})}{dt} . \quad (10.4)$$

La potenza qui è stata scritta in vari modi tutti utili in quel che segue. Ora interessa l'ultima espressione che lega la potenza alla derivata del flusso del campo magnetico attraverso la superficie  $S$  racchiusa dal circuito. Il flusso magnetico attraverso il circuito varia perché  $S$  aumenta. Per la conservazione dell'energia, quindi la potenza fornita dal generatore deve essere uguale a quella dissipata sulla resistenza piú quella necessaria a muovere la sbarretta:

$$Vi = Ri^2 + i \frac{d\Phi_S(\mathbf{B})}{dt} \quad \longrightarrow \quad V = Ri + \frac{d\Phi_S(\mathbf{B})}{dt} = Ri - \mathcal{E}_i , \quad (10.5)$$

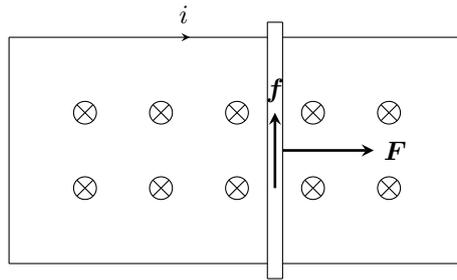
ove si è definito

$$\mathcal{E}_i = -\frac{d\Phi_S(\mathbf{B})}{dt}, \quad (10.6)$$

detta **forza elettromotrice indotta**. A sbarretta ferma nel circuito scorre una corrente elettrica di intensità  $i_0 > i$ , infatti  $V = Ri_0 = Ri + \frac{d\Phi_S(\mathbf{B})}{dt} > Ri$ , essendo la derivata positiva. In altre parole  $\mathcal{E}_i$  si comporta come una f.e.m. che si oppone al moto delle cariche nel filo, infatti se fosse nulla l'intensità di corrente sarebbe maggiore. La cosa diventa più esplicita riscrivendo l'equazione precedente nella forma

$$V + \mathcal{E}_i = Ri \quad (10.7)$$

e ricordando che  $\mathcal{E}_i$  è negativa. Per capire meglio quello che sta succedendo si consideri un circuito senza generatore in cui la sbarretta mobile sia spostata da una forza  $\mathbf{F}$ .



**Figura 10.1:** Il circuito senza generatore.

Come nel caso precedente il circuito si trova in una zona in cui è presente un campo magnetico perpendicolare entrante. Su ognuna delle cariche di conduzione (qui supposte positive) agisce la forza di Lorentz

$$\mathbf{f}_q = q\mathbf{v} \wedge \mathbf{B}. \quad (10.8)$$

Questa forza può essere ricondotta formalmente ad un campo elettrico

$$\mathbf{E}_i = \frac{\mathbf{f}_q}{q} = \mathbf{v} \wedge \mathbf{B}; \quad (10.9)$$

che viene detto campo elettrico **indotto**. La f.e.m. corrispondente è il lavoro compiuto sull'unità di carica nel suo moto lungo la sbarretta, quindi è pari a

$$\mathbf{E}_i \cdot \boldsymbol{\ell} = \mathbf{v} \wedge \mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\ell} = v\ell B = \frac{d\Phi_S(\mathbf{B})}{dt}. \quad (10.10)$$

Si noti che questa è proprio la f.e.m. indotta trovata sopra o, meglio, ne è il valore assoluto.

### Osservazioni

1. Il risultato qui trovato è una esemplificazione di un fatto che ha validità generale. Ogni prelievo (o fornitura) di energia in un punto di un circuito elettrico si manifesta con una f.e.m. negativa (o positiva) agente in quel punto del circuito.

## 10.2 LEGGE DI FARADAY-NEUMANN-LENZ.

L'esempio ora esaminato non è che un caso particolare di una legge generale, nota col nome di **legge di Faraday-Neumann-Lenz**<sup>1</sup>:

*La variazione di flusso magnetico attraverso una superficie  $S$  di bordo  $\gamma$  genera un campo elettrico la cui circuitazione  $\Gamma_\gamma(\mathbf{E})$  è opposta alla derivata rispetto al tempo del flusso magnetico attraverso  $S$ .*

<sup>1</sup> Franz Ernst Neumann (1798-1895) e Heinrich Friederich Emil Lenz (1804-1865), fisici tedeschi.

$$\Gamma_\gamma(\mathbf{E}) = -\frac{d\Phi_S(\mathbf{B})}{dt}. \quad (10.11)$$

Occorre specificare una convenzione sui segni del flusso e della circuitazione. Essi sono positivi quando il campo fluisce in modo da vedere il verso di  $\gamma$  antiorario. Quindi ad esempio nel caso sopra discusso, e rappresentato nella figura 10.1, il flusso del campo magnetico *entrante* aumenta in quanto aumenta la superficie  $S$  attraverso cui fluisce; rispetto a ciò la circuitazione è positiva se oraria. Ma, vista la presenza del segno  $-$  nell'equazione (10.11), la circuitazione (e quindi la f.e.m.) è antioraria. Tutto ciò è piú semplicemente enunciato nella legge di Lenz.

*Una variazione di flusso magnetico attraverso un circuito genera una corrente elettrica indotta tale da opporsi alla causa che l'ha generata.*

Rifacendosi ancora al caso visto sopra e alla figura 10.1, si osservi che il moto della sbarretta verso destra produce *un aumento del flusso magnetico entrante*, quindi nel circuito si genera una corrente elettrica indotta di verso antiorario che genera, a sua volta, un *campo magnetico indotto uscente*. Questo campo magnetico indotto è tale quindi da opporsi all'aumento del flusso magnetico entrante. Se la sbarretta si muovesse verso sinistra o se il campo magnetico in cui trova fosse uscente si avrebbe una corrente elettrica scorrente in verso antiorario. Cambiando sia il verso del campo che il senso di moto della sbarretta la corrente ritorna in verso orario.

### Osservazioni

1. La legge di Lenz si applica *solo* nel caso sia presente un circuito elettrico. La (10.11), invece, ha validità ben piú generale. In effetti non è affatto richiesto che  $\gamma$  ed  $S$  siano una curva ed una superficie materiali, ma possono essere piú in generale oggetti matematici.
2. Si osservi che se la legge di Lenz fosse violata avremmo una violazione del principio di conservazione dell'energia. Infatti se la corrente elettrica indotta non si opponesse alla causa che l'ha generata, ma la favorisse, cioè se si avesse per esempio un campo magnetico indotto che contribuisse all'aumento del flusso magnetico, questo aumento genererebbe a sua volta una corrente elettrica indotta, che genererebbe ancora un campo magnetico e via di seguito, fino ad avere campo e corrente elettrica infiniti. Questo spontaneamente senza avere una sorgente di energia; il che è palesemente impossibile. Invece se la corrente elettrica indotta si oppone alla variazione di flusso, diviene necessaria una fornitura continua di energia dall'esterno per mantenerla, come si vedrà nel prossimo paragrafo.
3. Nel caso particolare in cui  $\gamma$  sia un circuito elettrico  $\Gamma_\gamma(\mathbf{E})$  è la f.e.m. indotta discussa nell'esempio introduttivo al paragrafo precedente; si ottiene quindi la (10.6) come caso particolare.
4. Il fatto che la circuitazione di  $\mathbf{E}$  lungo una curva chiusa non sia nulla, ci dice che il campo elettrico **non** è conservativo e quindi, in particolare non è possibile definire un potenziale elettrico.
5. Se la superficie  $S$  è chiusa, quindi senza bordo, entrambi i membri della (10.11) sono identicamente nulli.

#### 10.2.1 LA LEGGE DI FELICI.

Se si considera la legge (10.11) per un circuito elettrico, il primo membro non è altro che la f.e.m. indotta  $\mathcal{E}_i$ . In un circuito di resistenza  $R$  ove si abbia induzione elettromagnetica circola quindi la corrente elettrica di intensità  $i$  data da

$$i(t) = -\frac{1}{R} \frac{d\Phi_S(\mathbf{B})}{dt}. \quad (10.12)$$

Se questa relazione viene integrata rispetto al tempo fra gli istanti  $t_1$  e  $t_2$ ,

$$\int_{t_1}^{t_2} i(t) dt = -\frac{1}{R} \int_{t_1}^{t_2} \frac{d\Phi_S(\mathbf{B})}{dt} dt . \quad (10.13)$$

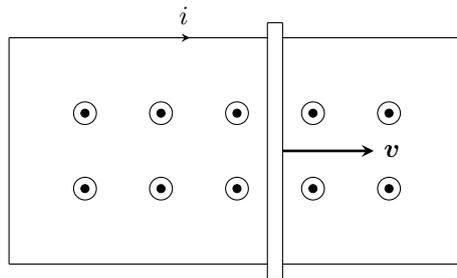
Il primo membro è la carica totale  $Q$  che scorre nel circuito fra gli istanti  $t_1$  e  $t_2$ . Facendo l'integrale al secondo membro si ottiene

$$Q = \frac{\Phi_S(\mathbf{B})(t_1) - \Phi_S(\mathbf{B})(t_2)}{R} . \quad (10.14)$$

Questa equazione è nota con il nome di **legge di Felici**<sup>2</sup>; dice che la carica totale che attraversa il circuito nell'intervallo di tempo fra  $t_1$  e  $t_2$ , non dipende da come varia il flusso attraverso il circuito, ma solo dalla sua variazione e dalla resistenza del circuito.

### 10.3 BILANCIO ENERGETICO.

Si torni a considerare un circuito costituito da un conduttore di resistenza trascurabile piegato a  $\cup$  su cui possa scorrere senza attrito una sbarretta conduttrice di lunghezza  $\ell$  e resistenza  $R$ . Il circuito mobile così costruito si trovi in una regione di spazio in cui vi sia un campo magnetico  $\mathbf{B}$  perpendicolare al piano del circuito e uscente dal foglio (così, tanto per cambiare). Si supponga che la sbarretta si muova con velocità costante  $\mathbf{v}$  diretta verso destra.



**Figura 10.2:** Il circuito mobile.

In questa situazione il flusso magnetico attraverso il circuito varia poiché il circuito aumenta di area. Si può quindi usare la legge di Faraday-Neumann-Lenz per la determinazione della f.e.m. e della corrente elettrica indotta. Si osservi che in un dato tempo  $t$  la sbarretta si muove di  $x = vt$ ; quindi il flusso del campo magnetico attraverso il circuito varia secondo la legge

$$\Phi_S(\mathbf{B}) = \Phi_0 + B\ell x = \Phi_0 + B\ell vt , \quad (10.15)$$

ove  $\Phi_0$  è il flusso magnetico all'istante  $t = 0$ , in cui comincia l'azione di  $\mathbf{F}$ . Il modulo della f.e.m. indotta quindi è dato da

$$\mathcal{E}_i = \frac{d\Phi_S(\mathbf{B})}{dt} = B\ell \frac{dx}{dt} = B\ell v , \quad (10.16)$$

e la corrente elettrica indotta ha intensità

$$i = \frac{\mathcal{E}_i}{R} = \frac{B\ell v}{R} . \quad (10.17)$$

Per determinare il verso della f.e.m. indotta, e quindi della corrente elettrica, conviene rifarsi alla legge di Lenz. Il flusso magnetico uscente dal foglio sta aumentando, quindi la corrente indotta deve generare un campo magnetico che si opponga a questo aumento; quindi un campo magnetico

<sup>2</sup> Riccardo Felici (1819-1902), fisico italiano.

entrante: la corrente elettrica quindi dovrà scorrere in senso orario. Sulla sbarretta, percorsa dalla corrente elettrica ora calcolata, agisce una forza magnetica che si oppone al moto della sbarretta (si veda sopra osservazione 2) e quindi è diretta verso sinistra; essa ha modulo

$$F_M = \ell Bi = \frac{B^2 \ell^2 v}{R} . \quad (10.18)$$

Se la velocità della sbarretta deve essere mantenuta costante, è quindi necessaria l'azione di una forza esterna  $\mathbf{F} = -\mathbf{F}_M$ , non rappresentato in figura. La potenza fornita da questa forza è

$$P_F = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} = Fv = \frac{B^2 \ell^2 v^2}{R} . \quad (10.19)$$

Questa energia fornita al circuito è quella necessaria a far circolare la corrente elettrica  $i$  e viene dissipata sulla resistenza  $R$ ; infatti il calcolo della potenza dissipata per effetto Joule dà:

$$P_R = Ri^2 = R \frac{B^2 \ell^2 v^2}{R^2} = \frac{B^2 \ell^2 v^2}{R} . \quad (10.20)$$

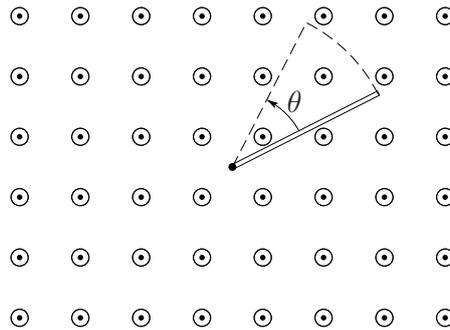
Quindi il lavoro compiuto da  $\mathbf{F}$  sulla sbarretta non va ad aumentare l'energia cinetica di questa, ma va a muovere le cariche responsabili della corrente elettrica  $i$  e viene interamente dissipata su  $R$ .

## 10.4 APPLICAZIONI DELL'INDUZIONE ELETTROMAGNETICA.

Si considerano in questo paragrafo due casi in cui l'applicazione della legge di Faraday-Neumann-Lenz è particolarmente istruttiva.

### 10.4.1 L'ASTA ROTANTE.

Si consideri un'asta conduttrice di lunghezza  $\ell$  rotante attorno ad un asse perpendicolare passante per un suo estremo con velocità angolare costante  $\omega$ . Parallelo all'asse di rotazione vi sia un campo magnetico uniforme  $\mathbf{B}$ . Il moto nel campo magnetico produce ai capi dell'asta una forza elettromotrice che può essere calcolata usando la legge (10.11).



**Figura 10.3:** L'asta rotante in un campo magnetico perpendicolare.

Si osservi infatti che è possibile costruire a partire dalla sbarretta mobile una curva chiusa, tratteggiata in figura, che racchiude una superficie variabile. Attraverso tale superficie variabile è possibile calcolare la derivata temporale del flusso magnetico. Supponendo che la legge angolare della rotazione della sbarretta sia

$$\theta(t) = \omega t + \theta_0 , \quad (10.21)$$

l'area del settore circolare formato dalla sbarretta e dalla linea tratteggiata è

$$\mathcal{A}(t) = \frac{1}{2} \ell^2 \theta(t) , \quad (10.22)$$

quindi il flusso magnetico vale

$$\Phi_S(\mathbf{B})(t) = \frac{1}{2} B \ell^2 \theta(t) \quad (10.23)$$

si calcola così la circuitazione del campo elettrico indotto, cioè la f.e.m. indotta, il cui valore assoluto è:

$$\mathcal{E}_i = \frac{d\Phi_S(\mathbf{B})}{dt} = \frac{1}{2} B \ell^2 \omega . \quad (10.24)$$

Si lascia al lettore studioso il ragionamento necessario a mostrare che il campo elettrico indotto è diretto verso il centro.

Lo stesso calcolo si può fare in un modo un po' diverso. Si consideri una carica elettrica di conduzione  $q$  (che, si ricordi, è convenzionalmente positiva) sulla sbarretta rotante. Questa si trovi ad una distanza  $r$  dal centro di rotazione, si muove pertanto con velocità  $v = \omega r$  perpendicolarmente al campo  $\mathbf{B}$  è quindi sottoposta ad una forza di modulo

$$F = q\omega r B , \quad (10.25)$$

e quindi ad un campo elettrico di modulo

$$E = \omega r B . \quad (10.26)$$

Questo campo elettrico genera una f.e.m. lungo l'asta data da

$$\int_0^\ell E dr = \frac{1}{2} B \ell^2 \omega , \quad (10.27)$$

che è ancora il risultato trovato sopra.

#### 10.4.2 SPIRA ROTANTE. GENERATORE DI TENSIONE ALTERNATA.

Si consideri ora una spira di area  $\mathcal{A}$  rotante attorno ad un'asse ad essa complanare e passante per il suo centro; sia  $\omega$  la velocità angolare costante. Si indica con  $\theta$  l'angolo formato dalla direzione del campo  $\mathbf{B}$  con la retta perpendicolare al piano della spira (si veda la figura 10.4). Tale angolo dipenda dal tempo secondo la legge oraria

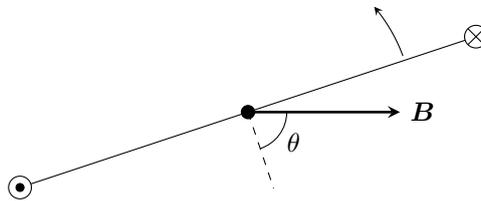
$$\theta(t) = \omega t + \theta_0 , \quad (10.28)$$

il flusso di  $\mathbf{B}$  attraverso la spira rotante è pertanto

$$\Phi_S(\mathbf{B})(t) = \mathcal{A} B \cos \theta(t) = \mathcal{A} B \cos(\omega t + \theta_0) . \quad (10.29)$$

il modulo della f.e.m. indotta è quindi dato dalla derivata rispetto al tempo di questo flusso:

$$\mathcal{E}_i = \omega \mathcal{A} B \sin(\omega t + \theta_0) . \quad (10.30)$$



**Figura 10.4:** La spira rotante in un campo magnetico perpendicolare all'asse di rotazione.

Se la spira ha resistenza  $R$  questa f.e.m. genera una corrente elettrica di intensità

$$i = \frac{1}{R} \omega \mathcal{A} B \sin(\omega t + \theta_0) . \quad (10.31)$$

Si noti che  $i$  ha un andamento sinusoidale e ogni mezzo giro della spira cioè ogni  $T/2 = \pi/\omega$  secondi il verso di rotazione si inverte. Il dispositivo qui schematicamente descritto è detto **generatore di tensione alternata**. Il prossimo capitolo è interamente dedicato allo studio dei circuiti elettrici in cui siano presenti tali generatori.

## 10.5 AUTOINDUZIONE.

Si consideri un circuito elettrico percorso dalla corrente elettrica di intensità  $i$ , che genera un campo magnetico  $\mathbf{B}$ . Questo campo ha un flusso attraverso la spira stessa. Dalla prima legge elementare di Laplace, equazione (9.46), risulta chiaro che il campo magnetico generato è proporzionale all'intensità  $i$  della corrente elettrica che lo percorre; quindi anche il suo flusso è proporzionale a  $i$ . Vale quindi

$$\Phi_S(\mathbf{B}) = Li . \quad (10.32)$$

Il coefficiente di proporzionalità  $L$  è detto **coefficiente di autoinduzione** o **induttanza** del circuito in questione. Se questa corrente elettrica varia, varia anche il flusso magnetico attraverso la spira stessa, si ha quindi una f.e.m. autoindotta data da

$$\mathcal{E}_i = -\frac{d\Phi_S(\mathbf{B})}{dt} = -L \frac{di}{dt} . \quad (10.33)$$

Poiché la f.e.m. autoindotta si oppone, per la legge di Lenz, alla circolazione della corrente viene anche detta **forza controlettromotrice** (f.c.e.m.). L'unità di misura dell'induttanza è l'**henry**<sup>3</sup>, simbolo  $H$ , le cui dimensioni sono

$$H = \frac{V \cdot s}{A} = \Omega \cdot s . \quad (10.34)$$

Presenta l'induttanza di un henry il circuito nel quale si genera la f.e.m. autoindotta di un volt quando la corrente elettrica che lo attraversa varia di un ampere al secondo.

### 10.5.1 INDUTTANZA DI UN SOLENOIDE.

Si consideri un solenoide di lunghezza  $\ell$ , composto da  $N$  spire e di sezione  $S$ , percorso dalla corrente elettrica di intensità  $i$ . Il campo magnetico interno al solenoide è uniforme e il suo modulo vale

$$B = \mu_0 \frac{N}{\ell} i . \quad (10.35)$$

Il flusso magnetico attraverso le  $N$  spire è quindi

$$\Phi(\mathbf{B}) = NBS = \mu_0 \frac{N^2 S}{\ell} i , \quad (10.36)$$

da cui si deduce

$$L = \mu_0 \frac{N^2 S}{\ell} . \quad (10.37)$$

Nell'esempio del solenoide si vede una caratteristica generale dell'induttanza:  $L$  dipende solo dalle proprietà geometriche e costruttive del circuito.

## 10.6 CIRCUITO INDUTTIVO IN CORRENTE CONTINUA.

Si consideri un generatore di tensione  $V$  a cui sia collegato un conduttore. Siano  $R$  la resistenza ed  $L$  l'induttanza complessive del circuito.

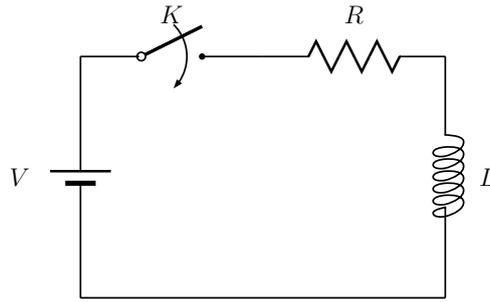
Nel circuito sia presente un interruttore  $K$  inizialmente aperto. All'istante  $t = 0$  l'interruttore viene chiuso e comincia a scorrere una corrente di intensità  $i(t)$ , che verifica la prima legge di Ohm. Nell'applicare la legge di Ohm occorre tenere conto, oltre che del generatore, anche della f.e.m. autoindotta. Vale quindi la relazione

$$Ri(t) = V + \mathcal{E}_i = V - L \frac{di(t)}{dt} . \quad (10.38)$$

Per ottenere la corrente all'istante  $t$  occorre integrare i due membri di questa equazione

$$\int_0^{i(t)} \frac{di}{V - Ri} = \int_0^t \frac{dt}{L} . \quad (10.39)$$

<sup>3</sup> Joseph Henry (1797-1878), fisico statunitense.



**Figura 10.5:** Il circuito induttivo  $RL$ .

Il cambio di variabili  $x = V - Ri$  nel primo integrale porge

$$\int_V^{V-Ri(t)} \frac{dx}{x} = -\frac{R}{L} t \quad \rightarrow \quad \log \frac{V-Ri(t)}{V} = -\frac{R}{L} t \quad \rightarrow \quad \frac{V-Ri(t)}{V} = e^{-\frac{R}{L} t}, \quad (10.40)$$

da cui

$$i(t) = \frac{V}{R} \left( 1 - e^{-\frac{R}{L} t} \right). \quad (10.41)$$

Si vede quindi che la corrente elettrica raggiunge l'intensità massima  $i_\infty = \frac{V}{R}$  solo dopo un tempo infinito. In realtà dopo un tempo  $\tau = \frac{L}{R}$  la corrente circolante è già circa il 63% di  $i_\infty$ , e dopo  $4\tau$  arriva al 98%.  $\tau$  è detto **tempo caratteristico** del circuito  $RL$ .

## 10.7 ENERGIA MAGNETICA DI UN CIRCUITO.

Il generatore che fornisce energia per la circolazione della corrente elettrica in un circuito oltre all'energia necessaria a compensare le perdite sulla resistenza per effetto Joule, deve anche fornire una d.d.p. che si opponga alla f.e.m. autoindotta: questa infatti compie un lavoro negativo. Per vederlo si consideri un intervallo di tempo infinitesimo  $dt$ , in questo tempo la f.e.m. autoindotta  $\mathcal{E}_i = -L \frac{di}{dt}$  fornisce la potenza  $\mathcal{E}_i i = -Li \frac{di}{dt}$  e quindi compie il lavoro

$$d\mathcal{L} = \mathcal{E}_i i dt = -Li \frac{di}{dt} dt = -L i di. \quad (10.42)$$

A compensare questa perdita di energia è il generatore. In particolare si può dimostrare che alla chiusura del circuito quando la corrente passa dal valore zero al valore  $i$  il generatore fornisce complessivamente il lavoro

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} Li^2. \quad (10.43)$$

Questa energia fornita dal generatore viene *accumulata* nel circuito e, come si vedrà poco sotto, è l'energia magnetica del campo  $\mathbf{B}$  generato dal circuito.

La dimostrazione è facile; basta integrare, ricordando di cambiare il segno perché ora si sta considerando il lavoro *fornito dal* generatore al circuito:

$$\mathcal{L} = L \int_0^i i di = \frac{1}{2} Li^2, \quad (10.44)$$

Si consideri ancora l'esempio di un solenoide di lunghezza  $\ell$  e sezione  $S$ , costituito da  $N$  spire, in cui circola la corrente elettrica di intensità  $i$ . All'interno del solenoide vi è un campo magnetico uniforme di modulo

$$B = \mu_0 \frac{N}{\ell} i. \quad (10.45)$$

Ricordando l'espressione (10.37) dell'induttanza del solenoide l'energia accumulata nel circuito diventa

$$W = \frac{1}{2} Li^2 = \frac{1}{2} \mu_0 \frac{N^2 S}{\ell} i^2 = \frac{1}{2\mu_0} B^2 \ell S , \quad (10.46)$$

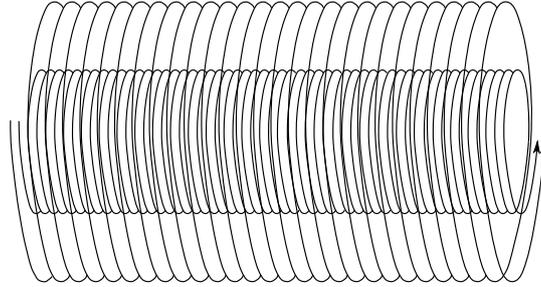
osservando che  $\ell S$  è il volume dello spazio contenuto nel solenoide, ecco che si può scrivere un'equazione per l'energia magnetica per unità di volume, ossia per la **densità di energia magnetica**.

$$w_M = \frac{B^2}{2\mu_0} . \quad (10.47)$$

L'equazione ora trovata nel caso particolare del solenoide ha validità generale e rappresenta la densità di energia dovuta alla presenza di un campo magnetico. Si noti la somiglianza con l'analoga equazione trovata per l'energia elettrostatica (7.142).

## 10.8 INDUZIONE MUTUA.

Si consideri ora il caso di due solenoidi aventi raggi diversi  $r_1 < r_2$ , costituiti rispettivamente da  $N_1$  ed  $N_2$  spire, aventi la stessa lunghezza  $\ell$  e che si trovino uno dentro l'altro disposti in modo da avere lo stesso asse di simmetria; siano percorsi dalle correnti  $i_1$  ed  $i_2$ .



**Figura 10.6:** I due solenoidi coassiali.

Il flusso magnetico totale attraverso le  $N_2$  spire del solenoide piú esterno può essere calcolato sommando il flusso di entrambi i campi generati:

$$\Phi_2(\mathbf{B}) = N_2 B_1 S_1 + N_2 B_2 S_2 = N_2 \mu_0 \frac{N_1}{\ell} i_1 \pi r_1^2 + N_2 \mu_0 \frac{N_2}{\ell} i_2 \pi r_2^2 . \quad (10.48)$$

Similmente il flusso magnetico attraverso le  $N_1$  spire del solenoide piú interno è dato da

$$\Phi_1(\mathbf{B}) = N_1 B_1 S_1 + N_1 B_2 S_1 = N_1 \mu_0 \frac{N_1}{\ell} i_1 \pi r_1^2 + N_1 \mu_0 \frac{N_2}{\ell} i_2 \pi r_1^2 . \quad (10.49)$$

Ricordando l'equazione (10.37), e definendo

$$M_{12} = M_{21} = \mu_0 \frac{N_1 N_2 \pi r_1^2}{\ell} , \quad (10.50)$$

le due equazioni precedenti si possono scrivere nella forma

$$\begin{aligned} \Phi_1(\mathbf{B}) &= L_1 i_1 + M_{12} i_2 \\ \Phi_2(\mathbf{B}) &= M_{21} i_1 + L_1 i_2 . \end{aligned} \quad (10.51)$$

I coefficienti  $M_{12}$  ed  $M_{21}$  sono detti **coefficienti di induzione mutua** dei due solenoidi. In generale, si può dimostrare che l'equazione ora scritta vale per qualunque coppia di circuiti che siano in interazione magnetica reciproca. In particolare si dimostra l'uguaglianza dei due coefficienti di induzione mutua, è quindi possibile lasciar cadere i pedici 1 e 2 e scrivere semplicemente  $M$ . Si fa notare che, come visto per l'induttanza, anche il coefficiente di induzione mutua dipende solo

dalle caratteristiche geometriche dei due circuiti e dalle loro reciproche posizioni. Diversamente da  $L$ , che è sempre positivo, il coefficiente di induzione mutua  $M$  può essere positivo o negativo a seconda dei versi di scorrimento delle correnti elettriche nei due circuiti. Se i versi sono concordi  $M$  è positivo.

Se le correnti sono variabili nel tempo in ciascun circuito si manifestano delle f.e.m. indotte che si possono ottenere derivando le due equazioni precedenti:

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_{i,1} &= -\frac{d\Phi_1(\mathbf{B})}{dt} = -L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} \\ \mathcal{E}_{i,2} &= -\frac{d\Phi_2(\mathbf{B})}{dt} = -L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt} .\end{aligned}\quad (10.52)$$

### 10.9 ENERGIA MAGNETICA DI DUE CIRCUITI ACCOPPIATI.

Si considerino ora due circuiti posti vicini aventi induttanze  $L_1$  ed  $L_2$  e coefficiente di induzione mutua  $M$ . Si supponga che inizialmente sia  $i_1 \neq 0$  e  $i_2 = 0$ . L'energia magnetica è quindi solo quella del primo circuito:

$$W_1 = \frac{1}{2} L_1 i_1^2 . \quad (10.53)$$

Si faccia ora crescere l'intensità della corrente elettrica nel secondo circuito di una quantità  $di_2$  nel tempo  $dt$ . Questo causa nel primo circuito una f.e.m. indotta  $\mathcal{E}_i$ . A causa di questa f.e.m. indotta il generatore, per mantenere invariata la  $i_1$ , deve fornire l'energia

$$dW_{12} = -\mathcal{E}_1 i_1 dt = M i_2 \frac{di_2}{dt} i_1 dt = M i_1 di_2 . \quad (10.54)$$

Quindi se la corrente nel secondo circuito sale al valore  $i_2$  l'energia complessiva fornita dal generatore per mantenere costante la  $i_1$  è

$$W_{12} = M i_1 i_2 . \quad (10.55)$$

Nello stesso tempo, il generatore del secondo circuito fornisce l'energia  $W_2 = \frac{1}{2} L_2 i_2^2$ . L'energia totale dei due circuiti accoppiati è quindi

$$W = \frac{1}{2} L_1 i_1^2 + M i_1 i_2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2 . \quad (10.56)$$

#### 10.9.1 RELAZIONE FRA $L_1$ , $L_2$ ED $M$ .

Si consideri l'energia data da (10.56); questa, nonostante la presenza del secondo termine non definito positivo, è non negativa. Per rendersene conto basta osservare che se fosse negativo sarebbero i circuiti a fornire energia ai generatori, cosa evidentemente assurda. Quindi  $W$  non può essere negativo. Si torni quindi all'equazione (10.56) e si raccolga a fattore  $\frac{1}{2} i_2^2$ , posto  $x = \frac{i_1}{i_2}$ , si ottiene

$$W = \frac{1}{2} i_2^2 (L_1 x^2 + 2Mx + L_2) \geq 0 . \quad (10.57)$$

Il grafico di questa funzione di  $x$  è una parabola con la concavità volta verso l'alto. Questa ha quindi un valore minimo per  $x = -\frac{M}{L_1}$ ; per tale  $x$  vale

$$W = \frac{1}{2} i_2^2 \left( \frac{M^2}{L_1} - 2 \frac{M^2}{L_1} + L_2 \right) \geq 0 , \quad (10.58)$$

da cui si ottiene facilmente

$$-\frac{M^2}{L_1} + L_2 \geq 0 \quad \longrightarrow \quad M^2 \leq \sqrt{L_1 L_2} . \quad (10.59)$$

Si usa porre

$$M = \pm k \sqrt{L_1 L_2} , \quad (10.60)$$

ove  $k \leq 1$  è detto **coefficiente di accoppiamento** dei due circuiti. Se  $k = 1$ ,  $M$  ha il massimo valore possibile, se  $k = 0$  risulta  $M = 0$  e i due circuiti sono disaccoppiati.

# 11

## CIRCUITI IN CORRENTE ALTERNATA.

---

In questo capitolo vengono analizzate in qualche dettaglio le caratteristiche dei circuiti alimentati da un generatore di tensione alternata con pulsazione  $\omega$ :

$$V(t) = V_0 \cos \omega t . \quad (11.1)$$

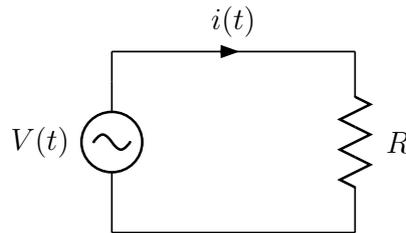
Il generatore in generale fa muovere nel circuito una corrente elettrica la cui intensità è variabile nel tempo con la medesima pulsazione  $\omega$  ma che in generale è sfasata rispetto alla tensione che la ha generata. L'intensità della corrente elettrica ha quindi, in tutta generalità, la forma seguente

$$i(t) = i_0 \cos(\omega t + \theta) . \quad (11.2)$$

In quel che segue vengono ricavate, in modo un po' ripetitivo ma con il vantaggio della completezza, le ampiezze e le fasi delle correnti elettriche in varie situazioni.

### 11.1 CIRCUITO RESISTIVO.

Si consideri un circuito in cui al generatore sia collegata una resistenza  $R$ .



**Figura 11.1:** Il circuito resistivo.

La corrente che circola nel circuito deve soddisfare all'equazione

$$V_0 \cos \omega t = Ri(t) = Ri_0 \cos(\omega t + \theta) . \quad (11.3)$$

È chiaro che questa equazione è soddisfatta con  $i_0 = \frac{V_0}{R}$  e  $\theta = 0$ , quindi

$$i(t) = \frac{V_0}{R} \cos \omega t ; \quad (11.4)$$

La corrente elettrica nel circuito resistivo quindi oscilla in fase con il generatore di tensione.

### 11.2 CIRCUITO CAPACITIVO.

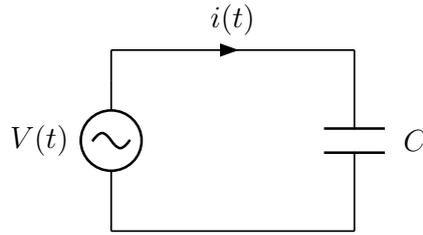
Si consideri un circuito in cui al generatore sia collegato un condensatore di capacità  $C$ .

La tensione ai capi del generatore uguaglia quella ai capi del condensatore, quindi vale

$$V(t) = \frac{1}{C} q(t) , \quad (11.5)$$

ove  $q(t)$  è la carica che si trova sulle armature del condensatore all'istante  $t$ . Derivando questa equazione si ottiene

$$\frac{dV(t)}{dt} = \frac{1}{C} \frac{dq(t)}{dt} = \frac{i(t)}{C} \quad (11.6)$$



**Figura 11.2:** Il circuito capacitivo.

utilizzando (11.1) e (11.2) si ottiene

$$-\omega V_0 \text{sen } \omega t = \frac{i_0}{C} \cos(\omega t + \theta) ; \tag{11.7}$$

usando le formule di addizione questa equazione diviene:

$$-\omega V_0 \text{sen } \omega t = \frac{i_0}{C} \cos \omega t \cos \theta - \frac{i_0}{C} \text{sen } \omega t \text{sen } \theta . \tag{11.8}$$

questa equazione deve valere per qualsiasi valore di  $\omega$ , quindi si devono uguagliare separatamente i coefficienti di  $\text{sen } \omega t$  e di  $\cos \omega t$ , quindi

$$\begin{cases} \frac{i_0}{C} \cos \theta = 0 \\ -\omega V_0 = -\frac{i_0}{C} \text{sen } \theta . \end{cases} \tag{11.9}$$

Dalla prima si ottiene

$$\cos \theta = 0 \quad \longrightarrow \quad \text{sen } \theta = \pm 1 \quad \longrightarrow \quad \theta = \pm \frac{\pi}{2} \tag{11.10}$$

e dalla seconda

$$i_0 = \pm \omega C V_0 . \tag{11.11}$$

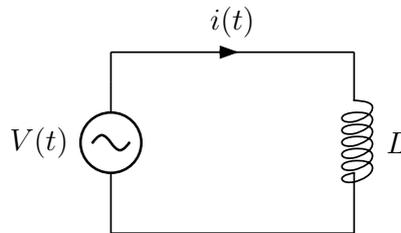
Quindi

$$i(t) = \pm \omega C V_0 \cos \left( \omega t \pm \frac{\pi}{2} \right) = \omega C V_0 \cos \left( \omega t + \frac{\pi}{2} \right) = -\omega C V_0 \text{sen } \omega t . \tag{11.12}$$

Si vede qui che, diversamente dal caso del circuito resistivo, la corrente è sfasata rispetto alla tensione di  $\pi/2$ .

### 11.3 CIRCUITO INDUTTIVO.

Si consideri un circuito in cui al generatore sia collegato un conduttore di induttanza  $L$ . Uguagliando la tensione ai capi del generatore e dell'induttanza si ottiene l'equazione



**Figura 11.3:** Il circuito induttivo.

$$V(t) = L \frac{di(t)}{dt} , \tag{11.13}$$

utilizzando (11.1) e (11.2) si ottiene

$$V_0 \cos \omega t = -\omega L i_0 \sin(\omega t + \theta) = -\omega L i_0 \sin \omega t \cos \theta - \omega L i_0 \cos \omega t \sin \theta . \quad (11.14)$$

uguagliando come sopra i coefficienti:

$$\begin{cases} -\omega L i_0 \cos \theta = 0 \\ V_0 = -\omega L i_0 \sin \theta . \end{cases} \quad (11.15)$$

Dalla prima si ottiene

$$\cos \theta = 0 \quad \longrightarrow \quad \sin \theta = \pm 1 \quad \longrightarrow \quad \theta = \pm \frac{\pi}{2} \quad (11.16)$$

e dalla seconda

$$i_0 = \mp \frac{V_0}{\omega L} . \quad (11.17)$$

Quindi

$$i(t) = \mp \frac{V_0}{\omega L} \cos \left( \omega t \pm \frac{\pi}{2} \right) = \frac{V_0}{\omega L} \cos \left( \omega t - \frac{\pi}{2} \right) = \frac{V_0}{\omega L} \sin \omega t . \quad (11.18)$$

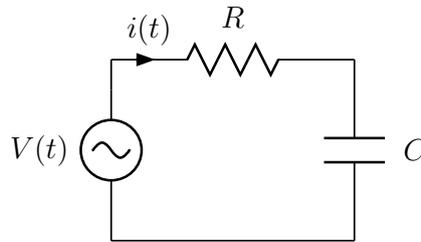
In questo caso quindi la corrente è sfasata rispetto alla tensione di  $-\pi/2$ .

#### 11.4 CIRCUITO RC IN SERIE.

Si consideri un circuito in cui, in serie al generatore siano presenti una resistenza  $R$  ed un condensatore di capacità  $C$ . Ponendo la tensione del generatore uguale alla somma della tensione ai capi della resistenza e del condensatore si ottiene l'equazione

$$V(t) = R i(t) + \frac{q(t)}{C} , \quad (11.19)$$

ove  $q(t)$  è la carica che si trova sulle armature del condensatore all'istante  $t$ .



**Figura 11.4:** Il circuito RC in serie.

Derivando l'equazione (11.19) rispetto al tempo si ottiene

$$\frac{dV(t)}{dt} = R \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C} \frac{dq(t)}{dt} = R \frac{di(t)}{dt} + \frac{i(t)}{C} ; \quad (11.20)$$

sostituendo (11.1) e (11.2) si ottiene

$$-\omega V_0 \sin \omega t = -\omega R i_0 \sin(\omega t + \theta) + \frac{1}{C} i_0 \cos(\omega t + \theta) , \quad (11.21)$$

da cui, usando le formule di addizione del seno e del coseno, si ottiene

$$-\omega V_0 \sin \omega t = -\omega R i_0 \sin \omega t \cos \theta - \omega R i_0 \cos \omega t \sin \theta + \frac{1}{C} i_0 \cos \omega t \cos \theta - \frac{1}{C} i_0 \sin \omega t \sin \theta . \quad (11.22)$$

Uguagliando i coefficienti

$$\begin{cases} -\omega V_0 = -\omega R i_0 \cos \theta - \frac{1}{C} i_0 \sin \theta \\ 0 = -\omega R i_0 \sin \theta + \frac{1}{C} i_0 \cos \theta . \end{cases} \quad (11.23)$$

Dalla seconda si ottiene immediatamente, posto  $\omega_0 = \frac{1}{RC}$ ,

$$\tan \theta = \frac{\omega_0}{\omega} . \quad (11.24)$$

Moltiplicando la prima delle (11.23) per  $\cos \theta$  e la seconda per  $\sin \theta$  si ottiene

$$\begin{cases} -\omega V_0 \cos \theta = -\omega R i_0 \cos^2 \theta - \frac{1}{C} i_0 \sin \theta \cos \theta \\ 0 = -\omega R i_0 \sin^2 \theta + \frac{1}{C} i_0 \cos \theta \sin \theta . \end{cases} \quad (11.25)$$

che sommate danno

$$-\omega V_0 \cos \theta = -\omega R i_0 \quad \longrightarrow \quad \cos \theta = \frac{R i_0}{V_0} . \quad (11.26)$$

Utilizzando la nota formula trigonometrica  $\cos^2 \theta = \frac{1}{1+\tan^2 \theta}$  con le (11.24) e (11.26) si ottiene

$$\frac{R^2 i_0^2}{V_0^2} = \frac{1}{1 + \frac{\omega_0^2}{\omega^2}} \quad \longrightarrow \quad i_0^2 = \frac{V_0^2}{R^2} \frac{1}{1 + \frac{\omega_0^2}{\omega^2}} \quad \longrightarrow \quad i_0 = \frac{V_0}{R} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\omega_0^2}{\omega^2}}} . \quad (11.27)$$

Concludendo, l'intensità corrente che circola nel circuito  $RC$  è

$$i(t) = \frac{V_0}{R} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\omega_0^2}{\omega^2}}} \cos \left( \omega t + \arctan \frac{\omega_0}{\omega} \right) . \quad (11.28)$$

La pulsazione  $\omega_0$  viene detta **frequenza di taglio**. La tensione misurata ai capi della resistenza è:

$$V_R(t) = R i(t) = \frac{V_0}{\sqrt{1 + \frac{\omega_0^2}{\omega^2}}} \cos \left( \omega t + \arctan \frac{\omega_0}{\omega} \right) . \quad (11.29)$$

La tensione ai capi del condensatore deve invece verificare l'equazione:

$$\frac{dV_C}{dt} = \frac{1}{C} \frac{dq(t)}{dt} = \frac{1}{C} i(t) = \frac{V_0}{RC} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\omega_0^2}{\omega^2}}} \cos \left( \omega t + \arctan \frac{\omega_0}{\omega} \right) , \quad (11.30)$$

da cui

$$V_C = \frac{V_0}{\omega RC} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\omega_0^2}{\omega^2}}} \sin \left( \omega t + \arctan \frac{\omega_0}{\omega} \right) = V_0 \frac{\frac{\omega_0}{\omega}}{\sqrt{1 + \frac{\omega_0^2}{\omega^2}}} \cos \left( \omega t + \arctan \frac{\omega_0}{\omega} - \frac{\pi}{2} \right) . \quad (11.31)$$

Si osservi che

$$\begin{aligned} V_C &\simeq V_0 \cos \omega t & , & & V_R &\simeq 0 & \text{ per } \omega \ll \omega_0 \\ V_R &\simeq -V_0 \sin \omega t & , & & V_C &\simeq 0 & \text{ per } \omega \gg \omega_0 . \end{aligned} \quad (11.32)$$

Quindi ai capi della resistenza per  $\omega$  piccola rispetto a  $\omega_0$  si misura una tensione di ampiezza uguale a quella del generatore (seppur sfasata di  $\pi/2$ ), mentre è nulla per  $\omega$  grande rispetto ad  $\omega_0$ . Quindi ai capi di  $R$  si ritrova invariata (sfasamento a parte) la stessa tensione fornita dal generatore solo per grandi valori di  $\omega$ ; cioè *passano* le frequenze alte.

Per questo motivo un dispositivo così concepito si dice **filtro passa alto**. Per  $C$  il comportamento è inverso, si dice quindi che prendendo la tensione ai capi del condensatore si ottiene un **filtro passa basso**.

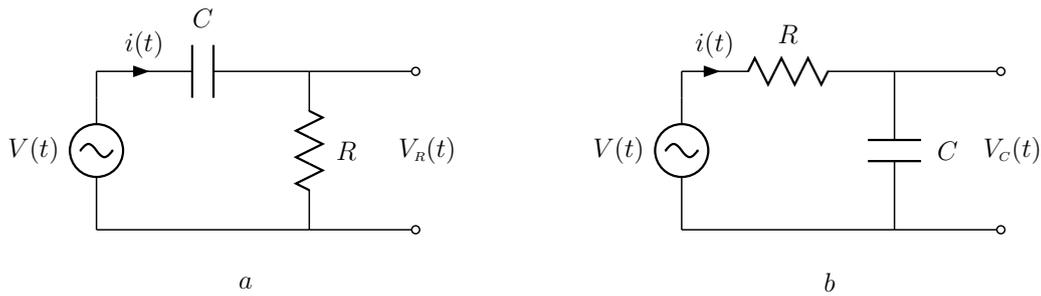


Figura 11.5: Il circuito RC come filtro. a: passa alto, b: passa basso.

### 11.5 CIRCUITO RL IN SERIE.

Si consideri un circuito in cui, in serie al generatore siano presenti una resistenza  $R$  ed un conduttore di induttanza  $L$ .

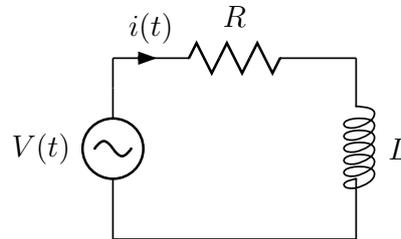


Figura 11.6: Il circuito RL in serie.

Ponendo la tensione del generatore uguale alla somma della tensione ai capi della resistenza e dell'induttanza si ottiene l'equazione

$$V(t) = Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt} . \tag{11.33}$$

Sostituendo (11.1) e (11.2) si ottiene

$$V_0 \cos \omega t = Ri_0 \cos(\omega t + \theta) - \omega Li_0 \sin(\omega t + \theta) , \tag{11.34}$$

da cui, usando le formule di addizione, si ottiene

$$V_0 \cos \omega t = Ri_0 \cos \omega t \cos \theta - Ri_0 \sin \omega t \sin \theta - \omega Li_0 \sin \omega t \cos \theta - \omega Li_0 \cos \omega t \sin \theta . \tag{11.35}$$

Uguagliando i coefficienti

$$\begin{cases} V_0 = Ri_0 \cos \theta - \omega Li_0 \sin \theta \\ 0 = -Ri_0 \sin \theta - \omega Li_0 \cos \theta . \end{cases} \tag{11.36}$$

Dalla seconda si ottiene immediatamente, posto  $\omega_0 = \frac{R}{L}$ ,

$$\tan \theta = -\frac{\omega}{\omega_0} . \tag{11.37}$$

Quindi moltiplicando la prima per  $\cos \theta$  e la seconda per  $\sin \theta$  si ottiene

$$\begin{cases} V_0 \cos \theta = Ri_0 \cos^2 \theta - \omega Li_0 \sin \theta \cos \theta = 0 \\ 0 = -Ri_0 \sin^2 \theta - \omega Li_0 \cos \theta \sin \theta , \end{cases} \tag{11.38}$$

che sottratte danno

$$V_0 \cos \theta = Ri_0 \quad \longrightarrow \quad \cos \theta = \frac{Ri_0}{V_0} . \tag{11.39}$$

e quindi, usando ancora la stessa formula trigonometrica,

$$\frac{R^2 i_0^2}{V_0^2} = \frac{1}{1 + \frac{\omega^2}{\omega_0^2}} \quad \rightarrow \quad i_0^2 = \frac{V_0^2}{R^2} \frac{1}{1 + \frac{\omega^2}{\omega_0^2}} \quad \rightarrow \quad i_0 = \frac{V_0}{R} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}} . \quad (11.40)$$

E quindi la corrente che circola nel circuito è

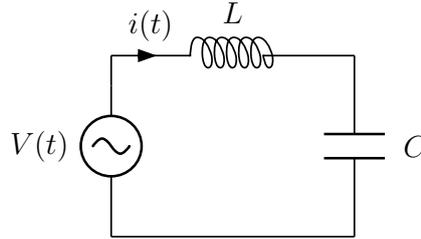
$$i(t) = \frac{V_0}{R} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}} \cos \left( \omega t - \arctan \frac{\omega}{\omega_0} \right) . \quad (11.41)$$

### 11.6 CIRCUITO LC IN SERIE.

Si consideri un circuito in cui, in serie al generatore siano presenti un conduttore di induttanza  $L$  e un condensatore di capacità  $C$ . Ponendo la tensione del generatore uguale alla somma della tensione ai capi dell'induttanza e del condensatore si ottiene l'equazione

$$V(t) = L \frac{di(t)}{dt} + \frac{q(t)}{C} , \quad (11.42)$$

ove  $q(t)$  è la carica che si trova sulle armature del condensatore all'istante  $t$ .



**Figura 11.7:** Il circuito LC in serie.

Derivando l'equazione (11.42) rispetto al tempo si ottiene

$$\frac{dV(t)}{dt} = L \frac{d^2 i(t)}{dt^2} + \frac{1}{C} \frac{dq(t)}{dt} = L \frac{d^2 i(t)}{dt^2} + \frac{1}{C} i(t) , \quad (11.43)$$

Sostituendo (11.1) e (11.2) si trova

$$-\omega V_0 \sin \omega t = -\omega^2 L i_0 \cos(\omega t + \theta) + \frac{1}{C} i_0 \cos(\omega t + \theta) , \quad (11.44)$$

da cui, usando le formule di addizione e dividendo per  $L$ , si ottiene

$$-\omega \frac{V_0}{L} \sin \omega t = -\omega^2 i_0 \cos \omega t \cos \theta + \omega^2 i_0 \sin \omega t \sin \theta + \frac{1}{LC} i_0 \cos \omega t \cos \theta - \frac{1}{LC} i_0 \sin \omega t \sin \theta ; \quad (11.45)$$

posto  $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$ , questa equazione può essere riscritta nella forma

$$-i_0(\omega^2 - \omega_0^2) \cos \omega t \cos \theta + i_0(\omega^2 - \omega_0^2) \sin \omega t \sin \theta + \frac{V_0}{L} \omega \sin \omega t = 0 . \quad (11.46)$$

Uguagliando, al solito, i coefficienti di  $\sin \omega t$  e di  $\cos \omega t$  si trova

$$\begin{cases} -i_0(\omega^2 - \omega_0^2) \cos \theta = 0 \\ i_0(\omega^2 - \omega_0^2) \sin \theta + \frac{V_0}{L} \omega = 0 . \end{cases} \quad (11.47)$$

Dalla prima si ottiene

$$\cos \theta = 0 \quad \longrightarrow \quad \sin \theta = \pm 1 \quad \longrightarrow \quad \theta = \pm \frac{\pi}{2}, \quad (11.48)$$

quindi, dalla seconda,

$$i_0 = \mp \frac{V_0}{L} \frac{\omega}{\omega^2 - \omega_0^2}. \quad (11.49)$$

Quindi la corrente che circola nel circuito è

$$i(t) = \mp \frac{V_0}{L} \frac{\omega}{\omega^2 - \omega_0^2} \cos \left( \omega t \pm \frac{\pi}{2} \right) = \frac{V_0}{L} \frac{\omega}{\omega^2 - \omega_0^2} \sin \omega t = \frac{V_0}{L \omega_0^2} \frac{\omega}{\frac{\omega^2}{\omega_0^2} - 1} \sin \omega t. \quad (11.50)$$

da cui

$$i(t) = CV_0 \frac{\omega}{\frac{\omega^2}{\omega_0^2} - 1} \sin \omega t = CV_0 \frac{\omega}{\frac{\omega^2}{\omega_0^2} - 1} \cos \left( \omega t - \frac{\pi}{2} \right). \quad (11.51)$$

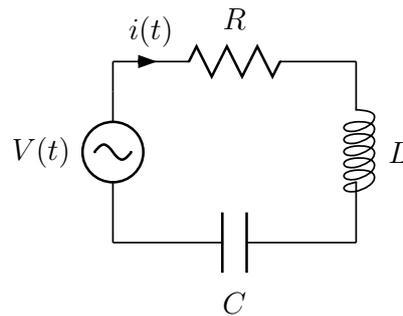
Si osservi che l'intensità della corrente elettrica che circola nel circuito  $LC$  oscilla con uno sfasamento di  $-\pi/2$  rispetto alla tensione fornita dal generatore. Inoltre alla condizione  $\omega = \omega_0$ , che viene detta di **risonanza**, la corrente diventa infinita. Questo evidentemente è un problema. Il fatto è che qui si sta considerando una situazione ideale in cui vengono trascurate tutte le resistenze dei conduttori in gioco che invece, per quanto piccole, non sono mai nulle. Per tener conto di queste resistenze si consideri l'esempio seguente.

## 11.7 CIRCUITO RLC IN SERIE.

Si consideri un circuito in cui, in serie al generatore siano presenti un conduttore di resistenza  $R$ , un'induttanza  $L$  e un condensatore di capacità  $C$ . Ponendo la tensione del generatore uguale alla somma della tensione ai capi dell'induttanza e del condensatore si ottiene l'equazione

$$V(t) = Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt} + \frac{q(t)}{C}, \quad (11.52)$$

ove  $q(t)$  è la carica che si trova sulle armature del condensatore all'istante  $t$ .



**Figura 11.8:** Il circuito  $RLC$  in serie.

Derivando l'equazione (11.52) rispetto al tempo si ottiene

$$\frac{dV(t)}{dt} = R \frac{di(t)}{dt} + L \frac{d^2i(t)}{dt^2} + \frac{1}{C} \frac{dq(t)}{dt} = R \frac{di(t)}{dt} + L \frac{d^2i(t)}{dt^2} + \frac{1}{C} i(t), \quad (11.53)$$

Sostituendo (11.1) e (11.2) si trova

$$-\omega V_0 \sin \omega t = -\omega R i_0 \sin(\omega t + \theta) - \omega^2 L i_0 \cos(\omega t + \theta) + \frac{1}{C} i_0 \cos(\omega t + \theta), \quad (11.54)$$

da cui, dividendo per  $L$  e definendo, come nell'esempio precedente,  $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$ ,

$$-\omega \frac{V_0}{L} \sin \omega t = -\omega \frac{R}{L} i_0 \sin(\omega t + \theta) - (\omega^2 - \omega_0^2) i_0 \cos(\omega t + \theta). \quad (11.55)$$

Usando le formule di addizione questa può essere riscritta nella forma

$$-\omega \frac{V_0}{L} \sin \omega t = -\omega \frac{R}{L} i_0 (\sin \omega t \cos \theta + \cos \omega t \sin \theta) - (\omega^2 - \omega_0^2) i_0 (\cos \omega t \cos \theta - \sin \omega t \sin \theta); \quad (11.56)$$

Uguagliando i coefficienti di  $\sin \omega t$  e di  $\cos \omega t$  si trova

$$\begin{cases} -\omega \frac{V_0}{L} = -\omega \frac{R}{L} i_0 \cos \theta + (\omega^2 - \omega_0^2) i_0 \sin \theta \\ 0 = -\omega \frac{R}{L} i_0 \sin \theta - (\omega^2 - \omega_0^2) i_0 \cos \theta. \end{cases} \quad (11.57)$$

Dalla seconda si ottiene

$$\tan \theta = \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{\omega \frac{R}{L}}. \quad (11.58)$$

Conviene definire il **fattore di qualità**  $Q$ :

$$Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{L}{R} \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{L}{R} \omega_0, \quad (11.59)$$

quindi

$$\tan \theta = \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{\omega \frac{R}{L}} = Q \left( \frac{\omega_0}{\omega} - \frac{\omega}{\omega_0} \right). \quad (11.60)$$

Tornando alla (11.57), moltiplicando la prima per  $\cos \theta$  e la seconda per  $\sin \theta$ , si ottiene

$$\begin{cases} -\omega \frac{V_0}{L} \cos \theta = -\omega \frac{R}{L} i_0 \cos^2 \theta + (\omega^2 - \omega_0^2) i_0 \sin \theta \cos \theta \\ 0 = -\omega \frac{R}{L} i_0 \sin^2 \theta - (\omega^2 - \omega_0^2) i_0 \cos \theta \sin \theta; \end{cases} \quad (11.61)$$

sommando le due equazioni così ottenute si trova

$$-\omega \frac{V_0}{L} \cos \theta = -\omega \frac{R}{L} i_0 \quad \longrightarrow \quad \cos \theta = \frac{R i_0}{V_0}. \quad (11.62)$$

Utilizzando ancora la formula trigonometrica vista sopra si scrive

$$\frac{R^2 i_0^2}{V_0^2} = \frac{1}{1 + Q^2 \left( \frac{\omega_0}{\omega} - \frac{\omega}{\omega_0} \right)^2} \quad \longrightarrow \quad i_0^2 = \frac{V_0^2}{R^2} \frac{1}{1 + Q^2 \left( \frac{\omega_0}{\omega} - \frac{\omega}{\omega_0} \right)^2} \quad (11.63)$$

e quindi

$$i_0 = \frac{V_0}{R} \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2 \left( \frac{\omega_0}{\omega} - \frac{\omega}{\omega_0} \right)^2}}. \quad (11.64)$$

La corrente che circola nel circuito è

$$i(t) = \frac{V_0}{R} \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2 \left( \frac{\omega_0}{\omega} - \frac{\omega}{\omega_0} \right)^2}} \cos \left[ \omega t + \arctan Q \left( \frac{\omega_0}{\omega} - \frac{\omega}{\omega_0} \right) \right]. \quad (11.65)$$

Alla condizione di risonanza,  $\omega = \omega_0$ , vale

$$i(t) = \frac{V_0}{R} \cos \omega t, \quad (11.66)$$

che, in accordo con quanto ottenuto studiando il circuito  $LC$ , diverge per  $R \rightarrow 0$ . È utile calcolare le tensioni ai capi dei tre dispositivi:

$$V_R(t) = Ri(t) = V_0 \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2 \left( \frac{\omega_0}{\omega} - \frac{\omega}{\omega_0} \right)^2}} \cos \left[ \omega t + \arctan Q \left( \frac{\omega_0}{\omega} - \frac{\omega}{\omega_0} \right) \right]. \quad (11.67)$$

In condizioni di risonanza la tensione ai capi di  $R$  coincide in ogni istante con quella fornita dal generatore, vale cioè  $V_R(t) = V(t)$ . Questo è il valore massimo di  $V_R$  al variare di  $\omega$  si osservi infatti che la quantità al denominatore è maggiore o uguale a uno. Valgono inoltre le condizioni limite:

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} V_R(t) = \lim_{\omega \rightarrow \infty} V_R(t) = 0, \quad (11.68)$$

Quindi la tensione ai capi di  $R$  ha un valore massimo in condizioni di risonanza e sia annulla allontanandosi da tale valore: si dice allora che il circuito si comporta come un **filtro passa banda**. Per quel riguarda le altre tensioni si trova quanto segue

$$\begin{aligned} V_L(t) &= L \frac{di}{dt} = -V_0 \frac{L}{R} \frac{\omega}{\sqrt{1 + Q^2 \left( \frac{\omega_0}{\omega} - \frac{\omega}{\omega_0} \right)^2}} \sin \left[ \omega t + \arctan Q \left( \frac{\omega_0}{\omega} - \frac{\omega}{\omega_0} \right) \right] = \\ &= \frac{\omega}{\omega_0} \frac{QV_0}{\sqrt{1 + Q^2 \left( \frac{\omega_0}{\omega} - \frac{\omega}{\omega_0} \right)^2}} \cos \left[ \omega t + \arctan Q \left( \frac{\omega_0}{\omega} - \frac{\omega}{\omega_0} \right) + \frac{\pi}{2} \right]. \end{aligned} \quad (11.69)$$

$$\begin{aligned} V_C(t) &= \frac{q(t)}{C} = \frac{V_0}{RC} \frac{1}{\omega \sqrt{1 + Q^2 \left( \frac{\omega_0}{\omega} - \frac{\omega}{\omega_0} \right)^2}} \sin \left[ \omega t + \arctan Q \left( \frac{\omega_0}{\omega} - \frac{\omega}{\omega_0} \right) \right] = \\ &= \frac{\omega_0}{\omega} \frac{QV_0}{\sqrt{1 + Q^2 \left( \frac{\omega_0}{\omega} - \frac{\omega}{\omega_0} \right)^2}} \cos \left[ \omega t + \arctan Q \left( \frac{\omega_0}{\omega} - \frac{\omega}{\omega_0} \right) - \frac{\pi}{2} \right]. \end{aligned} \quad (11.70)$$

Si noti che in condizioni di risonanza,  $\omega = \omega_0$ ,  $V_L$  e  $V_C$  hanno la stessa ampiezza  $QV_0$  ma hanno una differenza di fase di  $\pi$ .

## 11.8 LA POTENZA IN CORRENTE ALTERNATA.

Come si è visto negli esempi precedenti, in generale la tensione e la corrente sono fra loro sfasate, valendo le (11.1) e (11.2). La potenza elettrica fornita dal generatore all'istante  $t$  quindi è

$$P(t) = V(t)i(t) = V_0 i_0 \cos \omega t \cos(\omega t + \theta) = V_0 i_0 \cos \omega t (\cos \omega t \cos \theta - \sin \omega t \sin \theta). \quad (11.71)$$

Da qui è possibile calcolare il lavoro compiuto dal generatore in un periodo  $T$ . Facendo esplicitamente il calcolo si trova che il secondo addendo dà un contributo in media nullo. Mentre il primo dà

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} T V_0 i_0 \cos \theta. \quad (11.72)$$

Per vederlo si calcoli il lavoro compiuto nel periodo  $T = 2\pi/\omega$ . Poiché la potenza è una funzione del tempo, il lavoro è dato da un integrale:

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \int_0^T P(t)dt = V_0 i_0 \cos \theta \int_0^T \cos^2 \omega t dt - V_0 i_0 \sin \theta \int_0^T \cos \omega t \sin \omega t dt = \\ &= V_0 i_0 \cos \theta \frac{1}{2} \int_0^T (1 + \cos 2\omega t) dt - V_0 i_0 \sin \theta \frac{1}{\omega} \int_0^T \sin \omega t d(\sin \omega t) = \\ &= V_0 i_0 \cos \theta \frac{1}{2} \left[ t + \frac{1}{2\omega} \sin 2\omega t \right]_0^T - V_0 i_0 \sin \theta \frac{1}{2\omega} \left[ \sin^2 \omega t \right]_0^T = \frac{1}{2} T V_0 i_0 \cos \theta .\end{aligned}\quad (11.73)$$

La potenza media è quindi

$$\langle P \rangle = \frac{1}{T} \mathcal{L} = \frac{1}{2} V_0 i_0 \cos \theta . \quad (11.74)$$

Questa equazione è nota con il nome di **legge di Galileo Ferraris**;<sup>1</sup>  $\cos \theta$  è detto **fattore di potenza**.  $\langle P \rangle$  è detta anche **potenza reale** ed è la potenza effettivamente dissipata nel circuito. Il termine

$$-V_0 i_0 \sin \theta \sin \omega t \cos \omega t = -\frac{1}{2} V_0 i_0 \sin \theta \sin 2\omega t \quad (11.75)$$

ha valor medio nullo in un periodo e ha valore massimo

$$\mathcal{Q} = \frac{1}{2} V_0 i_0 \sin \theta \quad (11.76)$$

e viene detto **potenza reattiva**. Questa non viene dissipata sulla resistenza, ma alternativamente ceduta e assorbita dal generatore e dai componenti non dissipanti del circuito: viene cioè immagazzinata come energia elettrostatica in un condensatore o come energia magnetica in un'induttanza.

Per vedere come ciò accada in un esempio concreto, si consideri il circuito  $LC$  in serie e si calcoli il lavoro dovuto al termine reattivo compiuto dall'istante iniziale  $t_0$  al generico istante  $t$  [si ricordi che  $\theta = \pi/2$  e quindi  $\sin \theta = 1$  e che  $V_0 = L \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{\omega} i_0 = (\omega L - \frac{1}{\omega C}) i_0$ ]:

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= -\frac{1}{2} V_0 i_0 \sin \theta \int_{t_0}^t \sin 2\omega t = \frac{1}{4\omega} V_0 i_0 \sin \theta [\cos 2\omega t]_{t_0}^t = \\ &= \frac{V_0 i_0}{4\omega} [2 \cos^2 \omega t - 1]_{t_0}^t = \frac{V_0 i_0}{2\omega} [\cos^2 \omega t]_{t_0}^t = \\ &= \frac{1}{2\omega} \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right) i_0^2 [\cos^2 \omega t]_{t_0}^t = \frac{1}{2} L i_0^2 [\cos^2 \omega t]_{t_0}^t - \frac{1}{2} \frac{1}{\omega^2 C} i_0^2 [1 - \sin^2 \omega t]_{t_0}^t = \\ &= \frac{1}{2} L i_0^2 [\cos^2 \omega t]_{t_0}^t + \frac{1}{2} \frac{1}{\omega^2 C} i_0^2 [\sin^2 \omega t]_{t_0}^t ,\end{aligned}\quad (11.77)$$

Il primo termine è la variazione dell'energia magnetica accumulata nell'induttanza  $L$  percorsa dalla corrente  $i(t) = i_0 \cos \omega t$ ; per quanto riguarda il secondo termine, si osservi che, se nel circuito scorre la corrente  $i(t)$ , ai capi di  $C$  si ha la variazione della carica  $q(t) = \frac{i_0}{\omega} \sin \omega t$  e quindi il secondo termine è la variazione dell'energia elettrostatica accumulata in  $C$ . Osservando che ai capi di  $C$  vi è la tensione  $V(t) = \frac{q(t)}{C} = -\frac{1}{\omega C} i_0 \sin \omega t$ , si può scrivere in definitiva

$$\mathcal{L} = \left[ \frac{1}{2} L i^2(t) + \frac{1}{2} C V^2(t) \right]_{t_0}^t . \quad (11.78)$$

Si osservi inoltre che i due termini, elettrostatico e magnetico, oscillano sfasati di  $\pi/2$  cioè quando uno è massimo l'altro è nullo e viceversa.

Se  $L$  e  $C$  sono tali che valga  $\frac{1}{LC} = \omega^2$ , cioè in condizioni di risonanza, allora vale

$$\frac{1}{2} \frac{1}{\omega^2 C} i_0^2 [\sin^2 \omega t]_{t_0}^t = \frac{1}{2} L i_0^2 [\sin^2 \omega t]_{t_0}^t \quad (11.79)$$

<sup>1</sup> Galileo Ferraris (1847-1897), fisico italiano.

e quindi

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} Li_0^2 [\cos^2 \omega t]_{t_0}^t + \frac{1}{2} Li_0^2 [\sin^2 \omega t]_{t_0}^t = \frac{1}{2} Li_0^2, \quad (11.80)$$

che è costante.

Si osservi, in particolare, che nel caso del circuito *RLC* la quantità  $Q$ , detta **fattore di qualità**, rappresenta il rapporto fra la potenza massima immagazzinata nell'induttanza e nel condensatore e la potenza massima dissipata nella resistenza in condizioni di risonanza. Infatti vale

$$\frac{P_L}{P_R} = \frac{V_L i}{V_R i} = \frac{QV_0}{V_0} = Q \quad , \quad \frac{P_C}{P_R} = \frac{V_C i}{V_R i} = \frac{QV_0}{V_0} = Q. \quad (11.81)$$

## 11.9 METODO COMPLESSO.

Tutto quanto visto finora può essere notevolmente semplificato nelle notazioni e nei calcoli introducendo una notazione complessa. L'idea è di associare ad ogni grandezza fisica variabile nel tempo secondo una legge sinusoidale una quantità complessa in notazione esponenziale di cui la grandezza fisica in questione costituisce la parte reale. Quindi alla grandezza

$$g(t) = g_0 \cos(\omega t + \theta) \quad (11.82)$$

si associa la quantità complessa, denotata per motivi che saranno chiari fra poco, con il simbolo di vettore

$$\mathbf{g}(t) = g_0 e^{i(\omega t + \theta)}. \quad (11.83)$$

Si può dimostrare, e qui viene lasciato al corso di matematica, che  $\forall \alpha \in \mathbf{R}$  vale la relazione

$$e^{i\alpha} = \cos \alpha + i \sin \alpha, \quad (11.84)$$

e quindi

$$\mathbf{g}(t) = g_0 e^{i(\omega t + \theta)} = g_0 [\cos(\omega t + \theta) + i \sin(\omega t + \theta)] \quad (11.85)$$

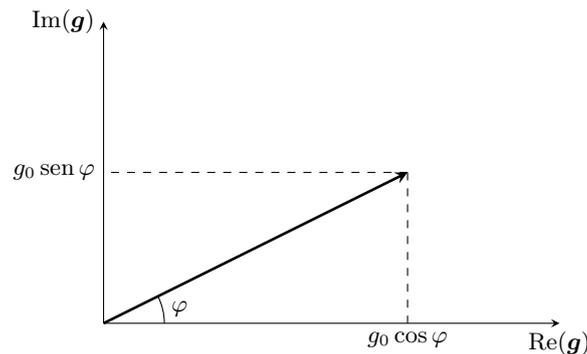
ed, evidentemente,

$$\text{Re}\{\mathbf{g}(t)\} = g_0 \cos(\omega t + \theta). \quad (11.86)$$

Si osservi che  $\mathbf{g}(t)$  può essere pensato come un vettore di componenti

$$\mathbf{g}(t) = (g_x(t), g_y(t)) = (g_0 \cos(\omega t + \theta), g_0 \sin(\omega t + \theta)) \quad (11.87)$$

rotante nel piano complesso con velocità angolare  $\omega$ . In figura, per semplicità, ho indicato  $\varphi = \omega t + \theta$ .



**Figura 11.9:** La rappresentazione di una funzione sinusoidale come vettore rotante nel piano complesso.

Qualcosa di perfettamente analogo è stato introdotto nello studio delle onde. Si userà anche la notazione

$$\mathbf{g}(t) = g_0 e^{i\theta} e^{i\omega t} = \mathbf{g}_0 e^{i\omega t}, \quad (11.88)$$

ove si è introdotta l'ampiezza complessa

$$\mathbf{g}_0 = g_0 e^{i\theta}, \quad (11.89)$$

che contiene l'informazione sulla fase. Questa notazione complessa consente di associare alla tensione e alla corrente nei circuiti studiati sopra le quantità complesse

$$\mathbf{V}(t) = V_0 e^{i\omega t} \quad , \quad \mathbf{i}(t) = i_0 e^{i\theta} e^{i\omega t} = \mathbf{i}_0 e^{i\omega t} . \quad (11.90)$$

In questo modo per i circuiti resistivo, capacitivo ed induttivo valgono le equazioni

$$\begin{aligned} V_0 e^{i\omega t} = R i_0 e^{i\theta} e^{i\omega t} &\longrightarrow V_0 = R i_0 e^{i\theta} &\longrightarrow i_0 = \frac{V_0}{R} &, \quad \theta = 0 \\ i\omega V_0 e^{i\omega t} = \frac{1}{C} i_0 e^{i\theta} e^{i\omega t} &\longrightarrow i\omega C V_0 = i_0 e^{i\theta} &\longrightarrow i_0 = \omega C V_0 &, \quad \theta = \frac{\pi}{2} \\ V_0 e^{i\omega t} = i\omega L i_0 e^{i\theta} e^{i\omega t} &\longrightarrow \frac{V_0}{i\omega L} = i_0 e^{i\theta} &\longrightarrow i_0 = \frac{V_0}{\omega L} &, \quad \theta = -\frac{\pi}{2} \end{aligned} \quad (11.91)$$

che sono proprio i risultati trovati precedentemente. Quanto trovato finora consente di introdurre una quantità complessa  $Z$ , detta **impedenza**, che dipende dall'elemento di circuito considerato, ed in termini della quale vale la seguente *legge di Ohm generalizzata*

$$\mathbf{V} = Z \mathbf{i} . \quad (11.92)$$

Quindi si definisce:

$$Z_R = R \quad , \quad Z_C = \frac{1}{i\omega C} \quad , \quad Z_L = i\omega L . \quad (11.93)$$

In generale, se ci sono più elementi circuitali, l'impedenza ha una parte reale, la resistenza, ed una parte immaginaria, detta **reattanza**; si può quindi scrivere nella forma

$$Z = R + iX = Z_0 e^{i\varphi} \quad \text{con} \quad Z_0 = \sqrt{R^2 + X^2} \quad , \quad \varphi = \arctan \frac{X}{R} . \quad (11.94)$$

Si noti che per  $\omega \rightarrow 0$  cioè in caso di tensione continua, l'induttanza si comporta come un corto circuito e la capacità come un circuito aperto; i ruoli si scambiano per  $\omega \rightarrow \infty$ .

Insieme alla prima legge di Ohm, per l'impedenza si generalizzano le leggi della serie e del parallelo di più resistenze. A titolo di esempio si consideri il circuito  $RC$  in serie. L'impedenza totale vale

$$Z = Z_R + Z_C = R + \frac{1}{i\omega C} \quad (11.95)$$

e quindi

$$X = -\frac{1}{\omega C} \quad , \quad Z_0 = \sqrt{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}} = R \sqrt{1 + \frac{1}{\omega^2 R^2 C^2}} \quad , \quad \varphi = -\arctan \frac{1}{\omega RC} . \quad (11.96)$$

Quindi, posto  $\omega_0 = \frac{1}{RC}$ , la legge di Ohm generalizzata (11.92) porge

$$V_0 e^{i\omega t} = Z_0 e^{i\varphi} \mathbf{i}_0 e^{i\omega t} = R \sqrt{1 + \frac{\omega_0^2}{\omega^2}} \mathbf{i}_0 e^{-i \arctan \omega_0/\omega} e^{i\omega t} \quad (11.97)$$

e quindi

$$\mathbf{i}_0 = \frac{V_0}{R \sqrt{1 + \frac{\omega_0^2}{\omega^2}}} e^{i \arctan \omega_0/\omega} \quad (11.98)$$

da cui, prendendo la parte reale, si trova

$$i(t) = \text{Re}(\mathbf{i}_0 e^{i\omega t}) = \frac{V_0}{R \sqrt{1 + \frac{\omega_0^2}{\omega^2}}} \cos\left(\omega t + \arctan \frac{\omega_0}{\omega}\right) , \quad (11.99)$$

che è identico al risultato trovato precedentemente.

# 12

## CAMPI MAGNETICI NELLA MATERIA.

---

In questo capitolo viene affrontato il problema della interpretazione, alla luce di quanto visto finora, delle proprietà dei magneti e degli altri fenomeni magnetici nella materia. Si è già visto che un magnete si comporta come un dipolo i cui poli sono inseparabili; si è anche visto che una spira percorsa da corrente ed immersa in un campo magnetico esterno si comporta come un dipolo. L'analogia fra questi due fatti è stata portata alla dignità di postulato da Ampère.

***Postulato di equivalenza di Ampère.** Una spira piana di area  $dS$  piccola rispetto alle dimensioni in gioco percorsa dalla corrente elettrica di intensità  $i$  equivale, sia per il campo magnetico prodotto che per le forze magnetiche cui è sottoposta, ad un dipolo magnetico di momento  $\mathbf{m}$  avente modulo  $m = i dS$ , direzione perpendicolare alla spira e verso orientato in modo che vista da  $\mathbf{m}$  la corrente scorra in senso antiorario.*

Questo postulato è alla base del modello che fornisce una base interpretativa per i fenomeni magnetici non più nel vuoto, come fatto finora, ma all'interno della materia. In effetti Ampère per primo sostenne che tutti fenomeni magnetici potessero essere spiegati in termini di correnti elettriche. E se è facile verificare l'interazione, discussa nei capitoli precedenti, fra una corrente elettrica ed un campo magnetico, meno evidente è la spiegazione in termini di correnti elettriche del comportamento magnetico di oggetti, quali i magneti, o le calamite, che *non* sono percorse da una corrente elettrica. Ampère formulò quindi l'ipotesi delle *correnti molecolari*. Egli suppose che ogni molecola costituente il magnete fosse dotata di un microscopico circuito elettrico e quindi, per il postulato di equivalenza, che ogni molecola del magnete fosse assimilabile ad un dipolo magnetico elementare e quindi fosse portatrice di un momento magnetico microscopico. Questa ipotesi, all'inizio del XIX secolo era tutt'altro che accettabile senza discussioni, non essendola nemmeno la stessa teoria atomica. Ma il successo dell'idea che la materia sia costituita di atomi costituiti a loro volta da un nucleo positivo intorno a cui ruotano delle cariche negative, diede nuova vitalità all'ipotesi delle correnti molecolari che, dal nome del loro propugnatore, vengono ora chiamate **correnti amperiane**.

### 12.1 DIAMAGNETI E PARAMAGNETI.

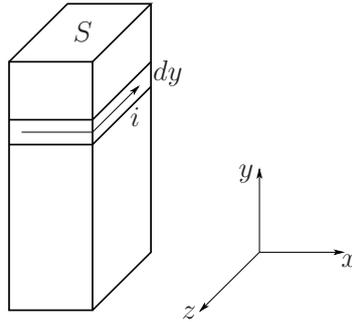
A questo punto è conveniente dividere le sostanze in due categorie: quelle che hanno e quelle che non hanno un momento magnetico atomico. Per fissare le idee si pensi a sostanze, quali i gas nobili e gli ioni di metalli monovalenti come  $Li$ ,  $Na$ ,  $Cu$ , che hanno i gusci elettronici pieni e quindi, presentando simmetria sferica, non hanno alcun momento magnetico. Altre sostanze hanno orbitali più complessi e si trovano ad avere un momento magnetico atomico dovuto al moto degli elettroni attorno al nucleo. Le sostanze del primo tipo vengono dette **diamagneti**, quelle del secondo tipo **paramagneti**. Di seguito vengono analizzate le proprietà ed il comportamento di questi due tipi di sostanze se si trovano in una regione dello spazio fisico in cui sia presente un campo magnetico.

**A.** Se la sostanza non ha un momento magnetico atomico proprio, in presenza del campo esterno, per la legge di Faraday-Neumann-Lenz, si genera in ogni atomo una corrente microscopica, amperiana,  $i_A$  il cui momento magnetico microscopico ha verso opposto al campo magnetico esterno inducente.

**B.** Se la sostanza ha un momento magnetico atomico proprio, ciascun atomo va pensato come una spira percorsa da una corrente amperiana  $i_A$  avente momento dipolare pari al momento magnetico atomico in parola. Quindi, come visto nella sezione 4.4, il campo magnetico esterno tende a ruotare tutti i momenti atomici nella propria direzione e nel verso a sé concorde.

In entrambi i casi, la sostanza in questione si trova ad avere moltissimi momenti magnetici orientati

tutti (in media, a causa dell'agitazione termica) nella stessa direzione del campo magnetico esterno  $\mathbf{B}$ , ed il verso è discorde a quello di  $\mathbf{B}$  se la sostanza è diamagnetica e concorde a quello di  $\mathbf{B}$  se la sostanza è paramagnetica. La somma di questo gran numero di momenti magnetici microscopici dà origine ad un effetto macroscopico: la sostanza quindi si trova ad avere un momento magnetico macroscopico indotto dalla presenza del campo magnetico esterno. È pertanto possibile definire il vettore momento magnetico per unità di volume detto **magnetizzazione** e denotato con  $\mathcal{M}$ . È possibile stabilire una relazione fra il vettore magnetizzazione e l'intensità della corrente amperiana. Si cominci col considerare un parallelepipedo avente area di base  $S$  e costituito di materiale magnetizzato in modo uniforme con il vettore  $\mathcal{M}$  diretto nella direzione  $y$ .



**Figura 12.1:** Il parallelepipedo magnetizzato.

Se ne consideri una fettina di altezza  $dy$ . Per il principio di equivalenza di Ampère, ai fini della descrizione del comportamento magnetico, la fettina di materiale magnetizzato con momento magnetico  $\mathcal{M} S dy$  può essere considerata una spira con la corrente  $i$  che scorre sulla superficie laterale della fettina e tale che valga la relazione

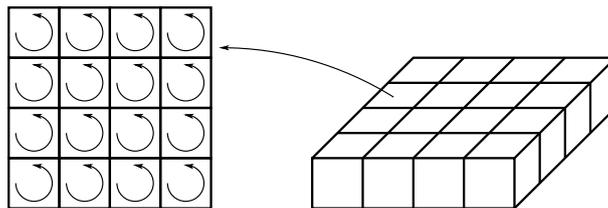
$$\mathcal{M} S dy = i S \quad \longrightarrow \quad i = \mathcal{M} dy . \tag{12.1}$$

Se la magnetizzazione del materiale non è uniforme, la relazione precedente non è valida. Vale invece la

$$\Gamma_\gamma(\mathcal{M}) = i_A , \tag{12.2}$$

ove  $\gamma$  è una qualsiasi curva chiusa e  $i_A$  è la corrente amperiana che scorre all'interno del materiale magnetizzato.

Per dimostrare l'equazione (12.2), si consideri la fettina vista sopra e la si suddivida in tanti parallelepipedi sufficientemente piccoli da far sí che in ognuno la magnetizzazione sia uniforme



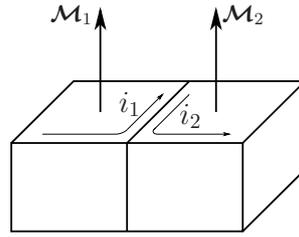
**Figura 12.2:** La suddivisione della fettina nel caso di magnetizzazione non uniforme.

Per capire meglio ciò che accade si considerino due di questi parallelepipedini adiacenti; e siano  $\mathcal{M}_1$  e  $\mathcal{M}_2$  le loro magnetizzazioni. Poiché all'interno del singolo parallelepipedo la magnetizzazione è uniforme, posso applicare l'equazione (12.1) e concludere che nei due parallelepipedini scorrono correnti diverse, e quindi fra di loro scorre una corrente amperiana non nulla data da

$$i_A = i_1 - i_2 . \tag{12.3}$$

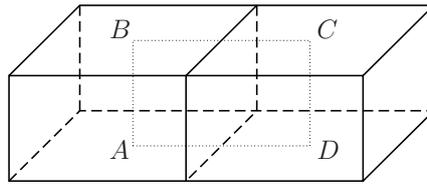
Si consideri quindi il calcolo della circuitazione di  $\mathcal{M}$  lungo la curva  $\gamma$  che unisce i centri  $A, B, C$  e  $D$  delle facce di base dei due parallelepipedini elementari adiacenti. Osservando che i tratti  $BC$  e  $DA$  sono ortogonali al vettore  $\mathcal{M}$  e quindi non contribuiscono alla circuitazione rimane

$$\Gamma_\gamma(\mathcal{M}) = \mathbf{AB} \cdot \mathcal{M}_1 + \mathbf{CD} \cdot \mathcal{M}_2 = (\mathcal{M}_1 - \mathcal{M}_2) dy = i_1 - i_2 = i_A , \tag{12.4}$$



**Figura 12.3:** I due piccoli parallelepipedi adiacenti.

come si doveva dimostrare.



**Figura 12.4:** La curva  $\gamma$ .

**Osservazioni**

1. Si può dimostrare in generale che la relazione (12.2) è vera comunque si scelga la curva  $\gamma$ , purché chiusa.
2. Se la magnetizzazione è uniforme la corrente scorre solo sulla superficie esterna del parallelepipedo e la circuitazione di  $\mathcal{M}$  è nulla per qualsiasi scelta di  $\gamma$ .
3. Non sarà forse inutile sottolineare che la corrente  $i$  che scorre sulla superficie del parallelepipedo e le correnti amperiane che circolano all'interno del parallelepipedo in caso di magnetizzazione variabile sono puri oggetti matematici che non hanno alcun riscontro sperimentale.

Il campo magnetico totale  $\mathbf{B}$  presente all'interno del materiale è la somma del contributo delle correnti macroscopiche di conduzione di intensità  $i_C$  che generano il campo magnetico esterno e del campo prodotto dalle correnti amperiane. Per tale campo magnetico totale vale la legge di Ampère nella forma

$$\Gamma_\gamma(\mathbf{B}) = \mu_0(i_A + i_C) = \mu_0 \left[ \Gamma_\gamma(\mathcal{M}) + i_C \right], \tag{12.5}$$

da cui si ottiene

$$\Gamma_\gamma \left( \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} \right) = \Gamma_\gamma(\mathcal{M}) + i_C \quad \longrightarrow \quad \Gamma_\gamma \left( \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} - \mathcal{M} \right) = i_C. \tag{12.6}$$

Il vettore, di cui si calcola la circuitazione e che dipende solo dalle correnti di conduzione, viene denotato con  $\mathbf{H}$ , e detto **vettore di magnetizzazione** <sup>1</sup> si può quindi riscrivere l'equazione precedente nella forma

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} - \mathcal{M}, \tag{12.7}$$

da cui

$$\Gamma_\gamma(\mathbf{H}) = i_C. \tag{12.8}$$

In altre parole, l'introduzione del nuovo vettore  $\mathbf{H}$  consente di scrivere il campo magnetico  $\mathbf{B}$  nella forma

$$\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathcal{M}) \tag{12.9}$$

<sup>1</sup> Non tutti gli autori sono concordi con questo nome: alcuni chiamano  $\mathbf{H}$  campo magnetico e  $\mathbf{B}$  induzione magnetica.

in cui si vedono esplicitati chiaramente i contributi delle correnti macroscopiche di conduzione e di quelle microscopiche amperiane.

Si osservi ora che maggiore è la corrente di conduzione, e conseguentemente il campo  $\mathbf{H}$ , maggiore è la magnetizzazione; sperimentalmente si osserva che vale una relazione di proporzionalità:

$$\mathcal{M} = \chi_m \mathbf{H} . \quad (12.10)$$

La costante di proporzionalità  $\chi_m$  è detta **suscettività magnetica** della sostanza in questione. Per le sostanze diamagnetiche la magnetizzazione è opposta al campo  $\mathbf{H}$  e quindi la suscettività magnetica è negativa. Viceversa per le sostanze paramagnetiche la magnetizzazione è concorde ad  $\mathbf{H}$  e quindi  $\chi_m > 0$ . Per entrambi i tipi di sostanza quindi si può scrivere

$$\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \chi_m \mathbf{H}) = \mu_0(1 + \chi_m)\mathbf{H} = \mu_0 \kappa \mathbf{H} = \mu \mathbf{H} . \quad (12.11)$$

La costante  $\kappa = 1 + \chi_m$  è detta **permeabilità magnetica relativa** ed è maggiore o minore di 1 a seconda che la sostanza sia paramagnetica o diamagnetica. Il prodotto della permeabilità magnetica relativa per la permeabilità magnetica del vuoto è detta **permeabilità magnetica assoluta**  $\mu$  della sostanza in questione. In altre parole,  $\kappa$  è relativa al vuoto, nel senso che è un numero puro e vale 1 nel vuoto; vale cioè

$$\kappa = \frac{\mu}{\mu_0} . \quad (12.12)$$

## 12.2 FERROMAGNETI.

Fra le sostanze con suscettività magnetica positiva ne esistono alcune, poche, come *Fe*, *Co*, *Ni*, alcuni acciai e alcune leghe, per le quali la relazione fra  $\mathbf{B}$  e  $\mathbf{H}$  non è di proporzionalità ma ben più complicata. Per analizzare quel che accade si consideri un cilindro di ferro e lo si introduca in un solenoide collegato ad un generatore di corrente variabile in modo che si possa far circolare una corrente variabile ed eventualmente invertirla.

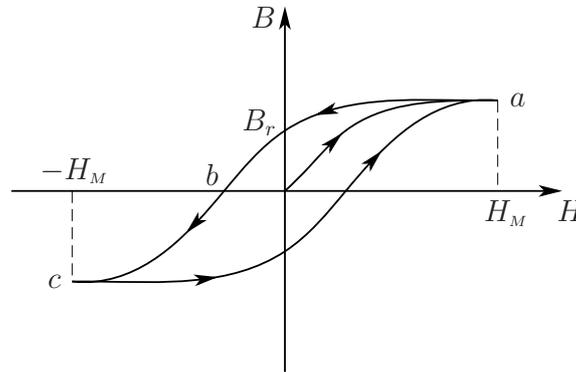


Figura 12.5: Il ciclo d'isteresi.

Facendo crescere la corrente macroscopica di intensità  $i_C$  cresce il campo  $\mathbf{H}$ . Il cilindro di ferro si magnetizza progressivamente ed il campo magnetico  $\mathbf{B}$  interno ad esso cresce conseguentemente secondo la curva in figura, detto **ciclo di isteresi magnetica**. Al punto indicato con *a* praticamente tutti i momenti magnetici atomici sono orientati secondo il campo esterno, la magnetizzazione del cilindro di ferro è la massima possibile e quindi all'aumentare di  $i_C$ , e quindi di  $H$ , il valore di  $B$  non varia più e la curva diventa quasi orizzontale, anche se in realtà continua ad avere una piccola pendenza. Questa situazione si dice di **saturazione**. A questo punto diminuendo la corrente, e quindi  $H$ , il campo  $B$  non diminuisce ripassando per i punti della curva attraversati in precedenza, ma per gli stessi valori di  $H$  il campo  $B$  è maggiore. In questo modo, quando il campo esterno è nullo nel cilindro di ferro è ancora presente un campo residuo  $B_r$ . Il

cilindro di ferro è diventato un **magnete permanente**: può essere estratto dal solenoide, ormai ininfluenza in quanto non più attraversato da corrente, presentando un proprio campo magnetico. Se il cilindro viene lasciato nel solenoide ed in questo viene fatta scorrere una corrente di verso opposto il campo  $B$  diminuisce fino ad annullarsi nel punto  $b$  della figura. A questo punto il cilindro è completamente smagnetizzato. Continuando ad aumentare l'intensità della corrente nel verso opposto il cilindro si magnetizza nella direzione opposta alla precedente riproducendo una curva simile fino a giungere a saturazione nel punto  $c$ . Invertendo ancora il verso della corrente si può chiudere il ciclo giungendo nuovamente in  $a$ . È stato così completato il ciclo di isteresi magnetica. Le sostanze che hanno questo comportamento sono dette **ferromagneti** e sono caratterizzate dal fatto che un piccolo campo esterno  $H$  riesce a produrre una grande magnetizzazione.

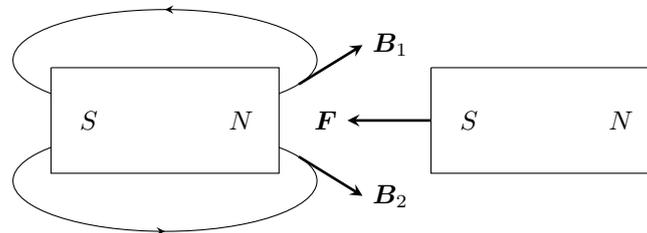
Tutta la fenomenologia sopra descritta avviene al di sotto di una certa temperatura critica, detta **temperatura di Curie**,<sup>2</sup> al di sopra della quale l'agitazione termica ha la meglio sulla capacità della sostanza ferromagnetica di mantenere allineati i suoi momenti magnetici atomici; quindi per temperature maggiori della temperatura di Curie il magnete permanente si smagnetizza.

### Osservazioni

1. La spiegazione microscopica del ferromagnetismo richiede lo sviluppo della teoria quantistica ed è quindi ben al di sopra delle pretese di queste note che, quindi, si limitano a descrivere la fenomenologia senz'altro.

## 12.3 FORZE FRA MAGNETI.

Una volta in possesso di un modello microscopico che descrive i magneti in termini di correnti amperiane e momenti magnetici atomici, è possibile usarlo per spiegare in che modo i magneti interagiscono fra loro e rendere conto della fenomenologia ben nota: due magneti si attirano se vengono accostati i poli opposti e si respingono se vengono accostati i poli simili.

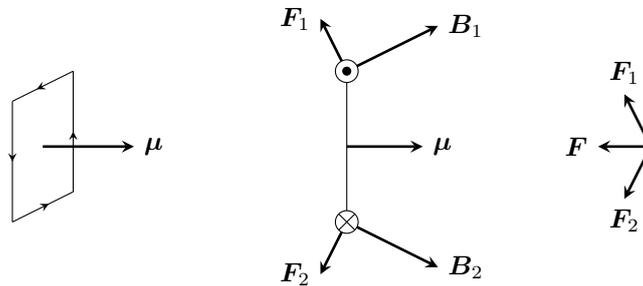


**Figura 12.6:** Il magnete a forma di parallelepipedo.

Per capire che cosa accade si cominci coll'osservare che un magnete, per esempio di forma di parallelepipedo, non produce un campo magnetico uniforme ma del tipo rappresentato in figura 12.6 (dove, per chiarezza grafica, non sono rappresentate le linee del campo magnetico interne al materiale). Un secondo magnete il cui polo  $S$  venga accostato al polo  $N$  del primo magnete, si trova quindi immerso in un campo magnetico non uniforme. Questo secondo magnete, alla luce del modello atomico analizzato sopra, è costituito da moltissime spire atomiche percorse da correnti amperiane. Queste sentono l'azione del campo magnetico generato dal primo magnete. Se questo campo fosse uniforme, si ricadrebbe nell'esempio, visto sopra, in cui le forze agenti hanno risultante nulla ma un momento torcente diverso da zero che fa allineare il momento magnetico della spira al campo magnetico. In questo caso, invece, il campo non è uniforme e le forze agenti, oltre ad avere ancora un momento torcente, non hanno più risultante nulla; quindi ciascuna delle spire atomiche di cui è costituito il secondo magnete si sposta. Per analizzare più quantitativamente cosa accade, si consideri una delle spire microscopiche di cui è costituito il secondo magnete la si collochi in una regione di spazio ove si trovino campi divergenti come i campi  $B_1$  e  $B_2$  rappresentati in figura 12.6. Si supponga che la spira sia percorsa da una corrente

<sup>2</sup> Marie Curie (1867-1934), fisica francese.

avente lo stesso verso delle correnti amperiane che hanno generato il campo del primo magnete: con riferimento alla figura, il momento magnetico  $\mu$  della spira è quindi diretto verso destra.



**Figura 12.7:** Forza su una spira in un campo magnetico non uniforme.

In figura 12.7 è mostrata la spira percorsa dalla corrente amperiana e, per chiarezza, il vettore  $\mu$ ; inoltre è rappresentata la spira vista di profilo con l'indicazione dei campi magnetici e delle forze agenti sui lati superiore ed inferiore della spira; quindi è rappresentata la somma vettoriale di tali forze. Queste forze sono perpendicolari ai lati della spira e al campo magnetico presente. Dall'analisi della figura risulta una forza risultante diretta verso sinistra, cioè verso il magnete che ha generato il campo  $B$ . Questo ragionamento si può ripetere per l'altra coppia di lati della spira e per tutte le spire. Il secondo magnete quindi si trova sottoposto ad una somma di forze concordi e tutte dirette verso il primo magnete. Lo studio può essere ripetuto per l'azione del secondo magnete sul primo (lo faccia il lettore studioso) ma, usando la terza legge della dinamica newtoniana, si può affermare che la forza del secondo magnete sul primo sarà uguale ed opposta a quella appena determinata. Lasciando inesplorata l'intensità della forza in questione, occorre qui limitarsi a concludere che due magneti orientati in modo equiverso, si attirano. Allo stesso modo (lo verifichi il lettore studioso) si può verificare che, se i magneti sono orientati in modo opposto, si respingono.

# 13

## EQUAZIONI DI MAXWELL E ONDE ELETTROMAGNETICHE.

La descrizione del campo elettrico e magnetico fino ad ora sviluppata ha condotto alle seguenti equazioni per flusso e circuitazione:

$$\Phi_S(\mathbf{E}) = \frac{Q}{\epsilon_0} \quad , \quad \Gamma_\gamma(\mathbf{E}) = -\frac{d\Phi_S(\mathbf{B})}{dt} \quad , \quad \Phi_S(\mathbf{B}) = 0 \quad , \quad \Gamma_\gamma(\mathbf{B}) = \mu_0 i . \quad (13.1)$$

La storia a questo punto però non è completa. In questo capitolo si metterà in luce che l'ultima equazione non è corretta; la sua correzione, consente di dare una descrizione, seppur nei limiti di queste note, della propagazione delle onde elettromagnetiche.

### 13.1 IL TERMINE MANCANTE.

Si consideri il processo di carica di un condensatore, già studiato in uno dei capitoli precedenti.

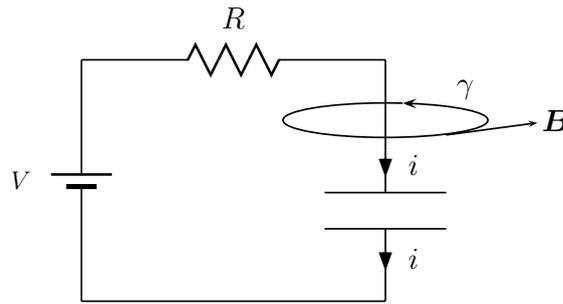


Figura 13.1: Il condensatore in carica.

Con riferimento alla figura, la carica avviene tramite il collegamento ad un generatore di tensione tramite un filo di resistenza  $R$  collegato alle armature del condensatore. Durante il processo di carica, una corrente elettrica di intensità  $i$  deposita una quantità di carica  $+Q$  sull'armatura superiore ed un'identica  $i$  sottrae la medesima quantità di carica  $+Q$  all'armatura inferiore; su questa quindi rimane una carica  $-Q$ . Se  $q(t)$  è la carica sulle armature in funzione del tempo, è noto che vale la relazione

$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt} . \quad (13.2)$$

Questa  $i$  produce, secondo la quarta delle (13.1), un campo magnetico  $\mathbf{B}$  la cui circuitazione lungo una qualunque curva chiusa  $\gamma$  è proporzionale alla corrente elettrica concatenata con  $\gamma$ . Si osservi però che la  $i$  non è concatenata a nulla in quanto il circuito in cui scorre è *aperto* sul condensatore. La legge di Ampère quindi porta a concludere che la circuitazione di  $\mathbf{B}$  lungo  $\gamma$  è nulla. Ma ciò è evidentemente falso in quanto la corrente elettrica che circola nel filo che carica il condensatore genera di certo un campo magnetico lungo  $\gamma$ . Qualcosa quindi non torna: la quarta delle (13.1) è certamente sbagliata. La correzione a questa legge è il contributo di Maxwell<sup>1</sup> alle leggi che poi, da lui stesso raccolte e ordinate, portano il suo nome. La forma corretta dell'ultima delle (13.1) è la seguente

$$\Gamma_\gamma(\mathbf{B}) = \mu_0 i + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\Phi_S(\mathbf{E})}{dt} = \mu_0 \left( i + \epsilon_0 \frac{d\Phi_S(\mathbf{E})}{dt} \right) . \quad (13.3)$$

<sup>1</sup> James Clerk Maxwell (1831-1879), fisico inglese.

Questa equazione va letta come segue: la circuitazione del campo magnetico lungo una curva chiusa  $\gamma$  è proporzionale alla somma della corrente concatenata con  $\gamma$  e la derivata rispetto al tempo del flusso del campo elettrico attraverso una qualsiasi superficie aperta  $S$  che abbia  $\gamma$  come bordo, moltiplicata per  $\epsilon_0$ . Per verificare che la correzione apportata da Maxwell all'equazione di

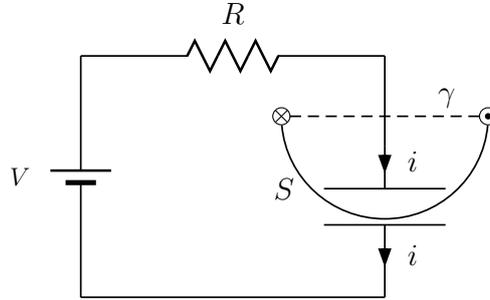


Figura 13.2: La semisfera  $S$ .

Ampère risolva il problema, si consideri una superficie semisferica  $S$  che abbia  $\gamma$  come bordo che, come indicato in figura 13.2, passi fra le armature del condensatore. Per determinare il flusso del campo elettrico attraverso la semisfera  $S$  si osservi che *chiudendo* la  $S$  con un cerchio che abbia  $\gamma$  come circonferenza si ottiene una superficie chiusa  $S'$  a cui è possibile applicare la prima delle (13.1). Si può quindi scrivere

$$\Phi_{S'}(\mathbf{E}) = \frac{q(t)}{\epsilon_0}, \tag{13.4}$$

ove  $q(t)$  è la carica che si trova all'interno di  $S'$ , quindi sull'armatura superiore del condensatore, all'istante  $t$ . Si osservi d'altra parte che vi è campo elettrico solo all'interno del condensatore e quindi non vi è flusso di campo elettrico attraverso il cerchio (il *tappo* della semisfera); quindi il flusso attraverso  $S'$  coincide con il flusso attraverso  $S$ . Quindi

$$\Phi_S(\mathbf{E}) = \frac{q(t)}{\epsilon_0} \quad \longrightarrow \quad \frac{d\Phi_S(\mathbf{E})}{dt} = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{dq(t)}{dt} = \frac{1}{\epsilon_0} i. \tag{13.5}$$

A questo punto la l'equazione (13.3), visto che il primo addendo non contribuisce, diviene

$$\Gamma_\gamma(\mathbf{B}) = \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\Phi_S(\mathbf{E})}{dt} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{1}{\epsilon_0} i = \mu_0 i, \tag{13.6}$$

che è la corretta circuitazione di  $\mathbf{B}$ . Si osservi che, non appena termina la carica del condensatore, la corrente smette di circolare e quindi  $i=0$  e conseguentemente  $\mathbf{B}=0$ ; la carica depositata sulle armature del condensatore rimane costante e quindi rimane costante anche il campo elettrico all'interno del condensatore e così il suo flusso che ha pertanto derivata nulla. Quindi l'equazione (13.3) diviene un'identità di zeri. Il nuovo termine aggiunto da Maxwell è detto **corrente di spostamento**.

### 13.2 LE EQUAZIONI DI MAXWELL E LA VELOCITÀ DELLA LUCE.

Le quattro equazioni fondamentali dell'elettromagnetismo nella loro forma corretta e definitiva sono

$$\boxed{\begin{aligned} \Phi_S(\mathbf{E}) &= \frac{Q}{\epsilon_0}, & \Phi_S(\mathbf{B}) &= 0, \\ \Gamma_\gamma(\mathbf{E}) &= -\frac{d\Phi_S(\mathbf{B})}{dt}, & \Gamma_\gamma(\mathbf{B}) &= \mu_0 i + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\Phi_S(\mathbf{E})}{dt}. \end{aligned}} \tag{13.7}$$

Queste equazioni, che come visto sopra, sono state trovate da vari autori, sono state scritte per la prima volta tutte insieme da Maxwell nel 1864 nel suo articolo *A Dynamical Theory of the Electromagnetic Field* e per questo vengono collettivamente chiamate **equazioni di Maxwell**.

### Osservazioni

1. Le equazioni ora scritte sono di fondamentale importanza storica oltre che scientifica: con la loro acquisizione fu ritenuta completata l'opera, iniziata da Newton, di descrizione della Natura in termini deterministici. Secondo la teoria di Newton infatti la conoscenza delle forze agenti su un sistema materiale consente la determinazione completa del suo moto, e quindi della sua posizione in ogni istante. La teoria newtoniana però non trattava dei fenomeni elettromagnetici che, invece, sono interamente spiegati in termini delle equazioni di Maxwell: la conoscenza dei campi elettrico e magnetico, che soddisfano tali equazioni, infatti, consente la descrizione completa di ogni fenomeno elettromagnetico. Da tali equazioni si è anche ottenuta (si veda oltre) una completa e soddisfacente teoria della luce in termini di radiazione elettromagnetica. Questa situazione, accompagnata dai successi della termodinamica e dalla teoria atomica, che ne è il modello meccanicistico in termini microscopici, generò nella seconda metà dell'Ottocento una grande euforia sulle possibilità della scienza; euforia che fu presto raffreddata dalla crisi della *fisica classica* che tra la fine dell'Ottocento e l'inizio del Novecento, travolse sia la teoria newtoniana che quella di Maxwell.
2. Si osservi che, secondo le equazioni di Maxwell, un campo magnetico variabile produce un campo elettrico (induzione magnetica) e un campo elettrico variabile produce un campo magnetico (contributo del 'termine mancante'). Questo meccanismo, come si vedrà, è cruciale per la interpretazione della luce in termini di onde elettromagnetiche.
3. Per avere una completa teoria dell'elettromagnetismo, alle equazioni di Maxwell è necessario aggiungere l'equazione che fornisce la forza agente su una carica in un campo elettromagnetico:

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \wedge \mathbf{B}), \quad (13.8)$$

essa infatti non è ottenibile dalle equazioni (13.7) e va aggiunta a parte.

4. Ricordando i valori della costante dielettrica, equazione (7.4), della permeabilità magnetica, equazione (9.33), del vuoto si ottiene

$$\begin{aligned} \mu_0 \epsilon_0 &= 4\pi \times 10^{-7} \cdot 8.854\,187\,812\,8 \times 10^{-12} \text{ N C}^2 \text{ A}^{-2} \text{ N}^{-1} \text{ m}^{-2} \\ &= 1.112\,65 \times 10^{-17} \text{ C}^2 \text{ A}^{-2} \text{ m}^{-2} \end{aligned} \quad (13.9)$$

Osservando che vale  $1 \text{ A} = 1 \text{ C s}^{-1}$ , si trova  $\mu_0 \epsilon_0 = 1.112\,65 \times 10^{-17} \text{ s}^2 \text{ m}^{-2}$ , quindi  $\mu_0 \epsilon_0$  ha le dimensioni dell'inverso di una velocità al quadrato. Il valore di questa velocità è

$$\frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} = 299\,792\,458 \text{ m s}^{-1} \quad (13.10)$$

e, come è stato subito riconosciuto da Maxwell, coincide con il valore della velocità della luce nel vuoto. Maxwell capì allora di aver trovato che la luce non era altro che la propagazione di campi elettromagnetici nello spazio, come, in un caso molto semplificato, si vedrà nel prossimo paragrafo. La scoperta teorica di Maxwell venne verificata sperimentalmente da Hertz<sup>2</sup> che nel 1887 riuscì a produrre onde elettromagnetiche mediante un circuito oscillante; queste onde furono rilevate tramite un'antenna ricevente. Con tale apparato sperimentale, Hertz riuscì a verificare tutta la fenomenologia delle onde luminose: riflessione, rifrazione, interferenza, polarizzazione, trasversalità. Scoprì, inoltre, il fenomeno dell'effetto fotoelettrico, la cui spiegazione teorica venne solo diciotto anni più tardi da Einstein<sup>3</sup>.

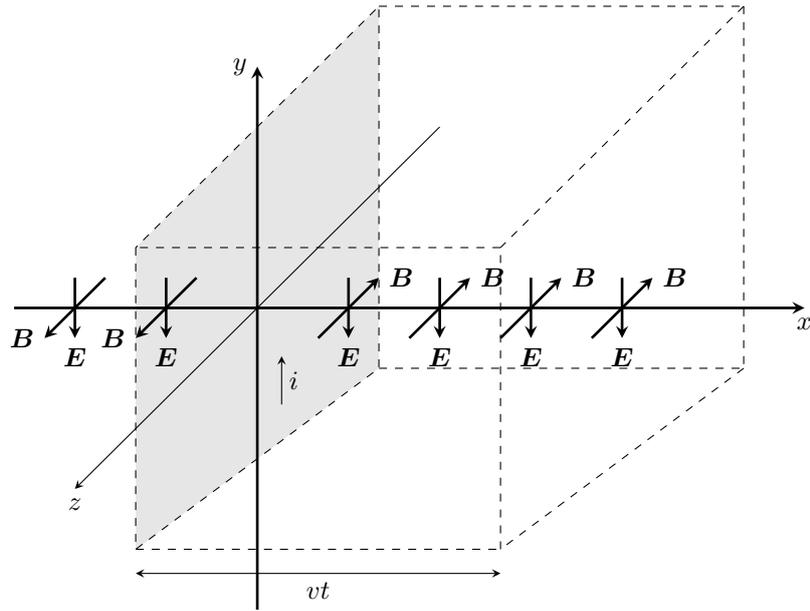
### 13.3 ONDE ELETTROMAGNETICHE.

In questo paragrafo<sup>4</sup> si mostra, in un esempio ideale, che le equazioni di Maxwell sono compatibili con la propagazione del campo elettrico e magnetico alla velocità della luce individuata nel paragrafo precedente.

<sup>2</sup> Heinrich Hertz (1857-1894), fisico tedesco.

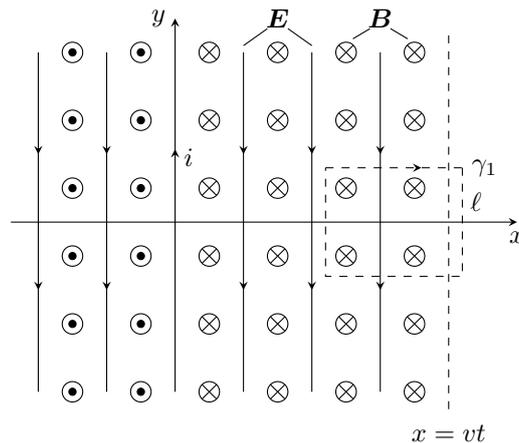
<sup>3</sup> Albert Einstein (1879-1955), fisico tedesco.

<sup>4</sup> Il contenuto di questo paragrafo è preso dal testo R.P. Feynman, R.B. Leighton, M. Sands, *La fisica di Feynman*, vol II, parte I, Paragrafo 18-4. Zanichelli.



**Figura 13.3:** La corrente laminare infinita e i campi  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{B}$  da essa generati.

Si consideri quindi un piano infinito (tratteggiato in figura 13.3), su cui siano distribuite uniformemente delle cariche positive, che si trovi sul piano degli assi cartesiani  $yz$ . Si supponga che, all'istante  $t = 0$ , il piano cominci a muoversi con velocità costante nella direzione delle  $y$  positive. Vi è quindi una corrente laminare infinita. Tale corrente laminare produce un campo magnetico il quale, così repentinamente suscitato, deve a sua volta, per la legge di Faraday-Neumann-Lenz, generare un campo elettrico indotto. Si fornisce ora la soluzione corretta per mostrare, a posteriori, che essa è soluzione delle equazioni di Maxwell. Siano  $\mathbf{B}$  e  $\mathbf{E}$  il campo magnetico e il campo elettrico generati dalla corrente laminare; essi, come rappresentato in figura 13.3, sono mutuamente perpendicolari e si propagano nei due versi nella direzione perpendicolare ad entrambi (in figura la direzione delle  $x$ ) con velocità  $v$ .



**Figura 13.4:** Vista laterale dall'asse  $z$  con la curva  $\gamma_1$ .

Si considera qui di seguito la sola propagazione nel verso delle  $x$  positive, il caso analogo della propagazione nel verso delle  $x$  negative è lasciato al lettore studioso. Quindi, se il piano comincia a muoversi all'istante  $t = 0$ , all'istante generico successivo  $t$  il campo elettrico e magnetico si sono propagati e sono costanti (si veda osservazione 1 più sotto) fino al punto  $x = vt$  e sono nulli per  $x > vt$ . Si tratta di verificare che questa configurazione è in accordo con le equazioni di Maxwell e che la velocità  $v$  coincide con la velocità  $\frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$ .

A tale scopo si consideri una vista laterale dalla direzione delle  $z$  positive, come in figura 13.4. Le linee verticali rappresentano le linee di campo elettrico, le crocette rappresentano le linee di campo magnetico entranti ed i puntini le linee di campo magnetico uscente. Si consideri inoltre la curva rettangolare  $\gamma_1$  avente un lato, lungo  $\ell$ , parallelo alle linee di campo elettrico ed un lato perpendicolare alle stesse e tale da attraversare il piano che costituisce il fronte dei campi propagantesi che si trova nella posizione  $x = vt$ ;  $\gamma_1$  inoltre sia orientata in modo che il flusso magnetico che attraversa una qualsiasi superficie  $S$ , avente  $\gamma_1$  come bordo, sia positivo, come in figura. Evidentemente, se il fronte di propagazione dei campi si sposta con velocità  $v$ , il flusso magnetico varia nel tempo all'aumentare della porzione di spazio occupata dai campi. La dipendenza dal tempo di tale flusso è

$$\Phi_S(\mathbf{B}) = B\ell vt + \alpha \quad \longrightarrow \quad \frac{d\Phi_S(\mathbf{B})}{dt} = B\ell v, \quad (13.11)$$

ove  $\alpha$  è una costante il cui valore qui è completamente irrilevante. Per il calcolo della circuitazione di  $\mathbf{E}$  lungo  $\gamma_1$  si osservi che contribuisce il solo lato parallelo alle linee di campo di  $\mathbf{E}$ , che si trova nella parte di spazio occupata dai campi; vale quindi, tenendo conto dei versi contrari,

$$\Gamma_{\gamma_1}(\mathbf{E}) = -E\ell \quad (13.12)$$

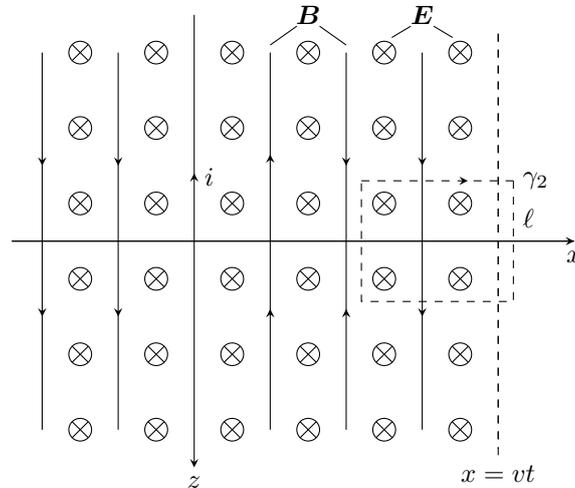
pertanto per la terza delle (13.7), si ottiene

$$B\ell v = E\ell \quad \longrightarrow \quad E = vB. \quad (13.13)$$

Osservando i versi dei vettori, l'ultima relazione può essere scritta nella seguente forma vettoriale:

$$\mathbf{E} = -\mathbf{v} \wedge \mathbf{B}. \quad (13.14)$$

Si consideri ora una vista dall'alto, cioè dalla direzione delle  $y$  positive, come in figura 13.5.



**Figura 13.5:** Vista laterale dall'asse  $y$  con la curva  $\gamma_2$ .

Le linee verticali rappresentano ora le linee di campo magnetico, le crocette le linee di campo elettrico entrante. La corrente (non rappresentata) è uscente lungo il piano  $yz$  perpendicolare al foglio. Si consideri quindi una curva rettangolare  $\gamma_2$  avente un lato, lungo  $\ell$ , parallelo alle linee di campo magnetico ed un lato a queste perpendicolare e tale da attraversare il piano che costituisce il fronte dei campi propagantesi e che si trova nella posizione  $x = vt$ ;  $\gamma_2$  inoltre sia orientata in modo che il flusso elettrico che attraversa una qualsiasi superficie  $S$ , avente  $\gamma_2$  come bordo, sia positivo, come in figura. Evidentemente, ragionando in modo analogo a prima, se il fronte di propagazione dei campi si sposta con velocità  $v$ , il flusso elettrico varia nel tempo all'aumentare della porzione di spazio occupata dai campi. La dipendenza dal tempo di tale flusso è

$$\Phi_S(\mathbf{E}) = E\ell vt + \beta \quad \longrightarrow \quad \frac{d\Phi_S(\mathbf{E})}{dt} = E\ell v, \quad (13.15)$$

ove  $\beta$  è la solita costante irrilevante. D'altra parte, per il calcolo della circuitazione di  $\mathbf{B}$  lungo  $\gamma_2$ , si osservi che contribuisce il solo lato parallelo alle linee di campo di  $\mathbf{B}$ , che si trova nella parte di spazio occupata dai campi; vale quindi

$$\Gamma_{\gamma_2}(\mathbf{B}) = B\ell \quad (13.16)$$

pertanto per la quarta delle (13.7), osservando che non c'è corrente concatenata con  $\gamma_2$ , si ottiene

$$B\ell = \mu_0\epsilon_0 v E \ell \quad \longrightarrow \quad B = \mu_0\epsilon_0 v E . \quad (13.17)$$

Sostituendo in questa equazione la (13.13) si ricava facilmente

$$B = \mu_0\epsilon_0 v^2 B , \quad (13.18)$$

da cui

$$\mu_0\epsilon_0 v^2 = 1 \quad \longrightarrow \quad v^2 = \frac{1}{\mu_0\epsilon_0} . \quad (13.19)$$

Quindi il campo elettromagnetico generato da una corrente laminare infinita si propaga nello spazio con velocità  $\frac{1}{\sqrt{\mu_0\epsilon_0}}$ , che è quanto si doveva verificare.

### Osservazioni

1. Il fatto che le due curve chiuse  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  siano arbitrarie, fa sì che i nostri ragionamenti siano validi in ogni posizione della regione di spazio occupata dai campi; questo significa che, in tale regione, i campi elettrico e magnetico sono uniformi.
2. Anche in questo paragrafo (come nel paragrafo in cui si è trattato il contenuto relativistico della teoria elettromagnetica) è emersa l'intima relazione fra campo elettrico e magnetico ed, in particolare, il fatto che vengano prodotti insieme. In relazione a questo fatto, si parla spesso di **campo elettromagnetico** e, in relazione alla propagazione, di **onde elettromagnetiche**.
3. La situazione ora delineata è evidentemente irrealizzabile in realtà. È stata presa in considerazione solo poiché è un semplice esempio, anche se teorico, in cui si manifesta chiaramente il meccanismo della propagazione. Nei casi reali le sorgenti del campo elettromagnetico sono finite e, conseguentemente, i campi prodotti non sono costanti.
4. È possibile dimostrare, anche se esula dai limiti di queste note, che nel caso più generale, le onde elettromagnetiche sono oscillazioni di tipo sinusoidale dei campi elettrico e magnetico che si mantengono perpendicolari fra loro ed alla direzione di propagazione. Di tali onde sinusoidali si dimostra inoltre che l'intensità aumenta con l'ampiezza dell'oscillazione e che l'energia dell'onda è proporzionale alla frequenza e, quindi, inversamente proporzionale alla lunghezza d'onda.

Parte IV

FISICA MODERNA

# 14

## TEORIA DELLA RELATIVITÀ.

---

### 14.1 I CONCETTI DI SPAZIO E TEMPO.

Ogni possibile descrizione del moto di un corpo si basa, in modo piú o meno consapevole, sulla possibilità di misurare tale moto. Per misura di un moto si intende la possibilità di misurare spazi, tempi e le loro relazioni. Così, se una bicicletta percorre un metro in un secondo si afferma che la velocità della bicicletta è di un metro al secondo. Nel fare questa affermazione si sottintende l'aver compiuto una misura di spazio e tempo o, quanto meno, la possibilità di tale misura. Pertanto per descrivere il moto di un corpo vi è bisogno di un regolo graduato per le misure dello spazio e di un orologio per le misure del tempo. È anche necessario un *punto di riferimento*, un'origine, rispetto a cui effettuare le misure. L'insieme di regolo graduato, orologio e origine, viene detto **sistema di riferimento**.

Il problema della relatività è capire quale sia la relazione tra le diverse descrizioni della realtà fisica che si ottengono da diversi sistemi di riferimento. Per esempio, ognuno sarà disposto a riconoscere che le leggi della fisica debbano essere le stesse per due sistemi di riferimento che siano diversi solo per il punto di riferimento. Questo significa che un esperimento eseguito a Udine dà necessariamente lo stesso risultato del medesimo esperimento eseguito a Roma. Questo fatto è un'ovvia conseguenza della *omogeneità* dello spazio, cioè del fatto che tutti i punti dello spazio sono *fisicamente equivalenti*.

Il problema di stabilire in quali sistemi di riferimento le leggi della fisica fossero le stesse è stato affrontato per la prima volta con qualche profondità da Galilei e da Newton<sup>1</sup> i quali arrivarono a formulare quello che oggi viene chiamato **principio di relatività**.

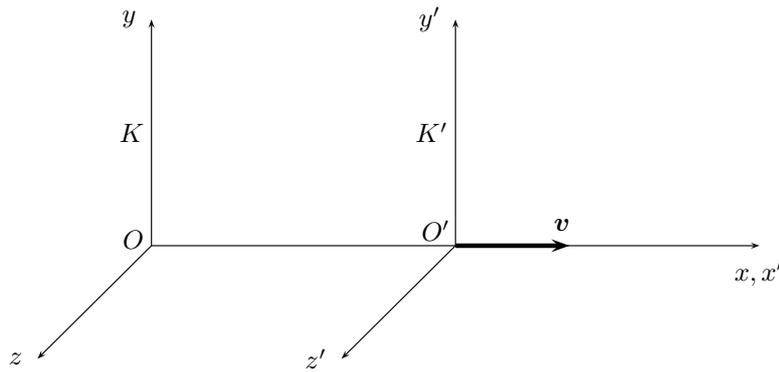
*Le leggi della fisica sono le stesse rispetto a due sistemi di riferimento che si muovano di moto rettilineo ed uniforme, cioè con velocità costante, uno rispetto all'altro.*

Si noti che non mi sono curato di specificare quale dei due sistemi di riferimento sia in moto e quale fermo poiché non ho nessun modo (cioè non posso fare nessun esperimento che mi permetta) di distinguere le due cose. Si consideri il seguente esempio. Si supponga che io mi trovi all'interno di una astronave e che voglia stabilire se sono in moto rispetto alle stelle; per il principio di relatività ora enunciato, non c'è alcun esperimento che io possa fare per determinarlo se il moto della mia astronave rispetto alle stelle è rettilineo ed uniforme, infatti ogni mio esperimento dà lo stesso risultato che darebbe se l'astronave fosse ferma rispetto alle stelle. L'unica cosa che mi resta da fare è guardare dall'oblò. Ma anche così non mi è possibile determinare se a muoversi è l'astronave o le stelle stesse<sup>2</sup>. Come si vede, in fisica è essenziale il punto di vista empirico. Ha senso parlare solo di ciò che può essere misurato; o meglio: definire una grandezza equivale a specificare come essa possa venire misurata. Ora qui interessa trovare la relazione fra le misure di posizione fatte in due sistemi di riferimento che siano in moto relativo con velocità costante  $V$ . Si supponga quindi di disporre di due osservatori dotati di due regoli graduati e di due orologi identici (si veda la figura 14.1); si supponga inoltre che uno di essi si trovi nel punto  $O$  e l'altro nel punto  $O'$  che inizialmente, all'istante  $t = 0$ , coincida con  $O$  ma che si muova di moto rettilineo uniforme con velocità  $V$  in una direzione che viene definita asse delle  $x$ .

Per semplicità, ma l'ipotesi non diminuisce la generalità dell'argomento, si suppone inoltre che il moto avvenga in modo tale che gli assi  $x$  dei due osservatori scorrano uno sull'altro mantenendo i rimanenti assi,  $y$  e  $z$ , paralleli. In questo modo, dopo un certo tempo  $t_1$ ,  $O'$  si trova a una distanza

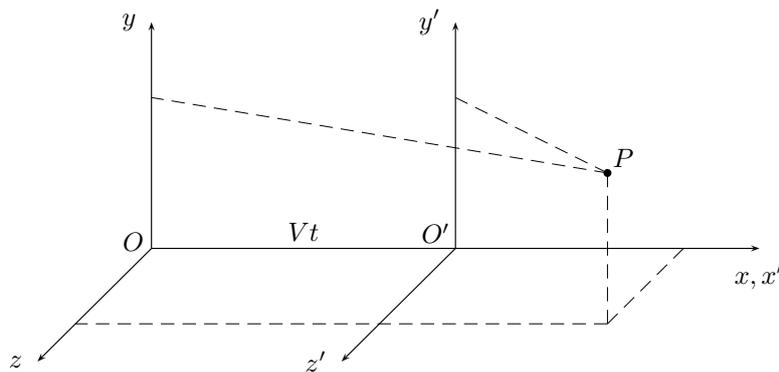
<sup>1</sup> Ma già in epoca ellenistica sembra che sia stato capito qualcosa a riguardo; purtroppo le documentazioni rimasteci sono troppo scarse per poter fare piú di una ipotesi. Qualche conforto a tale ipotesi viene dalla lettura dei teoremi 50-56 dell'*Ottica* di Euclide.

<sup>2</sup> Una simile considerazione si trova già nel *Dialogo sopra i due massimi sistemi* di Galilei.



**Figura 14.1:** Due sistemi di riferimento in moto relativo.

$x(t_1) = Vt_1$  da  $O$ . Naturalmente, come è stato osservato poc'anzi, dire che  $O$  è fermo mentre  $O'$  si muove è una affermazione priva di senso non potendosi distinguere in alcun modo dalla situazione in cui  $O$  sia in moto e  $O'$  sia fermo. Per distinguerli verbalmente nelle considerazioni che seguono si dirà, compiendo un arbitrio (ma tutte le convenzioni lo sono), ‘sistema stazionario’, denotato con la lettera  $K$ , quello che ha  $O$  come punto di riferimento e ‘sistema in moto’, denotato con la lettera  $K'$ , quello che ha  $O'$  come punto di riferimento.



**Figura 14.2:** Coordinate di  $P$  in  $K$  ed in  $K'$ .

È facile rendersi conto che le coordinate delle posizioni del punto  $P$  misurate nei due sistemi di riferimento sono legate dalla relazione (si veda la figura 14.2)

$$\begin{cases} x'(t) = x(t) - Vt \\ y'(t) = y(t) \\ z'(t) = z(t) \end{cases} \tag{14.1}$$

Questa è l'equazione che mette in relazione i punti di due sistemi di riferimento in moto reciproco rettilineo ed uniforme. Il principio di relatività discusso sopra può pertanto essere enunciato affermando che le equazioni esprimenti le leggi della fisica devono essere invarianti per la trasformazione (14.1).

Si supponga ora che all'istante  $t_1$  entrambi gli osservatori misurino le coordinate di un punto  $P$ .  $O$  trova  $P$  in un punto di coordinate  $(x(t_1), y(t_1), z(t_1))$ ;  $O'$ , che si trova nella posizione  $(Vt_1, 0, 0)$ , trova  $P$  in un punto di coordinate  $(x'(t_1), y'(t_1), z'(t_1))$ . Queste coordinate sono legate dalle relazioni (14.1) e quindi vale

$$\begin{cases} x'(t_1) = x(t_1) - Vt_1 \\ y'(t_1) = y(t_1) \\ z'(t_1) = z(t_1) \end{cases} \tag{14.2}$$

Si supponga ora che il punto  $P$  sia in moto rispetto ad  $O$  e ad  $O'$  e che ad un tempo successivo  $t_2$  i due osservatori rifacciano le loro misure. Fra le coordinate della nuova posizione di  $P$ , misurate da  $O$  e  $O'$  valgono ancora le (14.1); quindi:

$$\begin{cases} x'(t_2) = x(t_2) - Vt_2 \\ y'(t_2) = y(t_2) \\ z'(t_2) = z(t_2) . \end{cases} \quad (14.3)$$

Poiché la velocità è il rapporto fra lo spazio percorso e il tempo impiegato a percorrerlo, è chiaro che gli osservatori  $O$  ed  $O'$  misurano rispettivamente le velocità

$$\begin{cases} v_x = \frac{x(t_2) - x(t_1)}{t_2 - t_1} \\ v_y = \frac{y(t_2) - y(t_1)}{t_2 - t_1} \\ v_z = \frac{z(t_2) - z(t_1)}{t_2 - t_1} \end{cases} \quad \begin{cases} v'_x = \frac{x'(t_2) - x'(t_1)}{t_2 - t_1} \\ v'_y = \frac{y'(t_2) - y'(t_1)}{t_2 - t_1} \\ v'_z = \frac{z'(t_2) - z'(t_1)}{t_2 - t_1} . \end{cases} \quad (14.4)$$

Si osservi ora che, sottraendo membro a membro le equazioni (14.3) e (14.2) e dividendo il risultato per  $(t_2 - t_1)$ , e tenendo conto delle (14.4), si ottiene:

$$\begin{cases} v'_x = v_x - V \\ v'_y = v_y \\ v'_z = v_z . \end{cases} \quad (14.5)$$

Riassumendo, se due sistemi di riferimento si muovono con velocità costante  $V$  uno rispetto all'altro, le leggi della fisica sono le stesse (per il principio di relatività), le posizioni misurate dai due sistemi di riferimento stanno nella relazione (14.1), mentre le velocità stanno nella relazione (14.5).

Le relazioni (14.1) e (14.5), tanto semplici da apparire ovvie, si basano su due tacite assunzioni di importanza cruciale. Si assume infatti che gli osservatori in  $O$  e in  $O'$  facciano le loro misure simultaneamente e che i tempi misurati dai loro orologi siano gli stessi, cioè alle equazioni (14.1) va in realtà aggiunta l'equazione

$$t' = t , \quad (14.6)$$

che indica esplicitamente che i tempi misurati da  $K$  e da  $K'$  coincidono.

Si vedrà nel seguito che entrambe queste assunzioni sono false. I primi segnali di tale falsità arrivarono nel secolo XIX quando, grazie al lavoro di Maxwell sull'elettromagnetismo, si scoprì che la luce è un campo elettromagnetico propagantesi nel vuoto con velocità costante. Per la misura della velocità della luce si rimanda a quanto discusso sopra. È stato inoltre dimostrato sperimentalmente che tale valore è lo stesso in ogni sistema di riferimento e, in particolare, è indipendente dalla velocità della sorgente della luce. In altre parole due osservatori in moto relativo con velocità costante  $V$  che misurino la velocità della luce trovano esattamente lo stesso risultato. È chiaro che questo risultato è in stridente contrasto con la teoria di Galilei e di Newton e in particolare con l'equazione (14.5).

Per sanare questa contraddizione vi sono due possibilità: o si rinuncia al principio di relatività o si rinuncia all'equazione (14.5) ed alla (14.1) di cui essa, come si è visto, è conseguenza. Il problema è stato risolto da Einstein nel 1905. Egli accolse il principio di relatività e lo elevò al rango di primo postulato fondamentale della sua teoria. Come secondo postulato scelse la **costanza della velocità della luce**.

*La luce si propaga nel vuoto con velocità costante  $c$  in tutti i sistemi di riferimento inerziali.*

### Osservazioni

1. È il caso di sottolineare che il principio di relatività sopra enunciato richiede, in particolare, che non sia possibile scoprire lo stato di quiete o di moto rettilineo ed uniforme di un osservatore mediante esperimenti. In effetti ciò implicherebbe che uno stesso esperimento fornisse risultati diversi a seconda della quiete o del moto uniforme del sistema di riferimento in cui si trova lo sperimentatore e quindi nei due casi dovrebbe seguire leggi fisiche diverse, cosa proibita dal postulato di relatività.
2. Il fatto che la velocità della luce non dipenda dal sistema di riferimento implica in particolare che essa è indipendente dalla velocità della sorgente luminosa; infatti deve essere la stessa sia nel sistema di riferimento in cui tale sorgente è ferma sia in quello in cui è in moto. Questa proprietà differenzia radicalmente la luce da ogni altra forma di propagazione: per esempio la velocità del suono in aria *dipende* dal fatto che la sorgente delle onde sonore sia in moto o si ferma rispetto all'aria.
3. Il postulato di costanza della velocità della luce risolve il problema posto dall'esperimento di Michelson e Morley; infatti se la velocità della luce vale  $c$  in ogni sistema di riferimento le equazioni (5.11) ed (5.12) della III parte vengono sostituite da

$$t_1 = t_2 = \frac{\ell}{c}; \quad (14.7)$$

la velocità  $v$  della Terra rispetto all'etere quindi scompare dalle equazioni e quindi il risultato dell'esperimento non ne può dipendere.

4. Accanto al principio di relatività e a quello di costanza della velocità della luce, la teoria di Einstein usa implicitamente altri due postulati. Il **postulato di omogeneità e isotropia dello spazio** per il quale le leggi della fisica hanno la stessa forma spostando (omogeneità) l'origine del sistema di riferimento utilizzato o ruotandone (isotropia) gli assi, E il **postulato di omogeneità del tempo** per il quale le leggi della fisica hanno la stessa forma in ogni istante temporale.

## 14.2 DEFINIZIONE DI SIMULTANEITÀ.

<sup>3</sup>Il tempo, fino ad Einstein, non ha mai ricevuto una *definizione operativa*; si è sempre assunto che la nostra esperienza quotidiana, in cui gli eventi accadono uno 'dopo' l'altro, bastasse a renderne intuitivamente chiaro il concetto. Il contributo di Einstein sta appunto nell'aver messo in luce che, in fisica, l'intuito non è un criterio di verità: tutto ciò a cui si vuole attribuire un senso fisico, e quindi una realtà, deve poter essere misurato e non solo intuito.

Se io, di notte, vedo due fulmini cadere in due punti  $A$  e  $B$  e affermo: 'i due fulmini sono caduti simultaneamente' che senso posso dare a questa espressione? Si badi bene. Se due eventi accadono nello stesso luogo e se io, osservatore, mi trovo in quel luogo, posso certamente testimoniare della loro contemporaneità. Ma se i due eventi non accadono nello stesso luogo come posso essere certo che essi avvengono simultaneamente? Per vedere quanto la situazione sia delicata, si consideri il seguente esperimento ideale che mette in luce le difficoltà nella nozione di simultaneità. Si supponga che due osservatori vedano cadere due fulmini nei punti  $A$  e  $B$ ; l'osservatore  $O_1$  sia in moto verso  $B$  mentre  $O_2$  sia fermo; si supponga inoltre che nell'istante  $t_0$  in cui i due fulmini cadono  $O_1$  ed  $O_2$  si trovino entrambi nel punto medio di  $AB$ . Con riferimento alla figura 14.3, all'istante  $t_1$  la luce emessa dal fulmine caduto in  $B$  raggiunge  $O_1$ ; all'istante  $t_2$  le luci emesse dai due fulmini raggiungono  $O_2$ ; all'istante  $t_3$  la luce emessa dal fulmine caduto in  $A$  raggiunge  $O_1$ . Quindi per l'osservatore fermo i due fulmini cadono simultaneamente, mentre per l'osservatore in moto no. Si vede quindi che la nozione di simultaneità presenta dei problemi quando la si

<sup>3</sup> La presente esposizione segue abbastanza fedelmente l'esposizione originaria del lavoro del 1905 di Einstein: *Annalen der Physik* serie 4, XVII, pagina 891; tradotta, per esempio, in *Opere scelte*. È stata tenuta presente anche la discussione sulla simultaneità svolta da Hans Reichenbach nel suo saggio *Philosophie der Raum-Zeit-Lehre*.

consideri da due sistemi di riferimento in moto relativo.

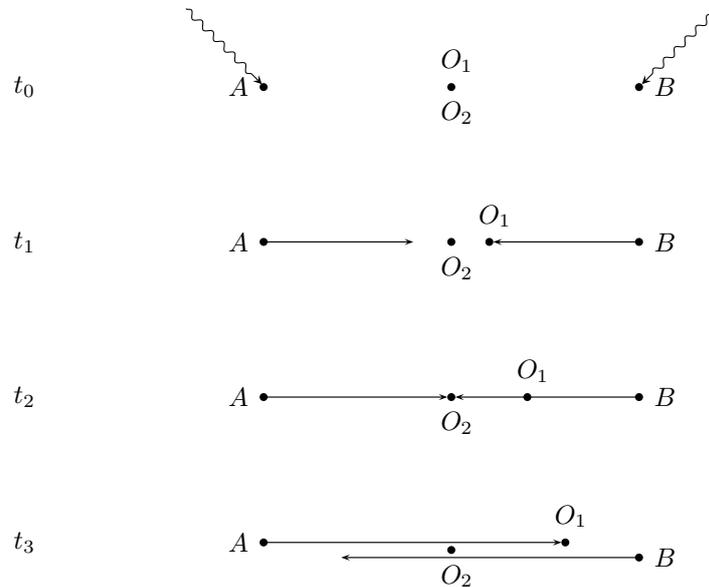


Figura 14.3: L'esperimento ideale.

Per fare qualche passo avanti conviene analizzare meglio il concetto di simultaneità. Occorre innanzi tutto distinguere fra simultaneità nello stesso luogo e simultaneità di eventi spazialmente separati. Nel primo caso non si tratta propriamente di simultaneità ma piuttosto di identità: due eventi che accadono nello stesso luogo e nel medesimo istante sono lo stesso evento.

Quindi è qui rilevante solo il caso di eventi spazialmente separati. Per rendere più evidenti effetti che altrimenti risultano impercettibili (benché sempre presenti) si farà riferimento a eventi lontani; con questo aggettivo intendo eventi la cui separazione spaziale sia molto maggiore delle dimensioni di un corpo umano.

Si chiede quindi di determinare se due eventi lontani sono simultanei. Si consideri per esempio il caso in cui il rumore di un tuono sia da me percepito nell'istante in cui le lancette del mio orologio segnano le 20.50. Vi è quindi simultaneità fra la mia percezione e una certa posizione delle lancette. Ma questo istante *non* è l'istante in cui si è prodotto il tuono. Per conoscere l'istante di produzione del tuono occorre conoscere *informazioni fisiche aggiuntive*, segnatamente la velocità del suono in aria e la distanza da me a cui l'evento che ha dato origine al suono si è verificato.

Si potrebbe usare il lampo, ma anche questo, benché estremamente più veloce del suono, percorre la stessa distanza in un certo tempo finito. Sono così arrivato alla seguente conclusione.

*Il confronto temporale fra eventi distanti è possibile solo se un segnale unisce i due eventi e se sono note la velocità del segnale e i due eventi.*

Supponendo di poter misurare la distanza in questione con un regolo metrico si tratta di misurare la velocità del segnale. Si supponga che questo segnale parta dal punto  $A$  all'istante  $t_A$  e arrivi in  $B$  all'istante  $t_B$ , allora la velocità è semplicemente data dal quoziente

$$\frac{AB}{t_B - t_A} \tag{14.8}$$

Per far ciò è necessario eseguire misure di tempo in luoghi diversi e ciò può essere fatto mediante orologi posti in  $A$  e in  $B$  che siano stati sincronizzati prima della misura. Questo però presuppone la possibilità di stabilire la simultaneità di eventi distanti.

Evidentemente questo è un ragionamento circolare: per determinare se due eventi sono simultanei è necessario conoscere la velocità di un segnale che li collega e per misurare questa velocità è

necessario essere in grado di stabilire se due eventi sono simultanei.

La soluzione trovata da Einstein è stata di usare un solo orologio senza bisogno di stabilire la sincronizzazione di eventi lontani. Per cominciare egli decise di utilizzare come segnale la luce, in quanto, come visto sopra, la sua velocità è la stessa in ogni sistema di riferimento e non dipende dalla velocità della sorgente. Quindi Einstein diede la seguente definizione di simultaneità.

*Si supponga che nel punto  $A$  all'istante  $t_{A1}$  (misurato mediante l'orologio in  $A$ ) venga emesso un raggio di luce verso  $B$ ; il raggio di luce venga poi riflesso da un specchio posto in  $B$  verso  $A$  all'istante  $t_B$  (misurato mediante l'orologio in  $B$ ) e ritorni in  $A$  all'istante  $t_{A2}$  (misurato mediante l'orologio in  $A$ ). I due orologi si definiscono sincronizzati se vale*

$$t_B - t_{A1} = t_{A2} - t_B \quad \longrightarrow \quad t_B = \frac{1}{2}(t_{A1} + t_{A2}). \quad (14.9)$$

Una tale definizione implica l'assunzione che la velocità della luce nei due versi di percorrenza sia la stessa. Questo è garantito dal principio di costanza della velocità della luce (si veda in particolare l'osservazione 2 che segue l'enunciato).

Questa definizione di simultaneità consente di sincronizzare orologi lontani posti in qualsiasi punto dello spazio. In altre parole è stato definito operativamente un tempo in ogni punto mediante orologi tutti sincronizzati fra di loro e quindi è stata definita operativamente la simultaneità nel sistema di riferimento stazionario, che come detto sopra, viene indicato convenzionalmente con  $K$ .

Si sottolinea ancora una volta che il procedimento di sincronizzazione sopra descritto può essere utilizzato per sincronizzare orologi di osservatori in movimento (si veda sotto) proprio perché la velocità della luce, come osservato in precedenza, è indipendente dallo stato di quiete o di moto dell'osservatore. Questo, *sia chiaro*, è il motivo per cui viene utilizzata la luce per mandare segnali e non, ad esempio, il suono, un segnale trasmesso lungo filo elettrico o altro: tutti questi diversi segnali hanno una velocità di propagazione che dipende dallo stato di moto dell'osservatore (si veda anche la successiva nota 2).

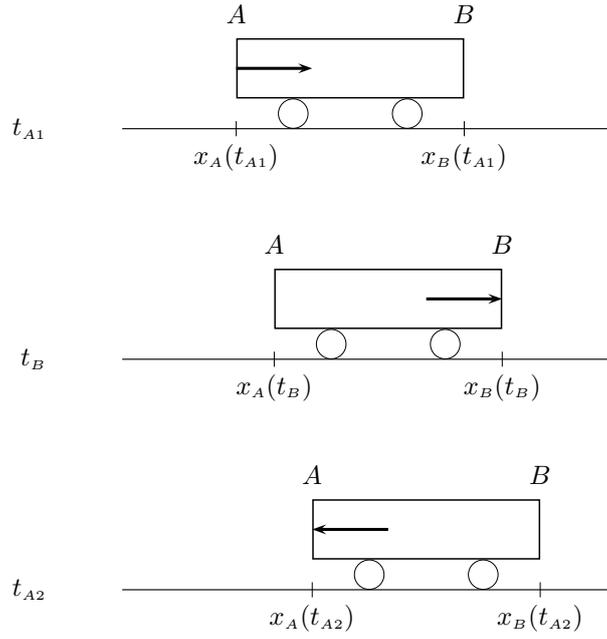
Si vuole ora stabilire se due eventi che, in base al criterio ora individuato, siano simultanei in un certo sistema di riferimento lo siano anche in un diverso sistema che sia in moto rettilineo ed uniforme con velocità  $V$  rispetto al primo. A tale scopo è necessario premettere una discussione sulla misura delle lunghezze.

Si supponga che un vagone ferroviario fermo sulla linea ferroviaria, cioè fermo nel sistema  $K$ , venga misurato mediante un regolo graduato e risulti avere lunghezza  $l_0$ . Si supponga poi che il vagone venga messo in movimento con velocità  $V$ . Si chiede di determinarne nuovamente la lunghezza. Si può pensare di agire in due modi:

- a. stando sul vagone, e quindi nel sistema di riferimento in moto (che, come detto sopra, viene indicato convenzionalmente con  $K'$ ) si effettua la misura con un regolo graduato identico al precedente;
- b. stando lungo la linea ferroviaria, cioè nel sistema  $K$ , per mezzo di orologi dislocati lungo il percorso del vagone, che siano stati precedentemente sincronizzati con il metodo discusso sopra, si determina in quali punti si trovano le estremità del vagone in un dato istante; poi, mediante il solito regolo graduato, si misura la distanza dei punti così trovati; si veda anche la successiva osservazione 1.

Il metodo **a** consiste nella determinazione della lunghezza del vagone fermo in  $K'$ ; per il principio di relatività quindi la misura ottenuta deve essere  $l_0$ .

Il metodo **b** invece fornisce la misura della lunghezza del vagone in moto con velocità di modulo  $V$  (per la proprietà di isotropia dello spazio ci si aspetta che non possa dipendere dalla direzione della velocità); si denoti tale lunghezza con  $l_V$ . Si immagini che alle estremità  $A$  e  $B$  del vagone in movimento siano collocati due orologi sincronizzati nel sistema  $K$ , cioè tali che quando essi transitino accanto a uno degli orologi collocati lungo la linea, e tutti sincronizzati fra loro, essi segnino il medesimo tempo. In questo modo gli orologi in  $A$  e in  $B$ , essendo sincronizzati con



**Figura 14.4:** Sincronizzazione degli orologi in  $K'$ .

ogni orologio del sistema  $K$ , risultano, in  $K$ , pure sincronizzati fra loro. Si chiede se, facendo uso della definizione di simultaneità data sopra, se questi orologi siano sincronizzati anche rispetto al sistema  $K'$  (si veda la figura 14.4). Sia pertanto  $t_{A1}$  l'istante (misurato in  $A$  mediante un orologio sincronizzato in  $K$ ) in cui un raggio luminoso parte da  $A$  verso  $B$  e sia  $t_B$  l'istante (misurato in  $B$  mediante un orologio sincronizzato in  $K$ ) in cui esso viene riflesso in  $B$ . La posizione del punto  $B$  in ogni istante a partire dall'istante  $t_{A1}$  è data da

$$x_B(t) = x_B(t_{A1}) + V(t - t_{A1}) , \quad (14.10)$$

mentre la posizione del raggio di luce è

$$x_L(t) = x_A(t_{A1}) + c(t - t_{A1}) . \quad (14.11)$$

Si è indicato con  $t_B$  l'istante in cui la luce raggiunge il punto  $B$  quindi all'istante  $t_B$  il punto  $B$  e il raggio di luce si trovano nello stesso punto, cioè vale

$$x_B(t_B) = x_L(t_B) \quad \longrightarrow \quad x_B(t_B) + V(t_B - t_{A1}) = x_A(t_{A1}) + c(t_B - t_{A1}) , \quad (14.12)$$

da cui si ottiene

$$t_B - t_{A1} = \frac{x_B(t_{A1}) - x_A(t_{A1})}{c - V} = \frac{l_V}{c - V} , \quad (14.13)$$

ove  $l_V$  è la lunghezza dell'asta determinata con il metodo **b** nell'istante  $t_{A1}$ . Dopo la riflessione in  $B$  il raggio raggiunge nuovamente  $A$  nell'istante  $t_{A2}$  (misurato in  $A$  mediante un orologio sincronizzato in  $K$ ). La posizione del punto  $A$  in ogni istante a partire da  $t_B$  è quindi

$$x_A(t) = x_A(t_B) + V(t - t_B) , \quad (14.14)$$

mentre la posizione del raggio di luce è

$$x_L(t) = x_B(t_B) - c(t - t_B) . \quad (14.15)$$

È stato indicato con  $t_{A2}$  l'istante in cui la luce raggiunge  $A$  quindi, analogamente a quanto appena visto, vale

$$x_A(t_{A2}) = x_L(t_{A2}) \quad \longrightarrow \quad x_A(t_{A2}) + V(t_{A2} - t_B) = x_B(t_B) - c(t_{A2} - t_B) , \quad (14.16)$$

da cui si ottiene

$$t_{A2} - t_B = \frac{x_B(t_B) - x_A(t_B)}{c + V} = \frac{l_V}{c + V}, \quad (14.17)$$

ove  $l_V$  è ancora la lunghezza dell'asta determinata col metodo **b**, questa volta all'istante  $t_B$ . Confrontando le equazioni (14.13) e (14.17) è chiaro che non è rispettata la condizione di sincronizzazione (14.9), quindi gli orologi posti alle estremità del vagone e sincronizzati in  $K$  non sono sincronizzati in  $K'$ .

**Osservazioni**

1. È bene insistere sul fatto che per il principio di relatività, i metodi **a** e **b** descritti sopra per la misura della lunghezza del vagone, devono dare il medesimo risultato qualunque sia il sistema di riferimento dal quale la misura viene effettuata. In particolare, con riferimento al metodo **a**, la misura dà come risultato  $l_0$  sia che io, da  $K$ , misuri il vagone fermo in  $K$ , sia che, da  $K'$ , (e quindi sul vagone) misuri il vagone fermo in  $K'$ . Allo stesso modo, con riferimento al metodo **b**, la lunghezza  $l_V$  del vagone in moto con velocità  $V$  (più precisamente con il modulo della velocità uguale a  $V$ ), deve essere la stessa in  $K$  come in  $K'$ , quindi sia che il vagone sia fermo in  $K'$  e sia misurato da  $K$ , sia che sia fermo in  $K$  e misurato da  $K'$ : in entrambi i casi infatti il vagone è visto muoversi con la stessa velocità  $V$  (in modulo, e con direzioni opposte).
2. Nello scrivere le equazioni (14.11) e (14.15) si sta implicitamente utilizzando il postulato di costanza della velocità della luce, si sta infatti supponendo che il suo modulo sia indipendente dalla velocità della sorgente.
3. Si osservi che le equazioni (14.13) e (14.17) possono essere riscritte nella forma

$$t_B - t_{A1} = \frac{l_V}{c} \frac{1}{1 - \frac{V}{c}} \quad t_{A2} - t_B = \frac{l_V}{c} \frac{1}{1 + \frac{V}{c}}; \quad (14.18)$$

quindi se la velocità di  $K'$  rispetto a  $K$  è molto più piccola della velocità della luce, cioè se  $V \ll c$ , e quindi  $V/c \ll 1$ , le due equazioni risultano coincidere e i due orologi risultano pertanto sincronizzati anche in  $K'$ . Questo è un primo esempio, e se ne vedranno altri in quel che segue, del fatto che le correzioni portate da Einstein alla meccanica newtoniana sono trascurabili quando le velocità in gioco sono piccole rispetto alla velocità della luce. In altre parole dalle formule relativistiche approssimate, trascurando termini contenenti potenze di  $V/c$ , si ottengono le corrispondenti formule newtoniane. Questo tipo di approssimazione è detto **limite non relativistico**.

**14.3 TRASFORMAZIONI DI LORENTZ.**

<sup>4</sup>In questa sezione si ricava la relazione corretta fra le coordinate misurate in due sistemi di riferimento in moto relativo da sostituire alla (14.1) che, come visto sopra, contraddice al principio di relatività. Si consideri un segnale luminoso che parte dall'origine del sistema  $K$  all'istante  $t = 0$  e si muove, con velocità  $c$ , lungo una direzione individuata mediante un asse cartesiano  $x$ . All'istante generico  $t$  la sua posizione rispetto a  $K$  è quindi data da

$$x = ct \quad \longrightarrow \quad x - ct = 0. \quad (14.19)$$

Lo stesso fenomeno viene osservato dal sistema  $K'$  in moto rispetto a  $K$  con velocità costante  $V$  nella direzione  $x$ , in modo tale che nell'istante  $t' = 0$  l'origine di  $K'$  coincida con l'origine di  $K$ . Si indica convenzionalmente con apici spazi e tempi misurati nel sistema di riferimento  $K'$ . Per il

<sup>4</sup> La seguente presentazione è presa dall'appendice prima del libro *Relatività: esposizione divulgativa* di A. Einstein.

postulato della costanza della velocità della luce, anche in  $K'$  la velocità del segnale luminoso è  $c$  quindi la sua posizione rispetto a  $K'$  è data da

$$x' = ct' \quad \longrightarrow \quad x' - ct' = 0 . \quad (14.20)$$

Deve pertanto esistere una costante  $a$  tale che

$$x' - ct' = a(x - ct) . \quad (14.21)$$

Se ora si considera, allo stesso modo, un segnale luminoso propagantesi nella direzione opposta, devono valere

$$x = -ct \quad \text{e} \quad x' = -ct' . \quad (14.22)$$

Quindi deve anche valere, per un'opportuna costante  $b$ ,

$$x' + ct' = b(x + ct) . \quad (14.23)$$

Sommando e sottraendo membro a membro le equazioni (14.21) e (14.23) si ottiene

$$\begin{cases} 2x' = (a + b)x - (a - b)ct \\ 2ct' = -(a - b)x + (a + b)ct . \end{cases} \quad (14.24)$$

Da cui

$$\begin{cases} x' = \gamma x - \delta ct \\ ct' = \gamma ct - \delta x , \end{cases} \quad (14.25)$$

ove si è posto  $\gamma = (a + b)/2$  e  $\delta = (a - b)/2$ . Rimangono ancora da determinare le costanti  $\gamma$  e  $\delta$ . Si osservi che in un qualunque istante  $t$ , l'origine del sistema  $K'$  si trova nella posizione  $x' = 0$  e rispetto al sistema  $K$  tale origine si trova nella posizione  $x = Vt$ . Pertanto la trasformazione (14.25) deve collegare  $x$  e  $x'$  in modo tale che quando  $x'$  è zero  $x$  sia uguale a  $Vt$ . Quindi dalla prima delle (14.25) si trova

$$0 = \gamma Vt - \delta ct \quad \longrightarrow \quad \frac{\delta}{\gamma} = \frac{V}{c} . \quad (14.26)$$

Inoltre, come osservato nella precedente osservazione 1, la lunghezza misurata in  $K$  di un vagone fermo in  $K'$  deve essere uguale alla lunghezza misurata in  $K'$  dello stesso vagone fermo in  $K$ : in entrambi i casi, infatti, si tratta di misurare un vagone in moto con velocità  $V$ . Di seguito si analizzano separatamente i due casi.

1. Si comincia col misurare in  $K$  la lunghezza del vagone fermo in  $K'$ . In un certo istante, per esempio l'istante  $t = 0$ , si segnano le posizioni  $x_A$  e  $x_B$  delle estremità del vagone. Pertanto in  $K$  la lunghezza del vagone in moto con velocità  $V$  risulta

$$l_V = x_B - x_A . \quad (14.27)$$

Ai punti  $x_A$  e  $x_B$ , all'istante  $t = 0$ , corrispondono in  $K'$  i punti  $x'_A$  e  $x'_B$  definiti da

$$x'_B = \gamma x_B \quad \text{e} \quad x'_A = \gamma x_A , \quad (14.28)$$

pertanto in  $K'$ , sistema in cui il vagone è fermo, esso misura

$$l_0 = x'_B - x'_A = \gamma(x_B - x_A) = \gamma l_V . \quad (14.29)$$

2. Ora si rovesci la situazione. Si supponga di misurare dal sistema  $K'$  un vagone fermo nel sistema  $K$ . In un certo istante, per esempio  $t' = 0$ , si segnino le posizioni  $x'_A$  e  $x'_B$  corrispondenti agli estremi del vagone. Quindi in  $K$  la lunghezza del vagone in moto con velocità  $V$  risulta

$$l_V = x'_B - x'_A . \quad (14.30)$$

Dalla seconda delle (14.25), per  $t' = 0$ , si ricava  $t = \frac{\delta}{\gamma c} x$  che, sostituito nella prima delle (14.25), dà

$$x' = \gamma x - \frac{\delta^2}{\gamma} x = \gamma \left(1 - \frac{\delta^2}{\gamma^2}\right) x = \gamma \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right) x, \quad (14.31)$$

ove si è fatto uso dell'equazione (14.26). Quindi se le posizioni delle estremità del vagone misurate in  $K'$  sono  $x'_A$  e  $x'_B$ , rispetto a  $K$ , per le equazioni appena trovate, esse sono

$$x'_B = \gamma \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right) x_B \quad \text{e} \quad x'_A = \gamma \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right) x_A. \quad (14.32)$$

Quindi in  $K'$ , sistema in cui il vagone è in moto con velocità  $V$ , esso misura

$$l_V = x'_B - x'_A = \gamma \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right) (x_B - x_A) = \gamma \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right) l_0. \quad (14.33)$$

Come visto sopra, per il principio di relatività il caso **a** e il caso **b** devono dare lo stesso valore per  $l_V$ , quindi, confrontando le equazioni (14.29) e (14.33), si ottiene

$$\frac{1}{\gamma} l_0 = \gamma \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right) l_0, \quad (14.34)$$

da cui si ottiene facilmente

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad (14.35)$$

e quindi, dall'equazione (14.29), o dalla (14.33), si ottiene

$$l_V = \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} l_0. \quad (14.36)$$

Analogamente, per determinare  $\gamma$ , è possibile ragionare sugli intervalli di tempo. L'intervallo di tempo che separa due battiti consecutivi di un orologio in moto con velocità  $V$  (che viene indicato da  $\Delta t_V$ ) deve essere, per il principio di relatività lo stesso qualunque sia il sistema di riferimento da cui viene misurato. Quindi l'intervallo di tempo, misurato da  $K$ , che separa due battiti consecutivi di un orologio che si trova in quiete nell'origine di  $K'$ , deve essere uguale all'intervallo di tempo, misurato da  $K'$ , che separa due battiti consecutivi di un orologio, identico al precedente, che si trovi in quiete nell'origine di  $K$ : in entrambi i casi infatti l'orologio muove con velocità  $V$ . Si vedano separatamente i due casi.

1. Siano  $t_1$  e  $t_2$  gli istanti, misurati in  $K$ , in cui avvengono due battiti consecutivi dell'orologio posto nell'origine di  $K'$ ; vale quindi

$$\Delta t_V = t_2 - t_1. \quad (14.37)$$

Poiché  $x' = 0$ , dalla prima delle (14.25) si ricava  $x = \frac{\delta}{\gamma} ct$  che sostituita nella seconda delle (14.25) dà

$$ct' = \gamma ct - \frac{\delta^2}{\gamma} ct \quad \longrightarrow \quad t' = \gamma \left(1 - \frac{\delta^2}{\gamma^2}\right) t = \gamma \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right) t, \quad (14.38)$$

e quindi

$$\Delta t_V = t_2 - t_1 = \frac{1}{\gamma \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)} (t'_2 - t'_1) = \frac{1}{\gamma \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)} \Delta t_0, \quad (14.39)$$

dove  $\Delta t_0 = (t'_2 - t'_1)$  è il medesimo intervallo di tempo misurato dal sistema  $K'$  in cui l'orologio è fermo.

2. Rovesciando la situazione, siano  $t'_1$  e  $t'_2$  gli istanti, misurati da  $K'$  in cui avvengono due battiti consecutivi di un orologio identico al precedente collocato nell'origine di  $K$ . Per il principio di relatività, come detto, l'intervallo di tempo fra  $t_1$  e  $t_2$  deve valere ancora  $\Delta t_v$ , quindi, poiché  $x = 0$ , dalla seconda delle (14.25) si ottiene

$$t' = \gamma t, \tag{14.40}$$

quindi

$$\Delta t_v = t'_2 - t'_1 = \gamma(t_2 - t_1) = \gamma \Delta t_0. \tag{14.41}$$

dove ho ancora indicato con  $\Delta t_0 = t_2 - t_1$  il medesimo intervallo di tempo misurato dal sistema  $K$  in cui l'orologio è fermo.

Ora confrontando (14.39) e (14.41), si ottiene ancora l'equazione (14.35), quindi, in particolare,

$$\Delta t_v = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \Delta t_0. \tag{14.42}$$

Mettendo insieme le equazioni (14.25), (14.26), e (14.35) si trova:

$$x' = \frac{x - Vt}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad t' = \frac{t - \frac{Vx}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \tag{14.43}$$

Le trasformazioni delle altre due coordinate spaziali  $y$  e  $z$ , che non sono cruciali qui, ma serviranno nel seguito, si ottengono semplicemente osservando che la velocità relativa  $V$  non ha componenti lungo  $y$  e  $z$  e quindi si può ripercorrere tutta la dimostrazione fatta ponendo  $V = 0$ . In tal modo si ottengono le trasformazioni

$$\boxed{x' = \frac{x - Vt}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = \frac{t - \frac{Vx}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}. \tag{14.44}$$

Le trasformazioni così determinate, sono dette **trasformazioni di Lorentz**<sup>5</sup>. Sono le trasformazioni corrette da sostituire alle equazioni (14.1).

**Osservazioni**

1. Nel limite non-relativistico  $V/c$  e  $Vx/c^2$  sono trascurabili, quindi, in tale limite, si ritrovano le equazioni (14.1) e (14.6).
2. È interessante ricavare le trasformazioni inverse delle (14.44): è chiaro che è possibile farlo con della semplice algebra; ma, ancora più semplicemente, si osservi che per trovare le relazioni inverse basta scambiare i ruoli di  $K$  e  $K'$ , infatti se nel sistema in cui  $K$  è fermo  $K'$  si muove con velocità  $V$ , è chiaro che nel sistema in cui  $K'$  è fermo è  $K$  a muoversi con velocità  $-V$ , quindi le relazioni inverse sono analoghe alle (14.44) ma con  $-V$  al posto di  $V$ :

$$x' = \frac{x + Vt}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = \frac{t + \frac{Vx}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}. \tag{14.45}$$

<sup>5</sup> Hendrick Antoon Lorentz (1853-1928), fisico olandese.

#### 14.4 CONTRAZIONE DELLE LUNGHEZZE E DILATAZIONE DEI TEMPI.

Si consideri ora l'equazione (14.36). Essa dice la misura della lunghezza del vagone in  $K$  è diversa dalla misura dello stesso vagone effettuata in  $K'$  e, in particolare, essendo  $\sqrt{1 - V^2/c^2} < 1$ , risulta che la misura del vagone in movimento è minore della misura del vagone fermo. Si badi bene. Poiché misurando il vagone in movimento si ottiene un valore minore, si deve concludere, seguendo il nostro criterio empirico di realtà, che il vagone in movimento è più corto. Si dice **lunghezza propria** la lunghezza  $l_0$  di un oggetto nel sistema di riferimento in cui esso è in quiete.

Analogamente l'equazione (14.42) dice che la misura di un intervallo di tempo in  $K$  è diversa dalla misura del medesimo intervallo di tempo in  $K'$  e, in particolare, risulta che un orologio in moto batte più lentamente dello stesso orologio fermo. Si badi bene. Poiché dal nostro punto di vista empirico il tempo è *definito* mediante i battiti di un orologio, se ne conclude che il tempo considerato da un sistema in moto *passa più lentamente*. Si dice **tempo proprio** il tempo misurato da un orologio in quiete. Si possono quindi riassumere i risultati ottenuti sulla contrazione delle lunghezze in moto e sulla dilatazione dei tempi misurati mediante orologi in moto mediante le equazioni

$$\Delta x_v = \frac{\Delta x_0}{\gamma} \quad \text{e} \quad \Delta t_v = \gamma \Delta t_0. \quad (14.46)$$

##### Osservazioni

1. Si osservi che nel limite non-relativistico  $\gamma \simeq 1$  e quindi non vi è né contrazione delle lunghezze, né dilatazione dei tempi, in accordo con la meccanica newtoniana.

#### 14.5 TRASFORMAZIONE DELLE VELOCITÀ.

Si veda ora, a partire dalle trasformazioni di Lorentz (14.44), qual è la corretta relazione fra le velocità misurate in due sistemi di riferimento in moto relativo, da sostituire all'equazione (14.5). Si considerino quindi i soliti sistemi di riferimento  $K$  e  $K'$  in moto relativo con velocità  $V$ . E si supponga che entrambi i sistemi di riferimento misurino il moto di un punto  $P$ . Dalle (14.44) è facile trovare che le variazioni di spazio e di tempo nei due sistemi di riferimento si corrispondono mediante le equazioni

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta x' = \gamma (\Delta x - V \Delta t) \\ \Delta y' = \Delta y \\ \Delta z' = \Delta z \\ \Delta t' = \gamma \left( \Delta t - \frac{V \Delta x}{c^2} \right) \end{array} \right. \quad \longrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} v'_x = \frac{\Delta x'}{\Delta t'} = \frac{\Delta x - V \Delta t}{\Delta t - \frac{V \Delta x}{c^2}} \\ v'_y = \frac{\Delta y'}{\Delta t'} = \frac{\Delta y}{\gamma \left( \Delta t - \frac{V \Delta x}{c^2} \right)} \\ v'_z = \frac{\Delta z'}{\Delta t'} = \frac{\Delta z}{\gamma \left( \Delta t - \frac{V \Delta x}{c^2} \right)} \end{array} \right. \quad (14.47)$$

Pertanto le corrette trasformazioni della velocità sono date da

$$\boxed{v'_x = \frac{v_x - V}{1 - \frac{V v_x}{c^2}} \quad , \quad v'_y = \frac{v_y}{\gamma \left( 1 - \frac{V v_x}{c^2} \right)} \quad , \quad v'_z = \frac{v_z}{\gamma \left( 1 - \frac{V v_x}{c^2} \right)} \quad ,} \quad (14.48)$$

dove l'ultimo passaggio è stato fatto dividendo numeratori e denominatori per  $\Delta t$  e riconoscendo che

$$v_x = \frac{\Delta x}{\Delta t} \quad , \quad v_y = \frac{\Delta y}{\Delta t} \quad , \quad v_z = \frac{\Delta z}{\Delta t}. \quad (14.49)$$

**Osservazioni**

1. Nel limite non-relativistico, in cui le velocità in gioco sono piccole rispetto a  $c$ , i denominatori delle tre (14.48) sono approssimabili a 1; in tale limite pertanto si ottiene la composizione newtoniana delle velocità, equazione (14.5).
2. Se il corpo in movimento con velocità  $v$  è un raggio di luce propagantesi lungo l'asse  $x$ , e quindi  $v_x = c$ ,  $v_y = v_z = 0$ , nel sistema di riferimento  $K'$  si trova

$$v' = v'_x = \frac{c - V}{1 - \frac{cV}{c^2}} = \frac{c - V}{1 - \frac{V}{c}} = \frac{c - V}{\frac{c - V}{c}} = c, \tag{14.50}$$

come richiesto dal postulato dell'indipendenza della velocità della luce dal sistema di riferimento.

3. Le inverse delle (14.48) si ottengono, come già fatto per invertire le trasformazioni (14.44), semplicemente scambiando i ruoli di  $K$  e  $K'$  e il segno di  $V$ ; si ottiene quindi

$$v_x = \frac{v'_x + V}{1 + \frac{Vv'_x}{c^2}}, \quad v_y = \frac{v'_y}{\gamma \left(1 + \frac{Vv'_x}{c^2}\right)}, \quad v_z = \frac{v'_z}{\gamma \left(1 + \frac{Vv'_x}{c^2}\right)}. \tag{14.51}$$

**14.6 EFFETTO DOPPLER RELATIVISTICO.**

Prima di passare oltre, è il caso di analizzare qui che ne è dell'effetto Doppler alla luce della relatività. In effetti, l'analisi dell'effetto Doppler fatta in precedenza per le onde che si propagano in un mezzo aveva dato esiti diversi a seconda che il problema fosse analizzato nel sistema di riferimento della sorgente o in quello dell'osservatore; la differenza, come si ricorderà, emerge perché nei due sistemi di riferimento vengono descritti due fenomeni diversi: nel sistema dell'osservatore il mezzo in cui si propagano le onde (per esempio l'aria, nel caso di onde sonore) è fermo, mentre nel sistema di riferimento della sorgente il mezzo è in moto. Quindi nei due casi si descrive l'effetto Doppler di un treno di onde in moto in un mezzo fermo od in un mezzo in movimento, ottenendo risultati diversi.

Il caso delle onde luminose che interessa qui è, sotto questo aspetto, radicalmente diverso. Infatti le onde luminose si propagano nel vuoto; quindi cambiando sistema di riferimento il fenomeno fisico che viene descritto non cambia. Si tratta sempre di un'onda luminosa in moto nel vuoto con velocità costante  $c$ . Ci si aspetta quindi che, come richiesto dal principio di relatività, la descrizione nel sistema in cui l'osservatore è in quiete ed in quello in cui la sorgente di luce è in quiete diano risultati identici.

**A.** Si cominci a considerare il caso in cui la sorgente  $S$  delle onde luminose sia in moto con velocità  $V$  rispetto all'osservatore  $O$ ; convengo di indicare con l'apice le quantità misurate da nel sistema di riferimento di  $S$ , qui sistema in moto. Sia pertanto  $T'_s$  il periodo di emissione di  $S$ . Questo tempo, visto da  $O$ , è dilatato in

$$T_s = \frac{T'_s}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}. \tag{14.52}$$

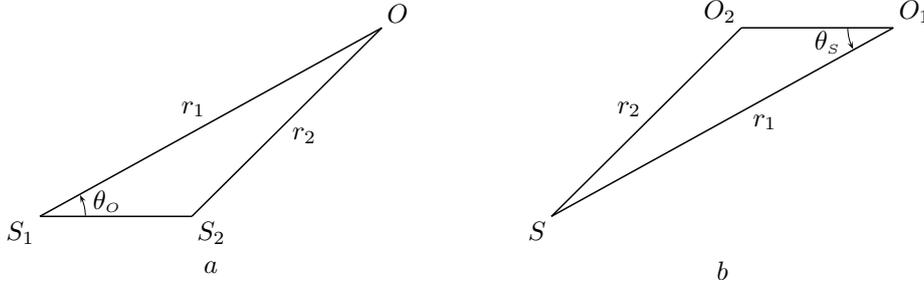
Si veda ora cosa misura  $O$ . Sia  $t = 0$  l'istante in cui  $S$  emette, in  $S_1$ , il primo fronte d'onda; esso sia ricevuto da  $O$  all'istante  $t_1 = r_1/c$ . Dopo un tempo  $T_s$ , in  $S_2$ ,  $S$  emette il fronte d'onda successivo che viene ricevuto da  $O$  all'istante  $t_2 = T_s + r_2/c$ . Quindi il periodo dell'onda luminosa misurato da  $O$  è

$$T_o = t_2 - t_1 = T_s - \frac{r_1 - r_2}{c} = T_s - \frac{V}{c} T_s \cos \theta_o = \left(1 - \frac{V}{c} \cos \theta_o\right) T_s, \tag{14.53}$$

ove si è fatto uso dell'approssimazione  $r_1 - r_2 \simeq S_1 S_2 \cos \theta_o = V T_s \cos \theta_o$ . Quindi si può scrivere

$$T_o = \frac{1 - \frac{V}{c} \cos \theta_o}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} T'_s . \quad (14.54)$$

Si noti che sia  $T_o$  che  $T'_s$  sono tempi propri.



**Figura 14.5:** Effetto Doppler relativistico; a: con sorgente in moto, b: con osservatore in moto.

Si osservi che se  $S$  si muove verso  $O$ , cioè se  $\theta_o = 0$  si ottiene

$$T_o = \frac{1 - \frac{V}{c}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} T'_s = \sqrt{\frac{1 - \frac{V}{c}}{1 + \frac{V}{c}}} T'_s . \quad (14.55)$$

**B.** Si consideri ora il sistema di riferimento in cui la sorgente  $S$  è ferma e l'osservatore  $O$  è in moto con velocità di modulo  $V$ . Come sopra, indico con l'apice le quantità misurate nel sistema in moto, qui  $O$ . All'istante 0 la sorgente  $S$  emette il primo fronte d'onda che viene rilevato dall'osservatore in  $O_1$  all'istante  $t_1 = r_1/c$ ; dopo un tempo  $T_s$  la sorgente emette il successivo fronte d'onda che viene rilevato dall'osservatore in  $O_2$  all'istante  $t_2 = T_s + r_2/c$ ; quindi nel sistema di riferimento  $S$  il periodo rilevato da  $O$  è

$$T_o = t_2 - t_1 = T_s - \frac{r_1 - r_2}{c} = T_s - \frac{V}{c} T_o \cos \theta_s , \quad (14.56)$$

da cui

$$T_o \left( 1 + \frac{V}{c} \cos \theta_s \right) = t_s , \quad (14.57)$$

ove si è fatto ancora uso dell'approssimazione  $r_1 - r_2 \simeq O_1 O_2 \cos \theta_s = v_o T_o \cos \theta_s$ . Si osservi che  $T_o$  è misurato nel sistema di  $S$ ; se riportato al sistema  $O$  si ha la contrazione

$$T'_o = \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} T_o = \frac{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{1 + \frac{V}{c} \cos \theta_s} T_s . \quad (14.58)$$

Anche in questo caso, se  $O$  si muove verso  $S$ , cioè se  $\theta = 0$ , si ottiene

$$T'_o = \frac{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{1 + \frac{V}{c}} T_s = \sqrt{\frac{1 - \frac{V}{c}}{1 + \frac{V}{c}}} T_s . \quad (14.59)$$

Confrontando le equazioni (14.55) e (14.59) si vede che le due espressioni coincidono; il periodo osservato è minore del periodo emesso. Nel caso  $S$  e  $O$  si allontanino occorre cambiare in tutte le equazioni precedenti il segno di  $V$ ; pertanto si osserva un periodo maggiore di quello emesso.

Un'applicazione importante dell'effetto Doppler relativistico è il **red-shift**; a causa dell'espansione dell'universo le stelle si allontanano le une dalle altre con velocità proporzionale alla loro distanza; quindi sulla Terra si riceve la luce proveniente da stelle che si allontanano dal Sistema Solare a velocità che possono essere anche considerevoli; il periodo delle onde ricevute è quindi maggiore del periodo emesso. Ragionando in termini di frequenza, come è costume fare in astronomia, la frequenza osservata è minore della frequenza emessa secondo la formula

$$\nu_o = \sqrt{\frac{1 - V/c}{1 + V/c}} \nu_e . \quad (14.60)$$

Misurando il red-shift delle stelle, con tecniche spettroscopiche, è possibile risalire alla loro velocità e quindi alla loro distanza.

Per completezza qui di seguito si mostra che anche le (14.54) e (14.58) coincidono; poiché si tratta di un calcolo un po' noioso, benché assai istruttivo, viene proposto in carattere tipografico minore ad indicare al lettore non interessato che può passare oltre.

Si noti che è necessario trovare come trasformano gli angoli per trasformazioni di Lorentz; si osservi infatti che in (14.54) il periodo misurato da  $O$  è espresso in funzione del coseno dell'angolo  $\theta_o$  quindi misurato da  $O$ , mentre in (14.58) il periodo misurato da  $O$  è espresso in funzione del coseno dell'angolo misurato da  $S$ . Per trovare la trasformazione degli angoli uso la prima delle (14.48) che, posto  $v'_x = v' \cos \theta$  e  $v_x = v \cos \theta$ , posso scrivere nella forma

$$v' \cos \theta' = \frac{v \cos \theta + V}{1 + \frac{vV}{c^2} \cos \theta} . \quad (14.61)$$

Se si considerano raggi luminosi  $v = v' = c$  e quindi

$$c \cos \theta' = \frac{c \cos \theta + V}{1 + \frac{V}{c} \cos \theta} \quad \rightarrow \quad \cos \theta' = \frac{\cos \theta + \frac{V}{c}}{1 + \frac{V}{c} \cos \theta} . \quad (14.62)$$

Nel caso presente, è possibile identificare  $\theta = \theta_s$ ,  $\theta' = \theta_o$ , ottenendo

$$\cos \theta_o = \frac{\cos \theta_s + \frac{V}{c}}{1 + \frac{V}{c} \cos \theta_o} , \quad (14.63)$$

da cui si può ricavare

$$\cos \theta_o + \frac{V}{c} \cos \theta_s \cos \theta_o = \cos \theta_s + \frac{V}{c} \quad \rightarrow \quad \cos \theta_s \left( 1 - \frac{V}{c} \cos \theta_o \right) = \cos \theta_o - \frac{V}{c} \quad (14.64)$$

e quindi

$$\cos \theta_s = \frac{\cos \theta_o - \frac{V}{c}}{1 - \frac{V}{c} \cos \theta_o} . \quad (14.65)$$

Questa, sostituita nella (14.58), dà

$$T'_o = \frac{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{1 + \frac{\frac{V}{c} \cos \theta_o - \frac{V^2}{c^2}}{1 - \frac{V}{c} \cos \theta_o}} T_s = \frac{1 - \frac{V}{c} \cos \theta_o \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{1 - \frac{V}{c} \cos \theta_o + \frac{V}{c} \cos \theta_o - \frac{V^2}{c^2}} T_s = \frac{1 - \frac{V}{c} \cos \theta_o}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} T_s , \quad (14.66)$$

che è identica alla (14.54).

## 14.7 INVARIANZA DELL'INTERVALLO.

Nella fisica newtoniana la lunghezza di un corpo e la distanza percorsa da un corpo in movimento sono grandezze *invarianti*. Con ciò si intende dire che sono esattamente le stesse in ogni sistema di riferimento. Volendo dare a questa osservazione un chiaro significato matematico si consideri che, se un corpo si sposta da un punto  $P_1$  ad un punto  $P_2$ , il quadrato della distanza percorsa, misurato nel sistema di riferimento  $K$ , dato da

$$(\Delta \mathbf{r})^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2, \quad (14.67)$$

è invariante per le trasformazioni (14.1)<sup>6</sup>.

Invece si è visto che, in relatività la lunghezza e la distanza non sono grandezze invarianti ma sono diverse a seconda della velocità del sistema di riferimento rispetto a cui viene eseguita la misura. In effetti è facile verificare che l'equazione (14.67) non è invariante per le trasformazioni (14.44).

In effetti le trasformazioni di Lorentz non coinvolgono solo lo spazio ma anche il tempo; quindi ci si aspetta che una 'distanza' invariante non possa essere semplicemente una distanza spaziale, ma una distanza 'spazio-temporale'. Si dice **evento**  $E$  un punto nello spazio e nel tempo; viene individuato quindi dalle coordinate  $E(t, x, y, z)$ . Si dice **intervallo** la distanza spazio-temporale fra due eventi definita come segue. Siano  $E_1$  ed  $E_2$  due eventi che, in  $K$ , abbiano coordinate  $(t_1, x_1, y_1, z_1)$  e  $(t_2, x_2, y_2, z_2)$  allora l'intervallo  $\Delta s$  che separa i due eventi è definito da

$$\Delta s^2 = c^2 \Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2. \quad (14.68)$$

Si dimostra ora che questa quantità è invariante, cioè è la stessa anche nel generico sistema di riferimento  $K'$  in moto rispetto a  $K$  con la generica velocità  $V$ . Per mostrare ciò basta applicare la prima delle (14.47) a  $\Delta s'^2$ :

$$\begin{aligned} \Delta s'^2 &= c^2 \Delta t'^2 - \Delta x'^2 - \Delta y'^2 - \Delta z'^2 = \\ &= c^2 \gamma^2 \left( \Delta t - \frac{V}{c^2} \Delta x \right)^2 - \gamma^2 (\Delta x - V \Delta t)^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2 = \\ &= \gamma^2 \left( c^2 \Delta t^2 - 2V \Delta t \Delta x + \frac{V^2}{c^2} \Delta x^2 - \Delta x^2 + 2V \Delta x \Delta t - V^2 \Delta t^2 \right) - \Delta y^2 - \Delta z^2 = \quad (14.69) \\ &= \gamma^2 \left[ \left( 1 - \frac{V^2}{c^2} \right) c^2 \Delta t^2 - \left( 1 - \frac{V^2}{c^2} \right) \Delta x^2 \right] - \Delta y^2 - \Delta z^2 = \\ &= c^2 \Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2 = \Delta s^2, \end{aligned}$$

dove si è utilizzato il fatto che  $\gamma^2(1 - V^2/c^2) = 1$ . Per capire bene il significato di questo risultato, si consideri, per semplicità, il caso in cui l'evento  $E_1$  avvenga nell'origine e all'istante  $t_1 = 0$  e che l'evento  $E_2$  avvenga in un qualunque punto dell'asse  $x$  cosicché  $\Delta y = \Delta z = 0$ ; allora l'intervallo fra  $E_1$  ed  $E_2$  assume la forma semplice

$$\Delta s^2 = c^2 t^2 - x^2. \quad (14.70)$$

Siccome  $\Delta s$  assume lo stesso valore in ogni sistema di riferimento, qualunque sia il valore della velocità  $V$ , la precedente equazione si può scrivere come

$$c^2 t^2 - x^2 = k, \quad (14.71)$$

ove  $k$  è una costante. L'equazione così ottenuta può essere rappresentata su un piano cartesiano avente la grandezza  $x$  sull'asse delle ascisse e la grandezza  $t$  sull'asse delle ordinate. In tal caso il grafico dell'equazione (14.71) è una iperbole equilatera avente per asintoti le rette

$$ct = \pm x; \quad (14.72)$$

al variare del sistema di riferimento  $K'$  che osserva l'evento  $E_2$  (cioè al variare del valore della velocità  $V$ ) il punto che lo descrive si muove su uno dei due rami dell'iperbole. A questo punto,

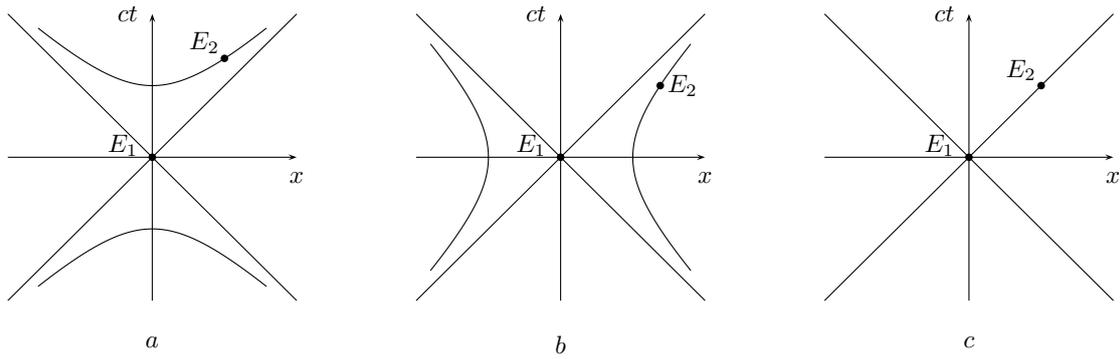


Figura 14.6: Intervalli di tipo tempo, spazio, luce.

ricordando che nelle nostre convenzioni  $E_1$  si trova nell'origine, si devono discutere tre casi, corrispondenti a tre tipi di intervallo.

**A. Intervallo di tipo tempo.**

In questo caso la costante  $k$  è positiva, i due rami dell'iperbole si trovano nella parte superiore ed inferiore del piano cartesiano (si veda la figura 14.6a). I punti del ramo superiore hanno  $t > 0$  quindi corrispondono ad eventi che avvengono *dopo*  $E_1$ , mentre i punti del ramo inferiore hanno  $t < 0$  quindi corrispondono ad eventi che avvengono *prima* di  $E_1$ . Si osservi che esiste un sistema di riferimento in cui  $E_1$  ed  $E_2$  hanno entrambi ascissa nulla e diversa ordinata; i due eventi avvengono quindi nello stesso luogo in due istanti diversi, in tale riferimento i due eventi sono separati solamente da un intervallo temporale; viceversa non esiste alcun sistema di riferimento in cui i due eventi sono simultanei, cioè avvengono allo stesso istante (stessa ordinata) ed è impossibile passare da un evento che avvenga nel passato ad un evento che avvenga nel futuro.

**B. Intervallo di tipo spazio.**

In questo caso la costante  $k$  è negativa, i due rami dell'iperbole si trovano nella parte destra e sinistra del piano cartesiano (si veda la figura 14.6b). Si noti che esistono sistemi di riferimento in cui  $E_2$  avviene prima di  $E_1$  ed altri sistemi di riferimento in cui avviene dopo; pertanto non ha più senso affermare che i due eventi stiano in una qualche successione temporale: tale successione, infatti, non è indipendente dal moto dell'osservatore. Esiste un sistema di riferimento in cui i due eventi accadono nello stesso istante in due luoghi diversi e quindi i due eventi sono separati solamente da una distanza spaziale.

**C. Intervallo di tipo luce.**

In questo caso la costante  $k$  è nulla, l'iperbole degenera nei suoi due asintoti per cui vale la relazione (si veda la figura 14.6c)

$$x = \pm ct, \tag{14.73}$$

quindi in questo caso gli eventi  $E_1$  ed  $E_2$  sono collegati da un segnale che viaggia alla velocità della luce, ed è così in ogni sistema di riferimento.

**Osservazioni**

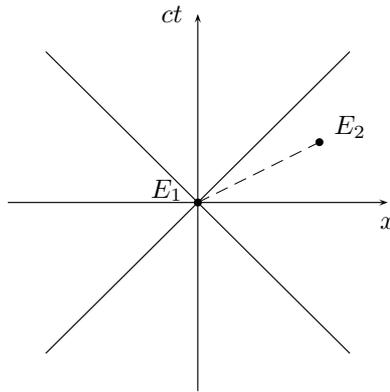
1. Si supponga che  $E_2$  sia separato da  $E_1$  da un intervallo di tipo spazio, vale allora

$$c^2t^2 - x^2 < 0 \quad \longrightarrow \quad c^2 < \frac{x^2}{t^2} \quad \longrightarrow \quad c^2 < v^2; \tag{14.74}$$

quindi per collegare i due eventi è necessario inviare un segnale a una velocità maggiore di quella della luce, rappresentato in figura 14.7 dalla linea tratteggiata.

Ma esistono sistemi di riferimento in cui  $E_2$  è nel passato di  $E_1$ ; quindi se fosse possibile

<sup>6</sup> Il lettore studioso ne faccia una verifica col calcolo.



**Figura 14.7:** Un intervallo di tipo spazio.

mandare segnali a velocità superiore a quella della luce si potrebbe comunicare con il passato. In questo modo si violerebbe il principio di causalità potendo influenzare una cosa già avvenuta. Ciò è manifestamente assurdo, quindi non è possibile inviare segnali ad una velocità maggiore di quella della luce.

2. Il fatto che non sia possibile inviare segnale a velocità maggiore di  $c$  mette in crisi il modello di **corpo rigido** della meccanica classica. In un corpo rigido infatti si suppone che modificazioni di posizione di un'estremità si manifestino istantaneamente in tutto il corpo; cioè se una forza comincia ad agire ad un'estremità del corpo rigido, l'altra estremità comincia a muoversi istantaneamente; questo consentirebbe di inviare segnali istantaneamente e quindi è impossibile. Rinunciare al corpo rigido, in particolare mette in crisi le basi della geometria euclidea, che è costruita sul concetto di **congruenza** e quindi sulla possibilità di confronto fra enti geometrici mediante movimenti rigidi.
3. L'invarianza dell'intervallo può essere dedotta immediatamente dai due postulati fondamentali della relatività e dai postulati di omogeneità ed isotropia dello spazio. Poi, per mezzo dell'invarianza dell'intervallo, è possibile dedurre le trasformazioni di Lorentz, la contrazione delle lunghezze e la dilatazione dei tempi<sup>7</sup>.

## 14.8 SEGNALI SUPERLUMINALI E INVERSIONI TEMPORALI.

Nel caso, per assurdo, fosse possibile inviare segnali a velocità maggiori di  $c$  si avrebbero delle conseguenze fisiche paradossali. Qui se ne vede uno.

Si supponga che  $A$  e  $B$  siano due eventi che nel sistema di riferimento  $K$  avvengono negli istanti  $t_A$  e  $t_B$  nelle due diverse posizioni  $x_A$  e  $x_B$  dell'asse  $x$ ; si supponga poi che i due eventi siano collegati tramite un segnale, inviato da  $A$ , che in  $K$ , viaggia a velocità  $u > c$ ; allora il tempo impiegato dal segnale ad andare da  $A$  a  $B$  in  $K$  è

$$t_B - t_A = \frac{x_B - x_A}{u} . \quad (14.75)$$

Rispetto ad un diverso sistema di riferimento  $K'$  in moto con velocità  $V$  rispetto a  $K$  l'intervallo di tempo si trova utilizzando le trasformazioni di Lorentz per i tempi (14.44):

$$t'_B - t'_A = \frac{t_B - \frac{V}{c^2}x_B}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} - \frac{t_A - \frac{V}{c^2}x_A}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} = \frac{t_B - t_A - \frac{V}{c^2}(x_B - x_A)}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} = \frac{t_B - t_A - \frac{V}{c^2}u(t_B - t_A)}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} ; \quad (14.76)$$

<sup>7</sup> Un testo che ha questo approccio è L.D. Landau, E.M. Lifšits, *Teoria dei campi*, Editori Riuniti.

quindi

$$t'_B - t'_A = \frac{1 - \frac{V}{c^2}u}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}(t_B - t_A) = \frac{c^2 - Vu}{c^2\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}(t_B - t_A). \quad (14.77)$$

Ora, se  $u > c$ , esiste un sistema di riferimento  $K'$  per quale, benché sia  $V < c$  vale  $uV > c^2$ ; per un tale riferimento il numeratore della precedente equazione è negativo:  $c^2 - Vu < 0$  quindi, essendo il denominatore positivo, i due intervalli temporali hanno segno opposto:

$$t_B - t_A > 0 \quad \longrightarrow \quad t'_B - t'_A < 0; \quad (14.78)$$

quindi cambiando sistema di riferimento si può invertire l'ordine temporale di eventi collegati da un segnale; in altre parole in  $K$   $A$  invia il segnale nel futuro, mentre in  $K'$  lo invia nel passato, violando il principio di causalità.

## 14.9 QUADRIVETTORI E QUADRIVELOCITÀ.

In generale, si definisce **quadrivettore**  $A_i$  l'insieme di quattro grandezze  $A_0, A_1, A_2, A_3$  che, per trasformazioni del sistema di riferimento in cui (come discusso nelle sezioni precedenti) il nuovo sistema  $K'$  si muove rispetto a  $K$  lungo l'asse  $x$  con velocità  $V$ , si trasformano secondo le seguenti leggi, che si dicono *trasformazioni di Lorentz per quadrivettori*:

$$\boxed{A'_0 = \frac{A_0 - \frac{VA_1}{c}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad A'_1 = \frac{A_1 - \frac{VA_0}{c}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad A'_2 = A_2, \quad A'_3 = A_3.} \quad (14.79)$$

Questa definizione giustifica i nomi dati alle quattro componenti del quadrivettore:  $A_0$  si trasforma come  $ct$  ed è pertanto detto componente temporale del quadrivettore  $A_i$ ;  $A_1, A_2$  ed  $A_3$  si trasformano rispettivamente come  $x, y$  e  $z$  e quindi sono dette componenti spaziali del quadrivettore  $A_i$  e vengono sovente denotate collettivamente con il simbolo  $\mathbf{A} = (A_1, A_2, A_3)$ . Le quattro componenti  $(ct, x, y, z)$ , che definiscono la collocazione spaziotemporale di un evento, costituiscono un quadrivettore: il *quadrivettore posizione* e denotato con il simbolo  $x_i$ .

Il quadrato di un quadrivettore è definito come segue

$$A_i^2 = A_0^2 - A_1^2 - A_2^2 - A_3^2. \quad (14.80)$$

Si osservi che l'intervallo fra due eventi spaziotemporali può essere espresso in termini del quadrato del quadrivettore che li unisce:

$$\Delta s^2 = \Delta x_i^2 = c^2(t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2. \quad (14.81)$$

Dalla definizione data risulta che il quadrato di **ogni** quadrivettore è invariante per trasformazioni del sistema di coordinate. La dimostrazione di questo fatto è analoga a quella dell'invarianza dell'intervallo, si veda l'equazione (14.69):

$$\begin{aligned} A_i'^2 &= A_0'^2 - \mathbf{A}'^2 = \gamma^2 \left( A_0 - \frac{V}{c}A_1 \right)^2 - \gamma^2 \left( A_1 - \frac{V}{c}A_0 \right)^2 - A_2^2 - A_3^2 = \\ &= \gamma^2 \left( A_0^2 - 2\frac{V}{c}A_0A_1 + \frac{V^2}{c^2}A_1^2 - A_1^2 + 2\frac{V}{c}A_1A_0 - \frac{V^2}{c^2}A_0^2 \right) - A_2^2 - A_3^2 = \\ &= \gamma^2 \left( 1 - \frac{V^2}{c^2} \right) A_0^2 - \gamma^2 \left( 1 - \frac{V^2}{c^2} \right) A_1^2 - A_2^2 - A_3^2 = \\ &= A_0^2 - A_1^2 - A_2^2 - A_3^2 = A_i^2. \end{aligned} \quad (14.82)$$

Si è visto in precedenza che la velocità relativistica di una particella non è invariante. È possibile però definire una quadrivelocità, cioè una velocità che sia un quadrivettore e che quindi abbia il quadrato invariante, come segue.

$$u_i = \frac{\Delta x_i}{\Delta s}. \quad (14.83)$$

Si osservi che nella definizione della quadrivelocità è stato utilizzato, invece dell'intervallo di tempo  $\Delta t$ , l'intervallo invariante  $\Delta s$ , garantendo così la corretta trasformazione; infatti, si noti, il numeratore della (14.83) è un quadrivettore, mentre il denominatore è invariante: quindi  $u_i$  trasforma secondo le (14.79) e quindi è un quadrivettore.

Se ne vedano in dettaglio le componenti. Si cominci con l'osservare che vale

$$\Delta s = \sqrt{c^2 \Delta t^2 - \Delta \mathbf{x}^2} = c \Delta t \sqrt{1 - \frac{1}{c^2} \left( \frac{\Delta \mathbf{x}}{\Delta t} \right)^2} = c \Delta t \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}, \quad (14.84)$$

quindi

$$\begin{aligned} u_0 &= \frac{c \Delta t}{c \Delta t \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} & u_1 &= \frac{\Delta x}{c \Delta t \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{v_x}{c \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\ u_2 &= \frac{\Delta y}{c \Delta t \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{v_y}{c \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} & u_3 &= \frac{\Delta z}{c \Delta t \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{v_z}{c \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \end{aligned} \quad (14.85)$$

### Osservazioni

1.  $u_i$  è un quadrivettore adimensionale e può essere scritto in modo compatto nella forma

$$u_i = \left( \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \frac{\mathbf{v}}{c \sqrt{1 - v^2/c^2}} \right). \quad (14.86)$$

2. Visto lo stretto legame fra  $u_i$  e le componenti della velocità della particella pare adeguato la sua identificazione con la quadrivelocità.
3. Le quattro componenti di  $u_i$  non sono indipendenti ma sono legate dalla relazione

$$u_i^2 = u_i u_i = \frac{\Delta x_i \Delta x_i}{\Delta s^2} = \frac{\Delta s^2}{\Delta s^2} = 1. \quad (14.87)$$

4. Benché la quantità  $\sqrt{1 - v^2/c^2}$  assomigli molto all'inverso di  $\gamma$ , si tratta di una cosa completamente diversa; infatti dove qui compare la velocità  $v$  del corpo, in  $\gamma$  compare la velocità  $V$  del sistema  $K'$  rispetto al sistema  $K$ .

## 14.10 QUANTITÀ DI MOTO RELATIVISTICA ED ENERGIA RELATIVISTICA.

In questo paragrafo si cerca di individuare quale sia la forma della quantità di moto e dell'energia relativistica. Si comincia con la quantità di moto. Nella fisica newtoniana la quantità di moto di un corpo in moto, com'è noto, è proporzionale alla velocità e la costante di proporzionalità è la massa del corpo. Inoltre in un urto fra due corpi la quantità di moto totale si conserva. In relatività le cose non sono così semplici in quanto la quantità di moto newtoniana non si conserva in un urto. Si definisce quadriquantità di moto la quantità<sup>8</sup>

$$p_i = m c u_i. \quad (14.88)$$

<sup>8</sup> La costante  $c$  è qui necessaria per questioni dimensionali: si ricordi che  $u_i$  è adimensionale.

La componente spaziale di questo quadrivettore è

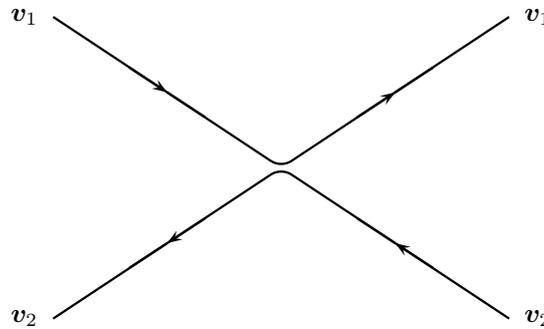
$$\mathbf{p} = \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \tag{14.89}$$

che nel limite non relativistico coincide con l'espressione classica.

Si ritiene opportuno ricavare l'espressione della quantità di moto relativistica a partire da richieste di tipo fisico e, in particolare, richiedendo la conservazione della quantità di moto; il lettore non interessato può passare oltre senza pregiudizio per la comprensione di quel che segue. Si supponga che la quantità di moto relativistica abbia la forma

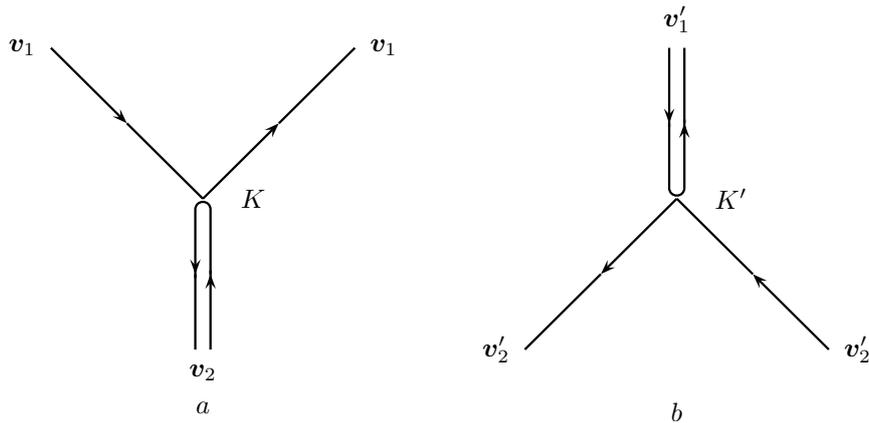
$$\mathbf{p} = m_v \mathbf{v} , \tag{14.90}$$

ove  $m_v$  è una funzione del modulo della velocità  $\mathbf{v}$  del corpo, ha le dimensioni di una massa e verrà determinata in modo tale che  $\mathbf{p}$  si conservi con l'ulteriore richiesta che nel limite non-relativistico si approssimi alla massa newtoniana<sup>9</sup>.



**Figura 14.8:** Urto elastico fra particelle identiche di uguale velocità.

Si consideri quindi l'urto fra due particelle uguali aventi rispettivamente velocità  $\mathbf{v}_1$  e  $\mathbf{v}_2$  uguali in modulo (si veda la figura 14.8).



**Figura 14.9:** L'urto nei due diversi sistemi di riferimento.

Si vuole studiare la conservazione della quantità di moto di questo urto nel sistema di riferimento  $K$  in cui la particella 2 ha solo componente della velocità lungo  $y$ ; in altre parole l'osservatore in  $K$ , si muove lungo l'asse delle  $x$  insieme alla particella 2 (si veda la figura 14.9a). In  $K$  le variazioni delle quantità di

<sup>9</sup> L'argomento che segue è preso da R.P. Feynman, R.B. Leighton, M. Sands, *La fisica di Feynman*, vol. 1, cap. 16, Zanichelli.

moto delle due particelle sono rispettivamente (si sta supponendo che, come di consuetudine, l'asse delle ascisse sia orientato verso destra e quello delle ordinate verso l'alto).

$$\begin{cases} \Delta p_{1x} = 0 \\ \Delta p_{1y} = 2m_{v_1} v_{1y} \end{cases} \quad \begin{cases} \Delta p_{2x} = 0 \\ \Delta p_{2y} = -2m_{v_2} v_{2y} = -2m_{v_{2y}} v_{2y} . \end{cases} \quad (14.91)$$

Quindi la componente  $x$  della quantità di moto è immediatamente conservata; la conservazione della componente  $y$  impone la relazione

$$\Delta p_{1y} + \Delta p_{2y} = 0 \quad \longrightarrow \quad m_{v_1} v_{1y} = m_{v_{2y}} v_{2y} . \quad (14.92)$$

Se si riuscisse a trovare una relazione che lega  $v_{1y}$  e  $v_{2y}$  sarebbe possibile determinare la forma della funzione  $m_v$ . A tale scopo ci si metta nel riferimento  $K'$  in cui è la particella 1 ad avere solo la componente  $y$  della velocità (si veda la figura 14.9b); si osservi che  $K$  si muove rispetto a  $K'$  con velocità  $V = -v_{1x}$ . Data la completa simmetria del problema, per il principio di relatività, la velocità della particella 1 in  $K'$  deve essere uguale alla velocità della particella 2 in  $K$ , cioè deve valere

$$v'_{1y} = v_{2y} . \quad (14.93)$$

La legge di trasformazione da  $K$  a  $K'$  per la componente  $y$  della velocità è data dalla seconda delle (14.51) che, per  $V = -v_{1x}$ , diventa

$$v_{1y} = \frac{v'_{1y} \sqrt{1 - \frac{v_{1x}^2}{c^2}}}{1 - \frac{v_{1x} v'_{1x}}{c^2}} , \quad (14.94)$$

ma  $v'_{1x} = 0$  quindi, usando la (14.93), si ottiene

$$v_{1y} = v'_{1y} \sqrt{1 - \frac{v_{1x}^2}{c^2}} = v_{2y} \sqrt{1 - \frac{v_{1x}^2}{c^2}} . \quad (14.95)$$

Sostituendo questo risultato nell'equazione (14.92), si trova

$$m_{v_1} v_{2y} \sqrt{1 - \frac{v_{1x}^2}{c^2}} = m_{v_{2y}} v_{2y} \quad \longrightarrow \quad m_{v_1} = \frac{m_{v_{2y}}}{\sqrt{1 - \frac{v_{1x}^2}{c^2}}} . \quad (14.96)$$

Come è stato detto sopra  $m_v$  deve coincidere con la massa newtoniana della particella nel limite non-relativistico, quindi, in particolare, per  $v = 0$ ; ora si osservi che valgono le seguenti implicazioni:

$$v_{2y} = 0 \quad \longrightarrow \quad v'_{1y} = 0 \quad \longrightarrow \quad v_{1y} = 0 \quad \longrightarrow \quad v_{1x} = v_1 , \quad (14.97)$$

quindi, sostituendo  $v_{2y} = 0$  e  $v_{1x} = v_1$ , l'equazione (14.96) diventa

$$m_{v_1} = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c^2}}} , \quad (14.98)$$

questa equazione vale qualunque sia il valore di  $v_1$ , cioè vale per una velocità generica  $v$ , quindi identificando  $m_0$  con la massa newtoniana non relativistica, cioè ponendo  $m_0 = m$ , si ottiene

$$m_v = \frac{m}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} . \quad (14.99)$$

che è proprio il termine che sostituita nella (14.90) dà la (14.89): Si noti che, ricordando l'equazione (14.84), si può riscrivere la quantità di moto relativistica nella forma

$$\mathbf{p} = \frac{m}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \frac{\Delta \mathbf{x}}{\Delta t} = mc \frac{\Delta \mathbf{x}}{\Delta s} . \quad (14.100)$$

Rimane l'esigenza di capire se sia possibile dare un senso alla componente temporale del quadrivettore  $p_i$ :

$$p_0 = mc u_0 = \frac{mc}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} . \quad (14.101)$$

Per capire il significato fisico di  $p_0$  si calcoli il limite non-relativistico. Si osservi che, usando la (14.101), si può scrivere

$$cp_0 = mc^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2}. \quad (14.102)$$

Se  $v \ll c$ , è lecita l'approssimazione (si veda la nota 4 alla sezione 2.12):

$$cp_0 \simeq mc^2 \left(1 + \frac{v^2}{2c^2}\right) = mc^2 + \frac{1}{2}mv^2, \quad (14.103)$$

quindi nel limite in cui la teoria relativistica deve coincidere con la meccanica newtoniana,  $cp_0$ , a meno di una costante additiva, è l'energia cinetica del corpo. Questo risultato induce ad identificare  $cp_0$  con l'**energia relativistica**. Vale quindi  $\mathcal{E} = cp_0$ , cioè

$$\boxed{\mathcal{E} = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (14.104)$$

Quindi la quantità di moto relativistica e l'energia relativistica sono componenti dello stesso quadrivettore e, cambiando sistema di riferimento, vengono mescolate dalle trasformazioni di Lorentz per i quadrivettori (14.79); varranno quindi le seguenti trasformazioni<sup>10</sup>:

$$\mathcal{E}' = \frac{\mathcal{E} - Vp_x}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad p'_x = \frac{p_x - \frac{V}{c^2}\mathcal{E}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad p'_y = p_y, \quad p'_z = p_z \quad (14.105)$$

### Osservazioni

1. Si osservi che, come nella meccanica newtoniana, l'energia di un corpo dipende dalla sua velocità ed è minima quando tale velocità è nulla. La cosa nuova, e certamente sorprendente, è che nel caso relativistico questo minimo dell'energia non è nullo.
2. È possibile ottenere una diversa equazione per l'energia calcolando il quadrato del quadrivettore  $p_i$ :  $p_i^2 = p_0^2 - \mathbf{p}^2 = \mathcal{E}^2/c^2 - \mathbf{p}^2$ ; infatti osservando che dalla (14.84) si ottiene

$$1 - \frac{v^2}{c^2} = \frac{\Delta s^2}{c^2 \Delta t^2} \quad (14.106)$$

si può scrivere

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{E}^2}{c^2} - \mathbf{p}^2 &= p_0^2 - p_1^2 - p_2^2 - p_3^2 = \frac{m^2 c^2}{1 - v^2/c^2} - p_1^2 - p_2^2 - p_3^2 = \\ &= \frac{m^2 c^4}{\Delta s^2} \Delta t^2 - \frac{m^2 c^2}{\Delta s^2} (\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2) = \\ &= \frac{m^2 c^2}{\Delta s^2} (c^2 \Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2) = \\ &= m^2 c^2, \end{aligned} \quad (14.107)$$

quindi

$$\mathcal{E}^2 = m^2 c^4 + \mathbf{p}^2 c^2. \quad (14.108)$$

3. Ancora una diversa equazione si può ottenere osservando che la (14.89), usando la (14.104) può essere riscritta nella forma:

$$\mathbf{p} = \frac{\mathcal{E}}{c^2} \mathbf{v}, \quad (14.109)$$

<sup>10</sup> Il lettore studioso ne faccia una verifica col calcolo.

che elevata al quadrato diventa

$$p^2 = \frac{\mathcal{E}^2}{c^4} v^2, \quad (14.110)$$

da cui si ottiene

$$\mathcal{E} = \frac{p}{v} c^2. \quad (14.111)$$

4. Per una particella a massa nulla l'equazione (14.108) diventa

$$\mathcal{E}^2 = p^2 c^2, \quad (14.112)$$

che, facendo uso della (14.110), diventa

$$\mathcal{E}^2 = \frac{\mathcal{E}^2}{c^4} v^2 c^2 \quad \longrightarrow \quad v^2 = c^2 \quad \longrightarrow \quad v = c; \quad (14.113)$$

quindi una particella a massa nulla si muove con la velocità della luce.

# 15

## MODELLI ATOMICI.

---

### 15.1 STORIA DEL CONCETTO DI ATOMO.

La prima idea di atomo compare nel V sec. a.C., introdotta dal filosofo Leucippo<sup>1</sup>, di cui ci rimangono scarse ed incerte notizie, e sviluppata da Democrito<sup>2</sup>.

Democrito, per sfuggire all'antinomia zenoniana dell'infinita divisibilità, introdusse il concetto di atomo, cioè di indivisibile (>'atomos) e lo pose alla base della struttura della materia. Gli atomi sono, per Democrito, caratterizzati da grandezza e forma geometrica e sono alla base della percezione sensibile; ogni sensazione infatti è immaginata avvenire per contatto di atomi con gli organi di senso, così, per esempio, la vista e l'olfatto sono spiegati in termini di contatto tra atomi emessi dall'oggetto percepito e l'occhio od il naso. I diversi atomi aggregandosi in modi diversi danno conto delle diverse proprietà delle sostanze. Insomma, tutta la fisica va spiegata in termini del moto di atomi e viene quindi condotta ad un principio puramente meccanicistico.

Sarà opportuno sottolineare che con Democrito non ci trova ancora davanti ad una teoria scientifica, nel senso che non sono giunte ai nostri giorni notizie né di teoremi né di esperimenti, ma la fondamentale importanza della teoria democritea nella storia della scienza sta nell'aver cercato di spiegare dei fenomeni per mezzo di oggetti dichiaratamente non osservabili; si tratta evidentemente di un passo importante nella direzione della costruzione di teorie scientifiche basate su modelli puramente teorici.

L'idealismo platonico e aristotelico, e soprattutto la loro enorme ricaduta culturale nella storia del pensiero, hanno oscurato il meccanicismo di Democrito per molti secoli, e la teoria atomica ha dovuto attendere fino agli ultimi anni del XVIII secolo per riprendere vigore.

Lavoisier<sup>3</sup> cominciò per primo uno studio quantitativo, con rigore scientifico, delle reazioni chimiche ed arrivò nel 1789, a formulare il **principio di conservazione della massa nelle reazioni chimiche**, che qui si enuncia nel modo seguente.

*La massa totale di un sistema in reazione non si modifica qualunque sia la varietà e la natura delle reazioni chimiche che si verificano.*

Questo principio fondamentale fa piazza pulita della chimica precedente non essendo basata su studi quantitativi; a mo' di esempio, si menzioni il fatto che la formazione di un ossido di un metallo era considerata alla stregua di una decomposizione che dà origine ad una perdita di peso. Per questo motivo, in questa brevissima ricognizione storica delle teorie che portarono al concetto moderno di atomo, viene tralasciata tutta la chimica alchemica e flogistica dei secoli precedenti Lavoisier.

Il passo successivo arriva nel 1799 quando Proust<sup>4</sup> enuncia la **legge delle proporzioni definite**.

*Un determinato composto contiene gli elementi che lo costituiscono in rapporti di peso indipendenti dal modo in cui è stato preparato.*

Si tratta di un primo indizio della natura discontinua della materia; un altro importante indizio arriva nel 1803 quando Dalton<sup>5</sup> enunciò la **legge delle proporzioni multiple**.

*Quando due elementi si combinano per dare composti differenti, le quantità di un elemento che si combinano con una quantità fissa dell'altro elemento stanno fra loro in rapporti esprimibili mediante numeri interi e, generalmente, piccoli.*

---

<sup>1</sup> Leucippo (?), filosofo di Mileto.

<sup>2</sup> Democrito (460-?), filosofo di Abdera.

<sup>3</sup> Antoine Laurent Lavoisier (1743-1794), chimico francese.

<sup>4</sup> Joseph-Louis Proust (1754-1826), chimico francese.

<sup>5</sup> John Dalton (1766-1844), scienziato inglese.

Per esempio, le masse di azoto che si combinano con 16 g di ossigeno nei composti protossido di azoto, ( $N_2O$ ), ossido di azoto ( $NO$ ) e biossido di azoto ( $NO_2$ ), sono rispettivamente 28, 14 e 7 che sono nel rapporto 4, 2 e 1.

In verità, le misure di Dalton non erano molto precise e la parte sperimentale del suo lavoro non è molto importante qui; fondamentale è invece l'interpretazione che egli ne diede in termini di atomi. Per esempio, egli argomentava che se l'acqua è costituita da molecole contenenti ciascuna un atomo di idrogeno e uno di ossigeno<sup>6</sup> e se, come risultava dalle sue errate misurazioni, ogni grammo di idrogeno si combina con 5.5 grammi di ossigeno, evidentemente ogni grammo di ossigeno pesa 5.5 volte più di un atomo di idrogeno. In realtà un grammo di idrogeno si combina con 8 grammi di ossigeno e, poiché ogni atomo di ossigeno si combina con *due* atomi di idrogeno, è chiaro che l'atomo di ossigeno deve pesare 16 volte più dell'atomo di idrogeno. È quindi chiaro che le misure di Dalton sono completamente sballate, ma la sua interpretazione delle misure è meravigliosamente corretta. Dalton ha compilato una tabella di pesi atomici del tutto sbagliata, ma ha capito *come* determinare i pesi atomici.

Ma la cosa forse più importante di questa legge è che la combinazione di 1 g di idrogeno e di 8 g di ossigeno danno 9 g di acqua; ma se si cerca di combinare lo stesso grammo di idrogeno con 10 g di ossigeno non si ottiene acqua con una maggiore quantità di ossigeno, ma ancora 9 g d'acqua e avanza 2 g di ossigeno.

Successivamente Richter<sup>7</sup> enunciò la **legge delle proporzioni equivalenti**.

*Siano A e B due sostanze che possono reagire con la sostanza C; una data massa di C reagisce con differenti masse di A e B ed il rapporto di tali masse è un numero che viene indicato con r; quando A reagisce con B il rapporto q tra le masse dei reagenti di A e B è tale che sia  $q = nr$  ove n è un rapporto di interi.*

Per esempio siano A azoto, B ossigeno e C idrogeno, allora 3 g di idrogeno reagiscono con 14 g di azoto per formare ammoniaca ( $NH_3$ ) e con 24 g di ossigeno per formare acqua ( $H_2O$ ), quindi  $r = 7/12$ ; ma azoto e ossigeno formano ossido di azoto ( $NO$ ) nel rapporto di masse  $q = 7/8$  e quindi che vale  $q = nr$  con  $n = 3/2$ , oppure formano biossido di azoto ( $NO_2$ ) nel rapporto di masse  $d = 7/16$  e quindi vale  $q = nr$  con  $n = 3/4$  e via di seguito.

Tutti questi fatti sono facilmente spiegabili introducendo l'ipotesi atomica ed assai difficili da rendere conto altrimenti. Su tali basi quindi, nel 1803, Dalton formulò la **teoria atomica** che può essere enunciata in tre punti.

1. Esistono atomi indivisibili.
2. Gli atomi di elementi diversi hanno masse diverse.
3. Gli atomi si combinano formando composti.

Nel 1808 Gay-Lussac, studiando la combinazione dei gas, enunciò la seguente legge che porta il suo nome

*I volumi delle sostanze che si combinano, a pressione e temperatura costanti, stanno tra loro secondo rapporti di numeri interi piccoli.*

Così, per esempio, due litri di idrogeno si combinano con un litro di ossigeno per formare due litri di acqua.

Le osservazioni di Gay-Lussac sembrano contraddire le osservazioni precedenti che hanno portato alla teoria di Dalton: in quelle infatti si consideravano i rapporti fra i pesi (o, meglio, fra le masse) dei reagenti, mentre in queste si considerano i volumi. La soluzione dell'apparente contraddizione venne nel 1811 da Avogadro il quale capì che il volume di un gas deve essere in una semplice relazione con il numero di molecole di cui è composto il gas. Enunciò quindi la legge che porta il suo nome<sup>8</sup>.

<sup>6</sup> Cosa ovviamente falsa, ma è ciò che allora pensava Dalton.

<sup>7</sup> Jeremias Benjamin Richter (1762-1807), chimico tedesco.

<sup>8</sup> In seguito, circa un secolo dopo, il numero citato nella legge verrà determinato; questo numero è oggi noto come *numero di Avogadro*; per una sua determinazione si veda oltre.

*Volumi uguali di gas, a parità di pressione e di temperatura, contengono lo stesso numero di molecole.*

Quindi se due litri di idrogeno si combinano sempre con un litro di ossigeno, e se un litro di ossigeno contiene lo stesso numero di atomi del litro di idrogeno, è chiaro che ogni atomo di ossigeno deve combinarsi con due atomi di idrogeno e che quindi, diversamente da quanto pensava Dalton, la formula corretta dell'acqua è  $H_2O$ .

Avogadro rispose anche ad un'altra domanda: come mai due litri di idrogeno e uno di ossigeno danno due litri d'acqua e non uno solo? Avogadro spiegò la cosa ammettendo che in condizioni ordinarie le molecole di idrogeno e di ossigeno siano costituite da *due* atomi; ciò fa raddoppiare il numero di atomi di idrogeno e di ossigeno che partecipano alla reazione e quindi il numero di molecole di acqua prodotte e quindi si ha un volume doppio. In formule, com'è ben noto, tutto ciò si legge:



Si osservi che i numeri che compaiono davanti al simbolo, detti coefficienti di reazione, oltre che il numero di molecole che partecipano alla reazione, rappresentano i volumi relativi di gas necessari alla reazione.

La legge di Avogadro concluse il percorso di formazione della teoria atomica e di accettazione del concetto di atomo fra gli studiosi di chimica. Occorre però dire che se il modello era praticamente accettato da tutti come ipotesi di lavoro (cioè in tutti i laboratori si usavano le tabelle con i pesi atomici), vi era chi, soprattutto in Germania ed in Austria, resisteva a considerare la teoria atomica come fondamentale perché si rifiutava di accettare la validità di teorie che prevedessero l'uso di oggetti che, come gli atomi, non fossero osservabili. Questi critici si raccoglievano principalmente attorno alla figura di Mach a Vienna. D'altra parte la teoria atomica continuava ad avere nuove conferme ed applicazioni nella spiegazione fondamentale del calore e delle proprietà meccaniche e termiche dei gas.

## 15.2 LA NATURA DELL'ELETTRICITÀ. I RAGGI CATODICI.

In tutto l'Ottocento sono fioriti esperimenti volti ad indagare la natura dell'elettricità. Volendone studiare la natura intima, non è opportuno studiare i corpi carichi perché le proprietà dell'elettricità che ci interessano si confondono inestricabilmente con quelle del corpo che la ospita. Si trattava quindi di estrarre l'elettricità e di studiarla da sola; si pensò così di studiare le scariche elettriche nei gas rarefatti; è chiaro però che anche il gas, benché rarefatto, interagisce con la scarica in esame; quindi i primi significativi esperimenti sono stati possibili quando è stato possibile disporre di pompe da vuoto efficienti, ciò avvenne dal 1855 quando fu costruita una pompa che era in grado di ridurre la pressione all'interno di un tubo di vetro fino a qualche decimillesimo della pressione atmosferica.

Il fenomeno osservato nei tubi di vetro così svuotati può essere descritto come segue. All'interno del tubo vennero poste due lastre metalliche collegate ad una pila elettrica, si dice *anodo* la lastra collegata al polo positivo e *catodo* quella collegata al polo negativo. Si osservò un bagliore verdastro nei pressi del catodo. Sembrava che 'qualcosa' venisse emesso dal catodo, che viaggiasse attraverso lo spazio quasi vuoto del tubo, colpisse il vetro e venisse poi raccolto all'anodo. Questo 'qualcosa' venne chiamato *cathodenstrahlen*, cioè **raggi catodici**.

Per indagare la natura di questi raggi vennero fatti molti esperimenti che portarono a svariate teorie.

Plücker<sup>9</sup> osservò che se l'anodo era fatto di platino, una pellicola sottile di platino si depositava sul vetro, suggerendo che i raggi catodici fossero piccoli pezzetti del materiale di cui è costituito il catodo. Osservò inoltre che il bagliore cambiava forma e posizione se al tubo veniva avvicinato un magnete; da questo fatto si poteva dedurre che raggi erano costituiti da particelle cariche.

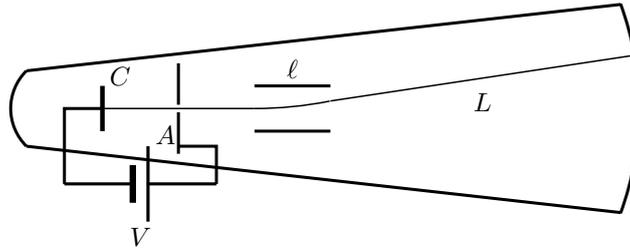
Nel 1883 Hertz trovò che i raggi catodici non erano deviati se fatti passare tra le armature di un condensatore piano, quindi, non risentendo dell'azione di un campo elettrico, non poteva trattarsi di particelle cariche, ma doveva secondo lui trattarsi di qualcosa di analogo alla luce. Nel 1891

<sup>9</sup> Julius Plücker (1801-1868), fisico tedesco.

osservò che i raggi potevano attraversare sottili lamine metalliche.

Nel 1895 Perrin<sup>10</sup> dimostrò che i raggi catodici erano in grado di depositare una carica negativa su di un collettore di carica posto all'interno del tubo, contraddicendo quindi l'esperienza di Hertz, il quale, si dedusse, aveva utilizzato campi elettrici poco intensi dando così luogo ad una deviazione non osservabile.

Nel 1897 Thomson<sup>11</sup> riuscì a misurare una deflessione dei raggi catodici, mettendo in luce che, essendo i raggi attratti dalla armatura positiva, dovevano trasportare una carica negativa. Si trattava a questo punto di fare un'analisi quantitativa dei raggi.



**Figura 15.1:** Uno schema del tubo catodico di Thomson.

Uno dei tubi catodici usati da Thomson è rappresentato in figura 15.1; il catodo di platino  $C$  è collegato tramite una batteria all'anodo collimatore  $A$ , necessario ad ottenere un raggio ben sottile. Nella regione fra catodo e anodo i raggi vengono accelerati fino a raggiungere una velocità  $v$ ; quindi si muovono di moto uniforme fino ad incontrare, nella zona di deflessione, che ha lunghezza  $\ell$  un campo elettrico, o magnetico, che ne incurva la traiettoria con una forza costante e perpendicolare, quindi i raggi si propagano nuovamente in linea retta per una lunghezza  $L \gg \ell$  fino ad colpire lo schermo di vetro che, essendo ricoperta di un materiale fosforescente produce un punto luminoso visibile.

Thomson ha misurato uno spostamento del punto luminoso sia in presenza del campo elettrico che in presenza del campo magnetico ed ha correttamente interpretato le sue misure supponendo che i raggi catodici siano particelle cariche di massa  $m$ , carica  $e$  e velocità  $v$  per cui ha ricavato le seguenti espressioni (si veda oltre per i dettagli).

$$v = \frac{d_M E}{d_E B} \quad , \quad \frac{m}{e} = \frac{B^2 \ell d_E}{E d_M^2} \left( L + \frac{\ell}{2} \right) \quad , \quad (15.2)$$

ove,  $E$  e  $B$  sono il campo elettrico ed il campo magnetico applicati ai raggi,  $d_E$  e  $d_M$  sono gli spostamenti nel caso di deflessione magnetica ed elettrica. Per il tubo con catodo di platino sopra descritto, le cui lunghezze sono  $\ell = 0.05$  m ed  $L = 1.1$  m, Thomson ha impiegato i seguenti valori per i campi elettrico e magnetico:  $E = 1.0 \times 10^4$  N C<sup>-1</sup> e  $B = 3.6 \times 10^{-4}$  T con i quali ha ottenuto le deviazioni  $d_E = d_M = 0.07$  m. Con queste misure, tramite le equazioni (15.2), ha ricavato:

$$v = 2.8 \times 10^7 \text{ m s}^{-1} \quad , \quad \frac{m}{e} = 1.0 \times 10^{-11} \text{ kg C}^{-1} \quad . \quad (15.3)$$

Le misure non sono molto accurate<sup>12</sup>, probabilmente Thomson aveva commesso un errore nella valutazione delle intensità dei campi, ma il suo risultato è comunque importante, in modo decisivo, per i seguenti motivi.

1. L'universalità: le misure vennero ripetute variando le condizioni sperimentali, in particolare cambiando la sostanza di cui è composto il catodo e il gas rarefatto contenuto all'interno del tubo di vetro ottenendo diversi valori della velocità, ma sempre lo stesso valore per il rapporto  $m/e$ .

<sup>10</sup> Jean Baptiste Perrin (1870-1942), fisico francese.

<sup>11</sup> Joseph John Thomson (1856-1949), fisico inglese.

<sup>12</sup> Gli esperimenti moderni misurano la quantità inversa; il valore attuale è  $e/m = 1.758\,820\,010\,76(53) \times 10^{11}$  C kg<sup>-1</sup>.

2. L'interpretazione: Thomson ha, fin da subito, usato per interpretare i suoi dati la fisica del moto dei corpi materiali, e non per esempio quella delle onde, riuscendo a ricavare teoricamente i parametri fondamentali del corpo in esame, cioè massa, carica e velocità a partire dalla misura delle deflessioni: ha avuto quindi ben chiaro il corretto modello interpretativo da usare.

Dopo gli esperimenti di Thomson fu chiaro che i raggi catodici erano costituiti da particelle dotate di una carica negativa cui fu dato il nome di **elettroni**.

In tutto questo non è ancora stato spiegato il perché del bagliore verdastro. Oggi è noto che i raggi catodici sono flusso di elettroni che vengono emessi dal catodo, accelerati fra catodo e anodo, percorrono il tubo 'quasi' vuoto e colpiscono il vetro cedendo agli atomi del vetro la propria energia, che da questi viene riemessa sotto forma di luce visibile, il bagliore appunto, quindi tornano indietro attirati dall'anodo; gli elettroni vengono emessi dal catodo così violentemente da estrarre pezzetti di materiale che quindi vengono 'spruzzati' sul vetro (il così detto *spruzzamento catodico*).

Qui di seguito, per completezza, si riporta la derivazione delle formule utilizzate ricavate da Thomson e sopra utilizzate. Si segnala che si fa uso dei concetti di campo elettrico e magnetico; il lettore che non ne fosse familiare può passare oltre.

I raggi catodici entrano nella regione di deflessione con velocità  $v$ ; in tale regione le leggi del moto sono

$$\begin{cases} x(t) = vt \\ y(t) = \frac{1}{2} at^2 \end{cases} \quad \begin{cases} v_x(t) = v \\ v_y(t) = at \end{cases} \quad (15.4)$$

ove l'asse  $x$  è disposto lungo la direzione longitudinale del tubo, mentre  $y$  è la direzione di deflessione. Alla fine della deflessione, cioè dopo un tempo  $t_1 = \ell/v$ , lo spostamento dovuto alla deflessione è  $\Delta y_1 = at_1^2/2$  cioè  $\Delta y_1 = a\ell^2/(2v^2)$  e la velocità  $v_y = a\ell/v$ . Nella regione successiva, lunga  $L$ , il moto è rettilineo uniforme e le leggi del moto sono

$$\begin{cases} x(t) = vt \\ y(t) = a\frac{\ell}{v} t ; \end{cases} \quad (15.5)$$

all'istante  $t_2 = L/v$  il raggio catodico colpisce il vetro e l'ulteriore spostamento è  $\Delta y_2 = alt_2/v = a\ell L/v^2$ . La deviazione totale è pertanto

$$d = \Delta y_1 + \Delta y_2 = \frac{1}{2} a \frac{\ell^2}{v^2} + a \frac{\ell L}{v^2} = \frac{a\ell}{v^2} \left( \frac{\ell}{2} + L \right) . \quad (15.6)$$

Thomson ha usato per deflettere i raggi sia un campo elettrico  $E$  che un campo magnetico  $B$ . Nei due casi l'accelerazione vale

$$a_e = \frac{eE}{m} \quad , \quad a_m = \frac{evB}{m} \quad , \quad (15.7)$$

ove  $m$  è la massa della particella che costituisce i raggi catodici ed  $e$  ne è la carica. Si noti che l'assegnare ai raggi una massa e una carica significa decidere di interpretare i raggi catodici come composti da particelle: è qui la vera svolta interpretativa di Thomson cui si è accennato sopra.

Quindi vi è una deviazione elettrica pari a

$$d_e = \frac{eE\ell}{mv^2} \left( \frac{\ell}{2} + L \right) \quad (15.8)$$

ed una deviazione magnetica pari a

$$d_m = \frac{eB\ell}{mv} \left( \frac{\ell}{2} + L \right) \quad , \quad (15.9)$$

quindi

$$\frac{d_m}{d_e} = \frac{Bv}{E} \quad \longrightarrow \quad v = \frac{Ed_m}{Bd_e} ; \quad (15.10)$$

sostituendo questa espressione per  $v$  in (15.9) si ottiene

$$d_m = \frac{eb^2\ell d_e}{mEd_m} \left( \frac{\ell}{2} + L \right) \quad (15.11)$$

da cui, infine,

$$\frac{m}{e} = \frac{B^2\ell d_e}{E d_m^2} \left( \frac{\ell}{2} + L \right) . \quad (15.12)$$

### 15.3 LA CARICA DELL'ELETTRONE.

Dopo che Thomson ebbe misurato il rapporto fra la massa e la carica dell'elettrone, si trattava di misurarli separatamente; questo è stato fatto con un brillante esperimento, che sarà descritto in questo paragrafo, da Millikan<sup>13</sup> nel 1911. In realtà si darà conto dell'esperimento in una versione un poco semplificata, ma sostanzialmente corrispondente al lavoro di Millikan, perfezionando un metodo di indagine, che qui si tralascia di descrivere<sup>14</sup>, messo a punto da Thomson e dai suoi collaboratori. Si trattava di studiare il moto in un campo elettrico noto e costante di un corpo carico; Millikan scelse di studiare il moto di una gocciolina d'olio in moto verticale tra le armature di un condensatore tra le quali era possibile creare un campo elettrico variabile ma noto. La goccia d'olio poteva essere caricata tramite bombardamento di raggi ionizzanti, raggi  $X$  per esempio. Il moto della goccia fu seguito al microscopio.

La prima misura è stata con la goccia d'olio in caduta libera a campo elettrico nullo nel condensatore. In questo modo, la goccia d'olio si muove sotto l'azione della sua forza peso ed è sottoposta all'attrito viscoso dell'aria. È stata misurata la parte finale del moto della goccia quando ha già raggiunto la velocità limite: infatti a tale velocità la forza peso è equilibrata dalla forza viscosa, data dalla legge di Stokes, vale quindi

$$\frac{4}{3}\pi r^3 \rho g = 6\pi\eta r v \quad (15.13)$$

ove  $\rho$  è la densità dell'olio<sup>15</sup>;  $r$  è il raggio della gocciolina d'olio;  $\eta$  è la viscosità dell'aria. Si può così, misurando la velocità limite, determinare il valore del raggio  $r$ :

$$r = \sqrt{\frac{9}{2} \frac{v\eta}{g\rho}}. \quad (15.14)$$

Facendo in modo che la goccia si muova in un campo elettrico noto  $E$  volto verso il basso, essa, carica negativamente, viene attratta verso l'alto; a questo punto, alla velocità limite, che in questo primo esperimento viene indicata con  $v_1$ , la goccia, che si suppone trasportare la carica elettrica  $q_1$ , è sottoposta alle forze: peso, elettrica e viscosa le quali, come prima, si fanno equilibrio, cioè:

$$\frac{4}{3}\pi r^3 \rho g + q_1 E - 6\pi\eta r v_1 = 0, \quad (15.15)$$

dal quale si ricava la velocità

$$v_1 = \frac{1}{6\pi\eta r} \left( q_1 + \frac{4}{3}\pi r^3 \rho g \right). \quad (15.16)$$

È possibile ripetere l'esperimento sulla stessa goccia d'olio a cui si stata cambiata la carica tramite ulteriore bombardamento di raggi ionizzanti. Ripetendo tutto una seconda volta, sulla stessa goccia d'olio, si troverà un diverso valore  $v_2$  della velocità che corrisponde al nuovo valore  $q_2$  della carica, ma legate sempre dalla stessa relazione:

$$v_2 = \frac{1}{6\pi\eta r} \left( q_2 + \frac{4}{3}\pi r^3 \rho g \right). \quad (15.17)$$

Ripetendo molte volte l'esperimento Millikan osservò che la differenza fra le velocità era sempre un multiplo intero della medesima quantità, che qui si indica con  $V$ . Quindi:

$$v_2 - v_1 = \frac{E}{6\pi\eta r} (q_2 - q_1) = nV, \quad (15.18)$$

ove  $n$  è un numero intero positivo o negativo. Da qui è immediato ricavare

$$q_2 - q_1 = n \frac{6\pi\eta r V}{E}; \quad (15.19)$$

<sup>13</sup> Robert Andrews Millikan (1868-1953), fisico statunitense.

<sup>14</sup> Per maggiori dettagli si veda, per esempio, Steven Weinberg, *La scoperta delle particelle subatomiche*. Zanichelli.

<sup>15</sup> Andrebbe anche considerata la spinta di Archimede dell'aria sulla goccia, che porterebbe ad una correzione della densità dell'olio che qui viene trascurata.

la differenza fra le cariche presenti sulla goccia d'olio è, si noti, sempre multiplo intero di una costante. Millikan ha interpretato questo risultato osservando che la carica della goccia può cambiare solo per multipli interi di una certa quantità e l'analisi da lui fatti gli ha consentito di misurare con estrema precisione questa quantità, che adesso è detta carica elementare ed il cui valore oggi accettato è<sup>16</sup>

$$e = 1.602\,176\,634 \times 10^{-19} \text{ C} . \quad (15.20)$$

Faraday, sperimentando il passaggio di corrente elettrica nelle celle elettrolitiche, ha misurato la carica che passa per l'elettrolito quando all'elettrodo reagisce una mole di un elemento monovalente: il valore oggi accettato di tale carica è<sup>17</sup>

$$F = 96\,485.332\,12 \text{ C mol}^{-1} , \quad (15.21)$$

numero noto come **costante di Faraday**. Tale carica è evidentemente uguale alla carica elementare per il numero di Avogadro  $N_A$ . Quindi la misura della carica elementare è anche una misura del numero di Avogadro<sup>18</sup>:

$$F = eN_A \quad \longrightarrow \quad N_A = \frac{F}{e} = 6.022\,140\,76 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1} . \quad (15.22)$$

#### 15.4 IL MODELLO DI THOMSON.

Dopo la determinazione della natura corpuscolare dell'elettrone, gli studiosi cominciarono a cercare un modello atomico che fosse coerente con l'esistenza di una carica elementare; si trattava cioè di capire come l'elettrone si collocasse all'interno dell'atomo. Il fatto è che l'elettrone, negativo, doveva prendere posto in un atomo che, in condizioni normali, si sapeva esser neutro; nell'atomo si doveva così far posto anche ad una carica positiva. Presto due diversi tipi di teorie vennero proposte; la prima immaginava che la carica positiva fosse concentrata in uno o più nuclei, la seconda supponeva che la carica fosse distribuita uniformemente in tutto l'atomo<sup>19</sup>. Perrin fu uno dei sostenitori del primo modello: proponeva di considerare l'atomo come un sistema solare in miniatura in cui gli elettroni negativi si muovevano attorno ad uno o più nuclei positivi. Questa ipotesi sollevò due tipi di obiezioni; una di ordine teorico: infatti la teoria prevede che una carica accelerata emette energia elettromagnetica e quindi l'elettrone avrebbe dovuto precipitare sul nucleo; la seconda obiezione era di ordine empirico: nessun fatto sperimentale allora noto richiedeva per la sua comprensione e la sua spiegazione l'esistenza di un nucleo atomico. Così i fisici furono condotti ad assumere l'ipotesi più semplice di una carica positiva diffusa su tutto l'atomo, evitando così entrambe le obiezioni.

Nel 1904, Thomson propose il suo modello atomico basato sulla presenza di una carica positiva uniformemente distribuita su tutto l'atomo, mentre gli elettroni erano disposti a intervalli regolari su anelli. Thomson dimostrò che in queste ipotesi esistevano delle configurazioni di equilibrio che, se gli anelli erano posti in rotazione, consentivano di mettere grandi numeri di elettroni sugli anelli concentrici secondo strutture molto regolari che sembravano fornire uno schema interpretativo per la tabella di Mendeleev<sup>20</sup>.

Si riporta qui, per completezza, e con l'avviso che vengono usate tecniche matematiche superiori, come sia possibile, nel modello di Thomson, ottenere configurazioni di equilibrio. Si comincia con la determinazione della forza della carica positiva che agisce su di un singolo elettrone. Si indica con  $b$  il raggio dell'atomo che si suppone interamente riempito da una carica positiva corrispondente ad  $n$  elettroni, sia pertanto  $ne$  tale carica positiva; evidentemente la densità della carica positiva è  $\rho = 3ne/4\pi b^3$ . Ad una distanza  $a$  dal centro dell'atomo, con  $a < b$  si trova un elettrone di carica  $e$ . Per determinare la forza, che evidentemente è diretta verso il centro, si calcola l'energia elettrostatica e la si differenzia rispetto ad  $a$ . Per determinare l'energia elettrostatica fra l'elettrone ed una porzione infinitesima di volume  $dV$  di carica positiva si

<sup>16</sup> Si tratta di un valore esatto.

<sup>17</sup> Si tratta di un valore esatto.

<sup>18</sup> Si tratta di un valore esatto.

<sup>19</sup> Per maggiori dettagli si vedano Enrico Bellone. *L'atomo e la radioattività*, in *Storia della scienza moderna e contemporanea*, vol. 3 tomo 1. Tea. Antonio Rostagni. *Fisica generale*, vol. 2, parte seconda. UTET.

<sup>20</sup> Dimitrij Ivanovič Mendeleev (1834-1907), chimico russo.

scelgano gli assi cartesiani in modo tale che l'elettrone si trovi sull'asse  $z$ , cioè in modo tale che le sue coordinate siano  $(0, 0, a)$ ; per l'elemento infinitesimo generico  $dV$  conviene usare le coordinate polari, allora la sua generica posizione è data dalle coordinate  $(r \text{ sen } \theta \text{ cos } \phi, r \text{ sen } \theta \text{ sen } \phi, r \text{ cos } \theta)$  mentre il suo valore è  $dV = r^2 \text{ sen } \theta \text{ d}\theta \text{ d}\phi \text{ dr}$ . La distanza che separa  $dV$  e l'elettrone è quindi data da

$$\begin{aligned} R &= \sqrt{r^2 \text{ sen}^2 \theta \text{ cos}^2 \phi + r^2 \text{ sen}^2 \theta \text{ sen}^2 \phi + (r \text{ cos } \theta - a)^2} = \\ &= \sqrt{r^2 \text{ sen}^2 \theta + r^2 \text{ cos}^2 \theta - 2ra \text{ cos } \theta + a^2} = \\ &= \sqrt{r^2 - 2ra \text{ cos } \theta + a^2} . \end{aligned} \tag{15.23}$$

Quindi l'energia elettrostatica fra l'elettrone  $e$  e la porzione infinitesima di carica  $\rho dV$  è

$$dU = k \frac{e\rho}{R} dV = \frac{ke\rho r^2 \text{ sen } \theta}{\sqrt{r^2 - 2ar \text{ cos } \theta + a^2}} d\theta \text{ d}\phi \text{ dr} . \tag{15.24}$$

Per trovare l'energia totale occorre integrare su tutta sfera fino al raggio  $a$ , è noto infatti (legge di Gauss) che la porzione di raggio maggiore non esercita alcuna forza sull'elettrone. Si trova così:

$$U(a) = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi d\theta \int_0^a dr \frac{ke\rho r^2 \text{ sen } \theta}{\sqrt{r^2 - 2ar \text{ cos } \theta + a^2}} = 2\pi ke\rho \int_0^a dr r^2 \int_0^\pi d\theta \frac{\text{sen } \theta}{\sqrt{r^2 - 2ar \text{ cos } \theta + a^2}} \tag{15.25}$$

con la sostituzione  $2ar \text{ cos } \theta = x$ ,  $\text{sen } \theta d\theta = -dx/2ar$  si ottiene

$$\begin{aligned} U(a) &= 2\pi ke\rho \int_0^a dr r^2 \frac{1}{-2ar} \int_{2ar}^{-2ar} \frac{dx}{\sqrt{r^2 - x + a^2}} = \frac{\pi ke\rho}{a} \int_0^a dr r \int_{-2ar}^{2ar} \frac{dx}{\sqrt{r^2 - x + a^2}} = \\ &= \frac{\pi ke\rho}{a} \int_0^a dr r [-2\sqrt{r^2 - x + a^2}]_{-2ar}^{2ar} = \frac{-2\pi ke\rho}{a} \int_0^a dr r (r - a - r - a) = \frac{4\pi ke\rho a}{a} \int_0^a dr r = \\ &= 4\pi ke\rho \frac{a^2}{2} = 2\pi ke\rho a^2 . \end{aligned} \tag{15.26}$$

Per trovare la forza sull'elettrone a questo punto basta differenziare rispetto ad  $a$ :

$$F = -\frac{\partial U}{\partial a} = -4\pi ke\rho a ; \tag{15.27}$$

il segno meno dice che la forza è diretta verso il centro, come era da attendersi; sostituendo il valore sopra esposto per  $\rho$  si trova

$$F = 4\pi ke \frac{3ne}{4\pi b^3} a = \frac{3kne^2 a}{b^3} , \tag{15.28}$$

che la forza totale di tutta la carica positiva diffusa sul singolo elettrone.

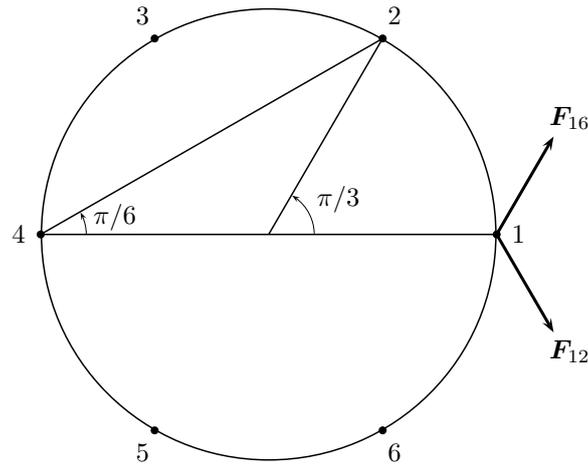
Si veda ora cosa accade se sono presenti  $n$  elettroni (in modo, evidentemente, che l'atomo sia neutro) disposti tutti alla stessa distanza  $a$  dal centro in modo simmetrico; si supponga cioè che siano disposti lungo una circonferenza con centro nel centro dell'atomo e avente raggio  $a$  ogni  $2\pi/n$  radianti. Nella figura ho rappresentato il caso con  $n = 6$  a cui faccio riferimento per capire quel che succede. Si cerchi di determinare la forza totale agente sull'elettrone indicato con 1. Si comincia col valutare le distanze. Usando il teorema della corda, si trova la distanza fra gli elettroni: la distanza  $d_{12}$  dell'elettrone 1 dall'elettrone 2 è  $d_{12} = 2a \text{ sen } \pi/6$ ; similmente  $d_{13} = 2a \text{ sen } 2\pi/6$ ,  $d_{14} = 2a \text{ sen } 3\pi/6$ ,  $d_{15} = 2a \text{ sen } 4\pi/6$  e  $d_{16} = 2a \text{ sen } 5\pi/6$ .

Determinate così le distanze è possibile calcolare la forza fra due elettroni, per esempio

$$F_{12} = \frac{ke^2}{4a^2 \text{ sen}^2 \pi/6} ; \tag{15.29}$$

si osservi però che questa forza sommata con la forza  $F_{16}$  lascia come unico contributo una forza radiale centrifuga il cui valore può essere scritto come  $F_{12} \text{ sen } \pi/6$ ; discorso analogo dicasi per tutti gli altri elettroni accoppiati a due a due (tranne, in questo caso, che per l'elettrone 4 che dà da solo un contributo radiale). Quindi, alla fine il contributo totale è la somma di 5 contributi ad una forza centrifuga che si può scrivere nella forma:

$$F = \frac{ke^2}{4a^2} \left( \frac{1}{\text{sen } \pi/6} + \frac{1}{\text{sen } 2\pi/6} + \frac{1}{\text{sen } 3\pi/6} + \frac{1}{\text{sen } 4\pi/6} + \frac{1}{\text{sen } 5\pi/6} \right) . \tag{15.30}$$



**Figura 15.2:** Le forze agenti sugli elettroni nel modello atomico di Thomson.

Ricordando che il reciproco della funzione seno è la funzione cosecante, si può generalizzare il risultato a  $n$  elettroni nella forma

$$F_n = \frac{ke^2}{4a^2} S_n , \tag{15.31}$$

ove si è posto

$$S_n = \sum_{k=1}^{n-1} \operatorname{cosec} \frac{k\pi}{n} . \tag{15.32}$$

A questo punto quindi, su ciascun elettrone, vi è una forza centripeta dovuta alla carica positiva distribuita su tutto l'atomo ed una centrifuga dovuta agli altri elettroni presenti alla stessa distanza dal centro. Evidentemente la condizione di equilibrio per ciascun elettrone è che valga la relazione

$$\frac{3kne^2a}{b^2} = \frac{ke^2}{4a^2} S_n , \tag{15.33}$$

da cui si ottiene la condizione di equilibrio

$$\frac{a^3}{b^3} = \frac{1}{12n} S_n ; \tag{15.34}$$

quindi dato un atomo di raggio  $b$  gli elettroni sono in equilibrio solo se posti lungo una circonferenza di raggio  $a$  che verifichi questa relazione. È possibile introdurre elettroni a diverse distanze dal centro dell'atomo immaginando che la circonferenza su cui sono disposti possa ruotare attorno al centro con una velocità angolare  $\omega$ ; in questo caso la condizione di equilibrio di ciascun elettrone deve tenere conto della corrispondente forza centrifuga e quindi diventa:

$$\frac{a^3}{b^3} = \frac{1}{12n} S_n + m\omega^2 . \tag{15.35}$$

Evidentemente variando il valore di  $\omega$  è possibile disporre di molte orbite elettroniche stabili.

### 15.5 IL MODELLO DI RUTHERFORD.

Tra il 1909 ed il 1911 Rutherford, insieme con i due collaboratori Geiger e Marsden<sup>21</sup>, mise alla prova il modello di Thomson con il seguente brillante esperimento.

Delle particelle cariche di carica positiva, molto veloci e massicce<sup>22</sup>, e quindi dotate di molta energia, chiamate particelle  $\alpha$  (che, in seguito, si sono rivelate essere nient'altro che nuclei di elio: quindi due protoni e due neutroni), emesse da un campione di radio, dopo essere state fatte passare attraverso una sottile fenditura in modo da ottenerne un fascio sottile, vennero fatte passare attraverso una sottilissima fogliolina d'oro. Per rilevare le particelle  $\alpha$  dopo il passaggio

<sup>21</sup> Hans Geiger (1882-1945), fisico tedesco; Ernest Marsden (1889-1970), fisico neozelandese.

<sup>22</sup> Naturalmente qui con la parola *massicce* si intende riferirsi alla scala atomica.

attraverso la foglia d'oro utilizzarono degli schermi di solfuro di zinco che emettono lampi di luce visibile se colpiti anche da una sola particella  $\alpha$ . Quello che gli sperimentatori si aspettavano, in accordo con il modello atomico di Thomson, era di trovare le particelle poco deviate da tantissimi urti con i piccoli elettroni fermi dentro gli atomi della foglia d'oro; invece, con loro grande sorpresa, trovarono che la maggior parte delle particelle subivano una deviazione pressoché nulla, alcune particelle venivano deviate con angoli anche molto grandi e che alcune altre (poche: circa una ogni 10000, ma non nessuna, come era necessario attendersi dal modello di Thomson) venivano addirittura rimbaltate indietro. Questo esperimento mostrava quindi che il modello di Thomson non poteva esser vero. Rutherford e i suoi collaboratori interpretarono l'esperimento facendo le seguenti due osservazioni.

1. Se la maggior parte delle particelle  $\alpha$  attraversa la foglia d'oro indisturbata significa che gli atomi che costituiscono la foglia sono per lo più vuoti.
2. Se alcune particelle  $\alpha$ , che, si ricordi, portano una carica elettrica positiva, vengono riflesse all'indietro, o comunque deviate anche di un grande angolo, significa che sul loro percorso incontrano una carica positiva<sup>23</sup> molto alta e molto massiccia che le respinge indietro per repulsione elettrica.

Quindi il lavoro sperimentale di Rutherford e collaboratori smentiva il modello atomico senza nucleo e promuoveva senz'altro il modello nucleare. Restavano però aperti alcuni problemi: primo fra tutti quello dell'instabilità dell'atomo, ma anche alcune strane proprietà dell'emissione spettrale degli atomi.

Prima di cominciare l'analisi degli spettri atomici dell'idrogeno, conviene dare, seppure a margine, una giustificazione teorica dell'instabilità dell'atomo di Rutherford<sup>24</sup>. Per far ciò occorre richiamare che una carica accelerata emette energia sotto forma di radiazione elettromagnetica ed, in particolare, la potenza irradiata da una carica  $e$  sottoposta ad un'accelerazione costante  $a$ , nell'approssimazione non relativistica (cioè per velocità non troppo vicine a quella della luce) è data da<sup>25</sup>:

$$P = \frac{e^2 a^2}{6\pi\epsilon_0 c^3}. \quad (15.36)$$

A questo punto si ricordi che la forza coulombiana fra il nucleo e l'elettrone nell'atomo di idrogeno è uguale alla massa per l'accelerazione centripeta, quindi:

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r^2} = m \frac{v^2}{r} \quad (15.37)$$

da cui è immediato ricavare

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r} = mv^2. \quad (15.38)$$

L'energia potenziale elettrostatica, com'è ben noto, vale:

$$U = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r}, \quad (15.39)$$

mentre l'energia cinetica, usando anche (15.38):

$$\mathcal{E}_C = \frac{1}{2} mv^2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{2r}; \quad (15.40)$$

quindi per l'energia meccanica si può scrivere

$$\mathcal{E} = U + \mathcal{E}_C = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r} + \frac{1}{2} mv^2 = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{2r} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{2r}. \quad (15.41)$$

<sup>23</sup> La deviazione di grande angolo e la riflessione indietro potrebbero, in teoria, essere dovute anche a delle cariche negative, ma gli elettroni, che sono le uniche cariche negative disponibili all'interno di un atomo, hanno una massa troppo modesta rispetto alle particelle  $\alpha$  (sono infatti circa 8000 volte più leggeri) per poter essere responsabili di una deviazione così cospicua.

<sup>24</sup> Si veda ad esempio: Antonio Rostagni, cit.

<sup>25</sup> Per una dimostrazione di questa formula si rimanda, per esempio, a J. D. Jackson, *Classical Electrodynamics*, equazione (14.22) che, si faccia attenzione, è scritta nel sistema CGS.

Ora ricordando la (15.36) ed usando il fatto che  $a = F/m = e^2/(4\pi\epsilon_0 mr^2)$ :

$$P = \frac{e^2 a^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} = \frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \left( \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{mr^2} \right)^2 = \frac{e^6}{96\pi^3 \epsilon_0^3 c^3 m^2 r^4}. \quad (15.42)$$

Ma la potenza emessa deve essere la derivata di  $W$  rispetto al tempo cambiata di segno, perché nel tempo l'energia diminuisce; quindi, usando (15.41), si può scrivere

$$P = -\frac{dW}{dt} = -\frac{dW}{dr} \frac{dr}{dt} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{2r^2} \frac{dr}{dt}, \quad (15.43)$$

da cui

$$dt = -\frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 r^2} \frac{1}{P} dr = -\frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 r^2} \frac{96\pi^3 \epsilon_0^3 c^3 m^2 r^4}{e^6} dr = -\frac{12\pi^2 \epsilon_0^2 c^3 m^2 r^2}{e^4} dr. \quad (15.44)$$

Questo differenziale, integrato fra gli estremi  $r_0$ , raggio dell'atomo di idrogeno, e lo zero, dà il tempo  $\tau$  impiegato dall'elettrone a collassare nel nucleo:

$$\tau = -\frac{12\pi^2 \epsilon_0^2 c^3 m^2}{e^4} \int_{r_0}^0 r^2 dr = \frac{12\pi^2 \epsilon_0^2 c^3 m^2 r_0^3}{e^4}. \quad (15.45)$$

Usando i seguenti valori moderni per le costanti<sup>26</sup>, si ottiene

$$\tau \simeq 1.56 \times 10^{-10} \text{ s}, \quad (15.46)$$

il che significa che un atomo di idrogeno secondo l'elettrodinamica classica collasserebbe in un tempo infinitesimo; risultato incompatibile con lo stesso risultato sperimentale di Rutherford per il quale l'atomo ha le dimensioni di circa  $10^{10}$  m ed è praticamente vuoto.

## 15.6 SPETTRI ATOMICI.

È un fatto sperimentalmente accertato che un gas opportunamente riscaldato emette radiazione elettromagnetica. Analizzando tale radiazione per mezzo di un prisma essa risulta composta di certe righe colorate cui corrispondono ben definite lunghezze d'onda. Queste lunghezze d'onda sono caratteristiche della sostanza di cui è composto il gas e costituiscono quello che viene detto lo **spettro di emissione** del gas in questione. D'altro canto, se della radiazione elettromagnetica di luce bianca, e quindi composta di tutte le frequenze visibili, viene fatta passare attraverso il medesimo gas, e la radiazione uscente ottenuta viene analizzata con il prisma, si osservano delle righe nere in corrispondenza delle medesime frequenze osservate nello spettro di emissione; tali righe nere costituiscono lo **spettro di assorbimento** del gas in questione. Il gas quindi è in grado di assorbire le stesse frequenze che è in grado di emettere.

Di tali spettri è stato fatto un approfondito studio sperimentale negli ultimi decenni dell'Ottocento ed è stato possibile ricavare alcune formule empiriche per la determinazione delle lunghezze d'onda corrispondenti agli spettri. La prima è stata determinata da Balmer<sup>27</sup> il quale nel 1885 ha mostrato che le lunghezze d'onda  $\lambda$  corrispondenti a certe righe dell'idrogeno verificano la relazione

$$\frac{1}{\lambda} = R_H \left( \frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2} \right), \quad n = 3, 4, 5, 6, 7, \quad (15.47)$$

ove  $R_H = 1.097\,373\,156\,816\,0(21) \times 10^7 \text{ m}^{-1}$  è detta costante di Rydberg.<sup>28</sup>

Successivamente vennero scoperte altre serie di righe dello spettro dell'atomo di idrogeno corrispondenti a lunghezze d'onda dell'infrarosso e dell'ultravioletto e date dalle relazioni

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda} &= R_H \left( \frac{1}{12} - \frac{1}{n^2} \right), \quad n = 2, 3, 4, 5, 6, 7 & \frac{1}{\lambda} &= R_H \left( \frac{1}{3^2} - \frac{1}{n^2} \right), \quad n = 4, 5, 6, 7 \\ \frac{1}{\lambda} &= R_H \left( \frac{1}{4^2} - \frac{1}{n^2} \right), \quad n = 5, 6, 7 & \frac{1}{\lambda} &= R_H \left( \frac{1}{5^2} - \frac{1}{n^2} \right), \quad n = 6, 7, \end{aligned} \quad (15.48)$$

<sup>26</sup> Si vedano le equazioni (3.1) e (15.20); per le altre costanti si veda l'appendice A;  $r_0 = 5.291\,772\,109\,03(80) \times 10^{-11}$  m, è il raggio di Bohr (si veda oltre).

<sup>27</sup> Johann Jacob Balmer (1825-1898), fisico tedesco.

<sup>28</sup> Johannes Robert Rydberg (1854-1912), fisico tedesco.

scoperte rispettivamente da Lyman, Paschen, Brackett e Pfund<sup>29</sup> Si trattava quindi di capire perché lo spettro dell'atomo di idrogeno avesse questo comportamento regolare esprimibile con una semplice forma in termini di numeri naturali. Era evidente che una qualche caratteristica dell'atomo restava ancora sconosciuta e inspiegata in termini del modello atomico di Rutherford.

## 15.7 MODELLO ATOMICO DI BOHR.

Una soluzione a questi problemi venne data nel 1913 da Bohr, premio Nobel nel 1922, che propose un modello atomico per l'atomo di idrogeno basato sui seguenti postulati.

1. L'elettrone si muove su di un'orbita circolare attorno al nucleo sottoposto alla forza di attrazione coulombiana e seguendo le leggi della meccanica newtoniana.
2. Le sole orbite possibili sono quelle il cui momento angolare sia un multiplo intero positivo di<sup>30</sup>

$$\hbar = \frac{h}{2\pi} . \quad (15.49)$$

3. In tali orbite l'elettrone è stabile: non emette radiazioni elettromagnetiche e la sua energia è costante.
4. Viene emessa della radiazione se l'elettrone passa da un'orbita di energia  $\mathcal{E}_2$  ad un'orbita di energia inferiore  $\mathcal{E}_1$ ; in tal caso la frequenza della radiazione emessa è

$$\nu = \frac{\mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1}{h} . \quad (15.50)$$

Questi postulati di fatto abbandonano per la prima volta la teoria classica: il primo accoglie l'ipotesi di nucleo atomico positivo introdotto da Rutherford; il secondo introduce la quantizzazione delle orbite elettroniche; il terzo rimuove a priori l'ostacolo dell'instabilità per radiazione elettromagnetica delle orbite dell'atomo di Rutherford; il quarto, infine, accoglie l'idea di Einstein della proporzionalità fra energia e frequenza di un'onda elettromagnetica, per la quale si veda oltre la sezione 16.2.

Si analizzino ora le conseguenze di tali postulati. Siano  $+e$  ed  $M$  la carica e la massa del nucleo dell'atomo di idrogeno e siano  $-e$  e  $m$  la carica e la massa dell'unico elettrone orbitante. Se, come si suppone,  $M \gg m$ , è possibile trascurare il moto del nucleo ed occuparci esclusivamente del moto dell'elettrone. Questo procedimento è analogo a quello adottato nello studio dei moti planetari, ove il moto del Sole può essere trascurato poiché la sua massa è molto maggiore delle masse dei pianeti. A norma del primo postulato, l'elettrone si muove su di un'orbita circolare seguendo le leggi della dinamica classica sottoposto alla forza di attrazione coulombiana, quindi, ricordando che nel moto circolare l'accelerazione è centripeta ed è data dalla formula  $a = v^2/r$ , dalla legge fondamentale della dinamica newtoniana ottiene

$$F = ma \quad \longrightarrow \quad \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r^2} = m \frac{v^2}{r} , \quad (15.51)$$

essendo  $v$  il modulo della velocità orbitale e  $r$  il raggio dell'orbita. Per il secondo postulato deve valere  $L = n\hbar$ , quindi, ricordando che nel moto circolare uniforme il momento angolare vale  $L = mrv$  ottiene

$$mrv = n\hbar , \quad (15.52)$$

da cui

$$v = \frac{n\hbar}{mr} \quad \longrightarrow \quad v^2 = \frac{n^2\hbar^2}{m^2r^2} \quad \longrightarrow \quad m \frac{v^2}{r} = \frac{n^2\hbar^2}{mr^3} . \quad (15.53)$$

<sup>29</sup> Theodore Lyman (1874-1954), fisico statunitense; Louis Paschen (1865-1947), fisico tedesco; Frederick Sumner Brackett (1896-1972), fisico statunitense; August Hermann Pfund (1879-1949), fisico statunitense. .

<sup>30</sup>  $h$  è detta **costante di Planck**; è la costante fondamentale della teoria quantistica e se ne dovrà parlare ancora fra qualche pagina; per il suo valore numerico si veda oltre l'equazione (16.15).

Dal confronto di (15.51) e (15.53), si ottiene immediatamente

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r^2} = \frac{n^2\hbar^2}{mr^3} . \quad (15.54)$$

Quindi le orbite che verificano la condizione ottenuta sono solo quelle il cui raggio e la velocità dell'elettrone verificano le relazioni

$$r_n = \frac{4\pi\epsilon_0\hbar^2}{me^2} n^2 , \quad v_n = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar} \frac{1}{n} , \quad (15.55)$$

ove è stata messa in evidenza la dipendenza dal numero intero  $n$ . Quindi all'aumentare di  $n$  aumenta (quadraticamente) il raggio dell'orbita e diminuisce la velocità e quindi l'energia dell'elettrone.

Per  $n = 1$  si ottiene l'orbita piú piccola cui corrisponde il raggio, detto **raggio di Bohr** (si veda la precedente nota 26).

$$r_1 = \frac{4\pi\epsilon_0\hbar^2}{me^2} = 5.291\,772\,109\,03(80) \times 10^{-11} \text{ m} \simeq 0.5 \text{ \AA} , \quad (15.56)$$

che è in buon accordo con le stime fatte sulla dimensione degli atomi<sup>31</sup>. Per tale orbita la velocità vale

$$v_1 = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar} \simeq 2.2 \times 10^6 \text{ m s}^{-1} . \quad (15.57)$$

Si esamini ora l'energia delle orbite permesse. Essa è data dalla somma di energia cinetica ed energia potenziale; quindi l'energia dell'orbita di raggio  $r_n$  è

$$\mathcal{E}_n = \frac{1}{2}mv_n^2 - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0r_n} = \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0r_n} - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0r_n} = -\frac{e^2}{8\pi\epsilon_0r_n} = -\frac{me^4}{(4\pi\epsilon_0)^22\hbar^2} \frac{1}{n^2} , \quad (15.58)$$

ove si è usata la relazione (15.51) e la prima delle (15.55). Si vede cosí che la quantizzazione del momento angolare postulata da Bohr ha come conseguenza la quantizzazione dell'energia dell'orbita. L'energia dell'orbita piú piccola, che è anche l'energia di legame dell'elettrone al nucleo, è

$$\mathcal{E}_1 = -\frac{me^4}{(4\pi\epsilon_0)^22\hbar^2} = 13.605\,693\,14 \text{ eV} , \quad (15.59)$$

valore che corrisponde bene al dato sperimentale:  $\mathcal{E}_1 = -13.605\,693\,122\,994(26) \text{ eV}$ <sup>32</sup>.

Il quarto postulato di Bohr a questo punto consente di determinare la frequenza emessa da un atomo quando l'elettrone passa da un'orbita a energia maggiore a uno ad energia minore; sia dunque  $E_2 > E_1$  e quindi  $n_1 < n_2$ , si ottiene

$$\nu = \frac{\mathcal{E}_{n_2} - \mathcal{E}_{n_1}}{h} = \frac{me^4}{(4\pi\epsilon_0)^22\hbar^2h} \left( \frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} \right) = \frac{me^4}{(4\pi\epsilon_0)^24\pi\hbar^3} \left( \frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} \right) , \quad (15.60)$$

cui corrisponde, usando la relazione  $c = \lambda\nu$  che lega frequenza, lunghezza e velocità di un'onda,

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{\nu}{c} = \frac{me^4}{(4\pi\epsilon_0)^24\pi\hbar^3c} \left( \frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} \right) . \quad (15.61)$$

Questa formula rende conto delle formule ottenute sperimentalmente da Balmer, Lyman, Paschen, Brackett e Pfund discusse nel paragrafo precedente se si identifica

$$R_H = \frac{me^4}{(4\pi\epsilon_0)^24\pi\hbar^3c} . \quad (15.62)$$

<sup>31</sup>  $\text{\AA}$  è il simbolo dell'**ångstrom**, unità di misura di lunghezza particolarmente adatta a oggetti microscopici e molto usata in teoria atomica ed in spettroscopia; prende il nome da Anders Jonas Ångstrom (1814-1974), fisico danese. Vale la relazione  $1 \text{ \AA} = 10 \times 10^{-10} \text{ m}$ .

<sup>32</sup> Un *elettronvolt* (simbolo eV) è il lavoro fatto su un elettrone da una differenza di potenziale di un volt:  $1 \text{ eV} = 1.602\,176\,487(40) \times 10^{-19} \text{ J}$ ; si tratta di una unità di misura di energia utile su scala atomica, mentre su scala subatomica vengono usati i suoi multipli MeV e GeV.

Questa identificazione è confortata dal confronto fra valori teorici e dati sperimentali. Si può così concludere che, nel modello atomico di Bohr, le diverse righe di uno spettro atomico sono spiegate come transizioni di un elettrone da un'orbita ad energia maggiore ad una ad energia minore. Il riscontro sperimentale può essere migliorato tenendo conto del fatto che la massa del nucleo non è infinita e che quindi nucleo ed elettrone si muovono entrambi attorno al comune centro di massa. Con questa correzione l'accordo fra teoria e dati sperimentali è ottimo.

# 16

## MECCANICA QUANTISTICA.

---

### 16.1 INTRODUZIONE AL PROBLEMA. IL CORPO NERO.

Verso la fine del XIX secolo il modello teorico costituito dalla meccanica di Newton, sviluppata tra il XVII ed il XVIII secolo, e dalla Termodinamica, sviluppata nel XIX secolo, cominciava a mostrare i suoi punti di debolezza. Vennero scoperti infatti alcuni fenomeni che non ammettevano una spiegazione nell'ambito del modello allora accettato. Dallo studio e dall'analisi di questi problemi nacquero, nei primi decenni del XX secolo, la Teoria della Relatività e la Meccanica Quantistica, le due grandi teorie che hanno cambiato radicalmente il modo di affrontare la descrizione scientifica della realtà, dando inoltre la stura ad un importantissimo dibattito epistemologico e filosofico che non si può certo dire ancora concluso.

In questo capitolo si esaminano i fatti che hanno portato alla nascita della meccanica quantistica, cercando di dare una descrizione, necessariamente qualitativa e per cenni, della struttura teorica che è stata creata per dare conto di questi fatti.

Uno dei problemi con cui si dibatteva la fisica teorica della fine dell'Ottocento era quello di dare una descrizione coerente del fenomeno di radiazione del corpo nero. Il problema può essere illustrato secondo le linee seguenti.

È un fatto sperimentale che la materia condensata, solida o liquida, assorbe ed emette energia sotto forma di *radiazione termica*, cioè, detto in altro modo, assorbe ed emette calore nella forma di radiazioni elettromagnetiche.

Si dice **potere emissivo**  $e(\nu, T)$  di un corpo di temperatura  $T$  la potenza della radiazione di frequenza  $\nu$  emessa dal corpo per unità di superficie; si dice **potere assorbente**  $a(\nu, T)$  di un corpo il rapporto fra la potenza assorbita dal corpo e quella incidente sul corpo.

Le quantità  $e(\nu, T)$  ed  $a(\nu, T)$  dipendono, oltre che dalla frequenza e dalla temperatura, anche dalle proprietà fisiche del corpo e della sua superficie; esistono però delle grandezze universali che non dipendono dal corpo; queste proprietà di universalità sono stabilite dalle seguenti due **leggi di Kirchhoff**.<sup>1</sup>

***Prima legge di Kirchhoff.** L'energia per unità di volume  $u(\nu, T)$  della radiazione di frequenza  $\nu$  contenuta all'interno di una cavità in equilibrio termico a temperatura  $T$ , non dipende dalla cavità, ma solo da  $\nu$  e  $T$ .*

***Seconda legge di Kirchhoff.** Il rapporto fra il potere emissivo  $e(\nu, T)$  ed il potere assorbente  $a(\nu, T)$  di un corpo non dipende dal corpo, ma solo da  $\nu$  e  $T$ .*

Le dimostrazioni delle due leggi di Kirchhoff sono riportate, per completezza, in carattere tipografico minore; il lettore non interessato può passare oltre senza compromettere le comprensioni di quel che segue.

#### **Dimostrazione della prima legge.**

Si considerino due cavità  $A$  e  $B$  aventi la stessa temperatura  $T$  e si supponga per assurdo che per un certo valore  $\bar{\nu}$  della frequenza valga

$$u_A(\bar{\nu}, T) > u_B(\bar{\nu}, T) . \quad (16.1)$$

Si consideri allora un dispositivo che colleghi le due cavità in modo tale da consentire il passaggio della sola radiazione di frequenza  $\bar{\nu}$ ; si pensi, per esempio, ad una fibra ottica. Attraverso tale dispositivo di collegamento si avrà dunque un flusso di energia da  $A$  a  $B$  che tenda a ristabilire l'equilibrio energetico, conseguentemente la temperatura della cavità  $B$  aumenta. A questo punto fra  $A$  e  $B$  vi è una differenza di temperatura creata spontaneamente da una situazione di equilibrio termico; questa differenza di temperatura può essere usata per far funzionare una macchina termica che compia un certo lavoro

---

<sup>1</sup> Gustav Robert Kirchhoff (1824-1887), fisico e matematico tedesco.

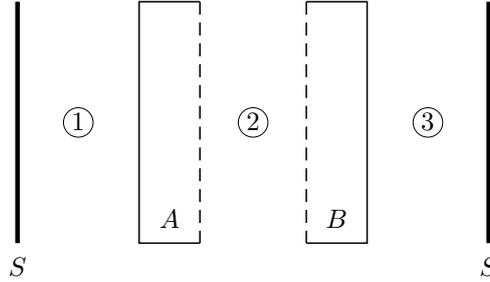
riportando  $B$  alla temperatura  $T$ . Questo viola il secondo principio della termodinamica nell'enunciato di Kelvin poiché il sistema ha compiuto una trasformazione ciclica in cui il calore assorbito dall'unica sorgente  $A$  viene interamente trasformato in lavoro; l'ipotesi (16.1) è quindi impossibile; allo stesso modo si dimostra l'impossibilità della disuguaglianza opposta, pertanto

$$u_A(\bar{\nu}, T) = u_B(\bar{\nu}, T) ; \quad (16.2)$$

visto che le due cavità sono arbitrarie, la quantità  $u(\nu, T)$  non dipende dalla cavità.

**Dimostrazione della seconda legge.<sup>2</sup>**

Si considerino due corpi  $A$  e  $B$  posti fra due specchi  $S$  individuando tre zone 1, 2 e 3 come in figura.



**Figura 16.1:** La seconda legge di Kirchhoff.

I due corpi siano trasparenti a tutte le frequenze esclusa  $\bar{\nu}$  e siano in grado di assorbire ed emettere la frequenza  $\bar{\nu}$  solo lungo le due superficie affacciate, tratteggiate in figura. Si indichino, per alleggerire la notazione,  $(e_A, a_A)$  ed  $(e_B, a_B)$  i poteri emissivi ed assorbenti di  $A$  e  $B$  alla frequenza  $\bar{\nu}$  ed alla temperatura  $T$ .

L'energia totale emessa da  $A$  in un certo tempo è proporzionale al potere emissivo, viene dunque indicata con  $\chi e_A$ , e similmente per  $B$ .

All'equilibrio termico con temperatura  $T$  nella zona 1 l'energia  $\epsilon_D^{(1)}$  che fluisce verso destra deve essere uguale all'energia  $\epsilon_S^{(1)}$  che fluisce verso sinistra; quest'ultima è uguale a quella che fluiva nella zona 2 e che non è stata assorbita da  $A$ ; quindi

$$\epsilon_D^{(1)} = (1 - a_A)\epsilon_S^{(2)} ; \quad (16.3)$$

similmente per la zona 3 vale

$$\epsilon_S^{(3)} = (1 - a_B)\epsilon_D^{(2)} . \quad (16.4)$$

Ora, l'energia che si propaga verso sinistra nella zona 2 è la somma di quella emessa da  $B$  piú quella che proviene dalla zona 3 attraverso  $B$ , quindi

$$\epsilon_S^{(2)} = \chi e_B + \epsilon_S^{(3)} = \chi e_B + (1 - a_B)\epsilon_D^{(2)} . \quad (16.5)$$

Similmente, per l'energia che si propaga verso destra nella zona 2 vale:

$$\epsilon_D^{(2)} = \chi e_A + \epsilon_D^{(1)} = \chi e_A + (1 - a_A)\epsilon_S^{(2)} . \quad (16.6)$$

All'equilibrio termico i due corpi devono emettere tanta energia quanta ne assorbono, devono quindi valere le relazioni

$$\chi e_A = a_A \epsilon_S^{(2)} \quad , \quad \chi e_B = a_B \epsilon_D^{(2)} \quad (16.7)$$

sostituendo la prima di queste equazioni nella (16.6) si trova

$$\epsilon_D^{(2)} = a_A \epsilon_S^{(2)} + \epsilon_S^{(2)} - a_A \epsilon_S^{(2)} \quad \longrightarrow \quad \epsilon_D^{(2)} = \epsilon_S^{(2)} , \quad (16.8)$$

da cui, usando entrambe le (16.7) si ottiene

$$\frac{\chi e_A}{a_A} = \frac{\chi e_B}{a_B} \quad \longrightarrow \quad \frac{e_A}{a_A} = \frac{e_B}{a_B} \quad (16.9)$$

che è quanto si doveva dimostrare.

<sup>2</sup> Questa dimostrazione segue sostanzialmente la dimostrazione originale fornita da Kirchhoff; si vedano anche M. Planck, *The Theory of Heat Radiation*, Dover Publications, G. Paffuti, *Note sulla nascita della Meccanica Quantistica*, Edizioni Plus.

Si definisce **corpo nero** un corpo che assorbe tutta la radiazione che incide su di esso per qualsiasi valore della frequenza e della temperatura. Per un corpo nero quindi il potere assorbente vale 1. Usando il secondo teorema di Kirchhoff si conclude quindi che tutti i corpi neri hanno lo stesso potere emissivo. La radiazione emessa da un corpo nero, detta **radiazione di corpo nero** è la stessa per tutti i corpi neri aventi la stessa temperatura.

Lo spettro di tale radiazione è continuo<sup>3</sup> anche se gran parte dell'intensità luminosa è emessa ad una certa frequenza che viene detta frequenza principale. Si osservi che lo spettro di emissione di un corpo nero non contiene radiazione riflessa.

Per ottenere un corpo che sia con ottima approssimazione un corpo nero si costruisca una cavità, con le pareti interne annerite in modo da favorire l'assorbimento, e con un piccolo foro. La radiazione che penetra nella cavità attraverso il foro viene riflessa sulle pareti interne della cavità; ad ogni riflessione parte della radiazione viene assorbita; in tal modo la radiazione che riesce a fuoriuscire dal piccolo foro può essere considerata trascurabile. A temperatura ambiente osservando dall'estero il foro esso appare nero; aumentando la temperatura appare dapprima rosso quindi il colore cambia fino a diventare giallo e poi violetto. Anche a temperatura ambiente la cavità emette radiazioni ma, essendo infrarosse, non sono visibili all'occhio umano.

Utilizzando la fisica classica si possono ottenere alcuni risultati.

Il primo è la **legge di Stefan-Boltzmann**<sup>4</sup> che esprime la dipendenza della potenza totale  $W$  emessa dall'unità di superficie di un corpo nero di temperatura  $T$ :

$$W = \sigma T^4 \quad (16.10)$$

ove  $\sigma = 5.670\,374\,419 \times 10^{-8} \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-4}$  è detta *costante di Stefan-Boltzmann*.

Il secondo risultato è la **legge dello spostamento di Wien**<sup>5</sup> secondo la quale la lunghezza d'onda alla quale il corpo nero emette la maggior quantità di energia, cioè la lunghezza d'onda  $\lambda_{max}$  a cui corrisponde il massimo della funzione  $u(\nu, T)$ , è inversamente proporzionale alla temperatura:

$$\lambda_{max} T = \text{cost.} \quad (16.11)$$

Per interpretare questa legge, si consideri l'esempio dello spettro visibile. Ad una certa temperatura il corpo nero emette la quantità maggiore di energia per una lunghezza d'onda  $\lambda_{max}$  che corrisponde ad un certo colore; questo colore varia all'aumentare della temperatura dal rosso al violetto. Questo consente, per esempio, di determinare la temperatura di una stella studiando le lunghezza d'onda della radiazione emessa.

Il terzo risultato è il fatto che la densità di energia  $u(\nu, T)$  della radiazione emessa a frequenza  $\nu$  a temperatura  $T$  è esprimibile come dovuta ad una serie di oscillatori armonici non interagenti in termini dei quali è possibile determinare la densità di energia elettromagnetica  $u(\nu)\Delta\nu$  contenuta nell'intervallo fra le frequenze  $\nu$  e  $\nu + \Delta\nu$ , ottenendo la relazione

$$u(\nu, T) = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} kT, \quad (16.12)$$

ove  $c$  è la velocità della luce,  $k$  la costante di Boltzmann e  $T$  la temperatura assoluta di equilibrio del corpo nero. Questa relazione è detta **legge di Rayleigh-Jeans**.<sup>6</sup>

Le evidenze sperimentali mostrano un comportamento del tipo illustrato qualitativamente dalla linea continua di figura 16.2. Si vede che esiste un valore  $\bar{\nu}$  della frequenza per cui è massima la densità di energia emessa. Tale frequenza aumenta con la temperatura: è la legge di Wien.

La legge di Rayleigh-Jeans è rappresentata dalla linea tratteggiata. L'accordo è abbastanza buono per piccole frequenze, ma diventa completamente errato per frequenze grandi; si osservi in particolare che la densità di energia cresce con le frequenze, quindi, dovendo considerare tutte le frequenze possibili, dentro la cavità dovrebbe esserci un'energia infinita: risultato palesemente assurdo.

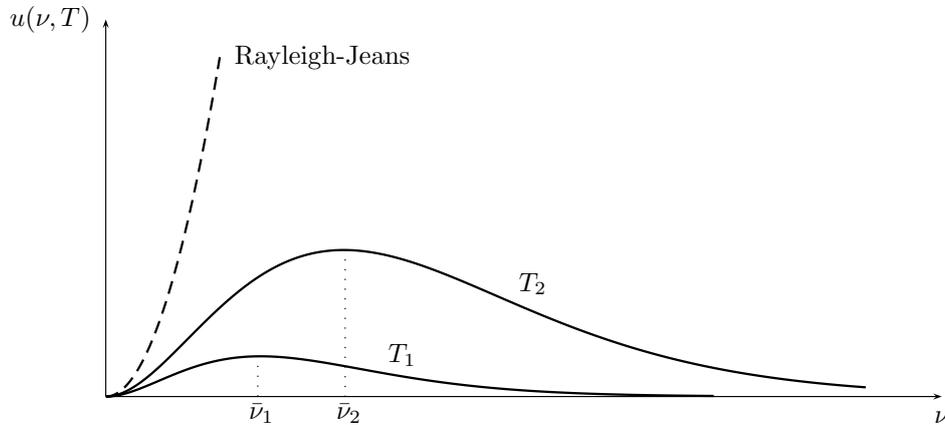
<sup>3</sup> Uno spettro è detto continuo quando le onde elettromagnetiche hanno frequenze disposte in modo continuo cioè per qualunque valore reale esiste un'onda emessa che abbia frequenza uguale a quel valore.

<sup>4</sup> Josef Stefan (1835-1893), fisico austriaco.

<sup>5</sup> Wilhelm Wien (1864-1928), fisico tedesco.

<sup>6</sup> James Hopwood Jeans (1877-1946), fisico inglese.

L'area sottostante la curva è l'energia totale emessa e, come si potrebbe dimostrare, è finita. Quindi la teoria classica, benché in grado di spiegare il carattere di universalità della radiazione del corpo nero, risulta incapace di rendere conto del tipo di spettro.



**Figura 16.2:** Confronto fra la curva di Rayleigh-Jeans e le curve sperimentali.

La spiegazione dello spettro di emissione del corpo nero è dovuta a Planck<sup>7</sup> che nel 1900 fece l'ipotesi che gli scambi di energia fra la radiazione e le pareti della cavità potessero avvenire solo per multipli di una quantità fondamentale, proporzionale alla frequenza della radiazione. Suppose quindi che tale energia si potesse scrivere nella forma

$$\mathcal{E} = nh\nu, \quad (16.13)$$

ove  $n$  è un numero intero e  $h$  è una costante di proporzionalità, detta **costante di Planck**. Quest'ipotesi gli consentì di ricavare la seguente formula per la densità di energia

$$u(\nu, T) = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \frac{1}{e^{h\nu/KT} - 1}. \quad (16.14)$$

Con questa espressione l'accordo con i dati sperimentali è eccellente. Il valore, esatto, di  $h$  è

$$h = 6.626\,070\,15 \times 10^{-34} \text{ J s}. \quad (16.15)$$

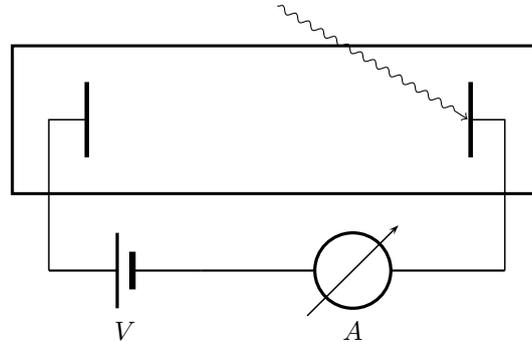
Il lavoro di Planck di fatto segna l'inizio della fisica quantistica.

## 16.2 EFFETTO FOTOELETTRICO.

Il successivo passo avanti venne nel 1905 ad opera di Einstein; questi infatti utilizzò ed estese l'ipotesi di Planck per dare una spiegazione teorica dell'effetto fotoelettrico che era stato scoperto nel 1886 da Hertz e che la fisica classica non era in grado di spiegare. La questione può essere riassunta nel modo seguente. All'interno di un tubo in cui sia stato praticato il vuoto si fa incidere una radiazione monocromatica (cioè costituita da onde di un'unica frequenza) sopra una lamina metallica, detta catodo. Affacciata al catodo si trova una seconda lamina, detta anodo, e fra esse un generatore mantiene una differenza di potenziale  $V$  che può essere variata a piacere dello sperimentatore; si considererà positiva la differenza di potenziale quando il catodo si trova ad un potenziale minore dell'anodo. In serie al generatore è anche posto un amperometro  $A$  per la misura della corrente eventualmente circolante nel circuito. Quando la radiazione incide sul catodo si ha un'emissione di elettroni che, accelerati dalla differenza di potenziale positiva applicata, vanno a cadere sull'anodo; tali elettroni sono rilevati come corrente elettrica dall'amperometro.

<sup>7</sup> Max Planck (1858-1947), fisico tedesco.

Eseguendo l'esperimento si osservano i seguenti fatti. La corrente misurata dall'amperometro aumenta con il potenziale applicato fino ad un certo valore, detto *di saturazione*, per il quale ogni singolo elettrone emesso dal catodo è raccolto dall'anodo. Il valore della corrente di saturazione dipende dall'intensità  $I$  della radiazione incidente. In figura 16.4a è riportata la dipendenza della corrente  $i$  in funzione della differenza di potenziale  $V$  applicata per due diversi valori ( $I_1 < I_2$ ) dell'intensità.



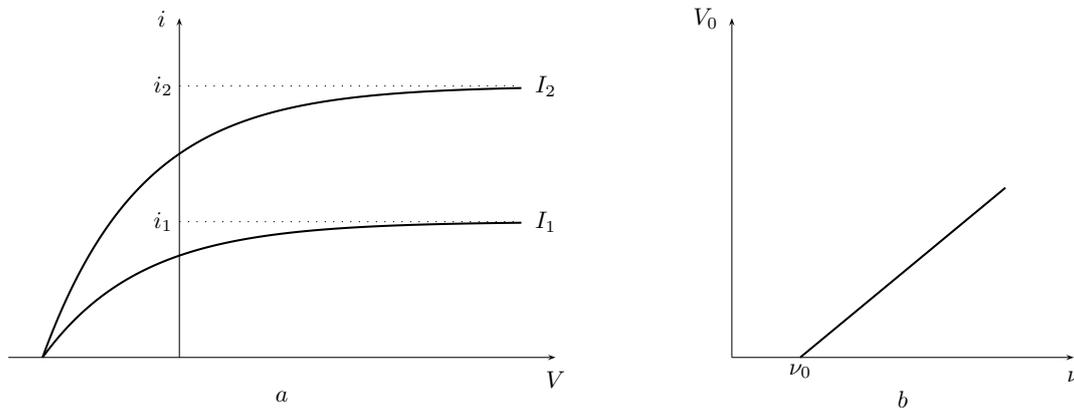
**Figura 16.3:** Schema dell'apparato sperimentale per l'effetto fotoelettrico.

Si osserva inoltre che invertendo il potenziale, cioè ponendo l'anodo ad un potenziale minore rispetto al catodo, si misura ancora una certa corrente; questo è dovuto al fatto che gli elettroni vengono emessi con una certa energia cinetica e quindi, benché frenati dal potenziale che si oppone al loro moto, riescono a raggiungere l'anodo.

All'aumentare del potenziale inverso la corrente diminuisce fino a raggiungere, per un certo valore  $V_0$  del potenziale detto *potenziale d'arresto*, il valore zero. Il potenziale di arresto è quello per cui il lavoro frenante  $eV_0$  fatto su ciascun elettrone uguaglia l'energia cinetica massima,  $\mathcal{E}_c^M$  degli elettroni emessi, vale cioè

$$\mathcal{E}_c^M = eV_0 . \tag{16.16}$$

Risulta che il potenziale d'arresto è indipendente dall'intensità della radiazione incidente ma cresce linearmente con la frequenza della radiazione incidente, si veda la figura 16.4b.



**Figura 16.4:** Illustrazione dei risultati sperimentali dell'effetto fotoelettrico.

Inoltre si osserva una *frequenza minima*  $\nu_0$  al di sotto della quale il potenziale d'arresto è nullo e quindi l'energia cinetica massima di emissione degli elettroni è zero: cioè, in altre parole, non si ha emissione di elettroni. Infine non si è mai osservato nessun ritardo temporale fra l'inizio dell'incidenza dell'onda e l'emissione degli elettroni indipendentemente dalla intensità della radiazione. Il modello ondulatorio della radiazione elettromagnetica non riesce a rendere conto dei precedenti fatti sperimentali; di seguito se ne analizza il motivo punto per punto.

1. Secondo il modello ondulatorio aumentando l'intensità dovrebbe aumentare il campo elettrico agente sugli elettroni e con esso la forza con la quale sono strappati dai loro atomi

e quindi l'energia cinetica con la quale gli elettroni sono emessi; ma, come visto,  $V_0$ , e quindi  $\mathcal{E}_c^M$ , è indipendente dall'intensità dell'onda incidente.

2. Secondo il modello ondulatorio l'effetto di emissione dovrebbe verificarsi per qualunque frequenza della radiazione incidente, purché l'intensità della radiazione sia sufficientemente alta; infatti, per ogni frequenza, aumentando  $I$  aumenta il campo elettrico, e quindi la forza di estrazione; come visto sopra, invece, esiste una frequenza minima.
3. Secondo il modello ondulatorio per una radiazione sufficientemente debole dovrebbe passare un certo tempo affinché un elettrone riceva l'energia sufficiente all'estrazione; si è invece visto che il processo di estrazione è istantaneo.

Per dare una spiegazione di questi fatti, Einstein<sup>8</sup> non solo accolse l'ipotesi di Planck secondo cui, come visto sopra, la radiazione scambia con la materia energia quantizzata, ma la estese postulando che la radiazione elettromagnetica consista di quantità discrete che sono dette i **quanti**<sup>9</sup> della radiazione elettromagnetica e sono anche noti con il nome di **fotoni**<sup>10</sup>, la cui energia è legata alla frequenza della relazione dalla relazione detta di **Planck-Einstein**:

$$\mathcal{E} = h\nu . \quad (16.17)$$

Per seguire il procedimento di Einstein si indichi con  $\mathcal{E}_i$  l'energia di estrazione degli elettroni, detta anche **energia di ionizzazione**, corrispondente al lavoro che occorre fare sull'elettrone per sottrarlo alla forza di attrazione del nucleo e che misura qualche elettronvolt. L'energia portata dal fotone viene utilizzata in parte per il lavoro di estrazione, mentre l'energia rimanente si ritrova come energia cinetica  $K$  dell'elettrone estratto; questa allora è data da

$$\mathcal{E}_c = h\nu - \mathcal{E}_i . \quad (16.18)$$

Si vede che ora è semplice rendere conto della fenomenologia sopra descritta; si osservi infatti che l'energia cinetica dell'elettrone emesso non dipende dall'intensità della radiazione ma solo dalla frequenza. Aumentando l'intensità della radiazione, aumentano i fotoni, quindi aumentano gli elettroni estratti e quindi aumenta la corrente. Inoltre la frequenza minima è spiegata osservando che l'energia cinetica è nulla, cioè  $\mathcal{E}_c = 0$ , quando la frequenza assume il valore  $\nu_0$  tale che

$$h\nu_0 = \mathcal{E}_i ; \quad (16.19)$$

se la frequenza è al di sotto del valore  $\nu_0$  non ci può essere emissione poiché l'energia incidente non è sufficiente all'estrazione.

Venendo al potenziale d'arresto, il potenziale che annulla la corrente è quello che fornisce un lavoro sufficiente a frenare gli elettroni, cioè quello che uguaglia l'energia cinetica degli elettroni emessi; quindi

$$\mathcal{E}_c = eV_0 \quad \longrightarrow \quad eV_0 = h\nu - \mathcal{E}_i = h\nu - h\nu_0 \quad \longrightarrow \quad V_0 = \frac{h\nu}{e} - \frac{h\nu_0}{e} . \quad (16.20)$$

Si è così ottenuta l'equazione della retta che dà la dipendenza del potenziale d'arresto dalla frequenza.

Infine anche l'assenza del ritardo temporale è spiegata infatti l'energia necessaria all'estrazione arriva istantaneamente e tutta insieme con il fotone e non poco per volta come nel modello ondulatorio.

Si può così concludere affermando che il modello a fotoni della radiazione elettromagnetica fornisce una completa e convincente spiegazione dell'effetto fotoelettrico, che era invece completamente incomprensibile in termini del modello ondulatorio classico.

Questo successo è stato particolarmente determinante a trasformare l'ipotesi matematica di

<sup>8</sup> Non sarà inutile ricordare che il lavoro sulla spiegazione dell'effetto fotoelettrico mediante il modello a fotoni è valso ad Einstein il Premio Nobel nel 1921.

<sup>9</sup> L'origine della parola *quanto* è dall'inglese *quantum* (pl. *quanta*) che significa 'porzione', 'quantità richiesta', e che, a sua volta, viene dal neutro dell'aggettivo latino *quantus*.

<sup>10</sup> L'origine del nome *fotone* è dal greco *phos*, *phōs* che, com'è noto, significa 'luce'.

Planck in un modello fisico. Il modello a fotoni sembra quindi affermare che la vera natura della luce è corpuscolare; d'altra parte sembra non sia possibile, mediante il modello a fotoni, spiegare le proprietà tipicamente ondulatorie della luce, come interferenza e diffrazione. Apparentemente la luce si comporta a volte come onda, a volte come particella. Il problema quindi, invece di risolversi, si complica.

### 16.3 TRE ESPERIMENTI.

<sup>11</sup>Si impara molto altro sul comportamento quantistico esaminando un esperimento eseguito, prima con proiettili, poi con onde e quindi con particelle subatomiche, per esempio elettroni.

#### Un esperimento con proiettili.

Si consideri una mitragliatrice  $M$  che spara proiettili in continuazione spargendoli in modo casuale (quindi sostanzialmente uniforme), su una regione angolare piuttosto ampia.

Di fronte alla mitragliatrice c'è un muro che blocca ogni proiettile che lo investe tranne quelli che riescono a passare attraverso due piccoli fori, indicati con i numeri 1 e 2. Dietro il muro vi è uno schermo che assorbe i proiettili che lo colpiscono; sulla superficie dello schermo c'è un rivelatore di proiettili mobile  $R$ : può essere pensato come un secchio pieno di sabbia in modo tale che tutti i proiettili che vi entrano sono accumulati. In ogni momento si può vuotare il secchio e contare quanti proiettili sono arrivati nel punto dello schermo in cui era stato collocato il rivelatore. Il rivelatore può essere spostato su e giù lungo lo schermo lungo una direzione che si indica con  $x$ . Con un simile apparecchio è possibile rispondere alla domanda seguente: qual è la probabilità<sup>12</sup> che un proiettile, che passa attraverso uno dei due fori praticati sul muro, arrivi sullo schermo in una certa posizione  $x$ . Per probabilità qui si intende il rapporto fra il numero di proiettili che arrivano sul rivelatore ed il numero totale dei proiettili sparati dalla mitragliatrice; si può dire più semplicemente che la probabilità in questione è proporzionale al numero dei proiettili raccolti dal rivelatore. La probabilità sarà evidentemente una funzione di  $x$ . Il risultato dell'esperimento è riportato in figura 16.5 ove si è indicato con  $P_1$  la probabilità ottenuta eseguendo l'esperimento con il foro 2 chiuso e quindi con i proiettili che passano solo dal foro 1, e con  $P_2$  la probabilità ottenuta eseguendo l'esperimento con il foro 1 chiuso e quindi con i proiettili che passano solo dal foro 2.

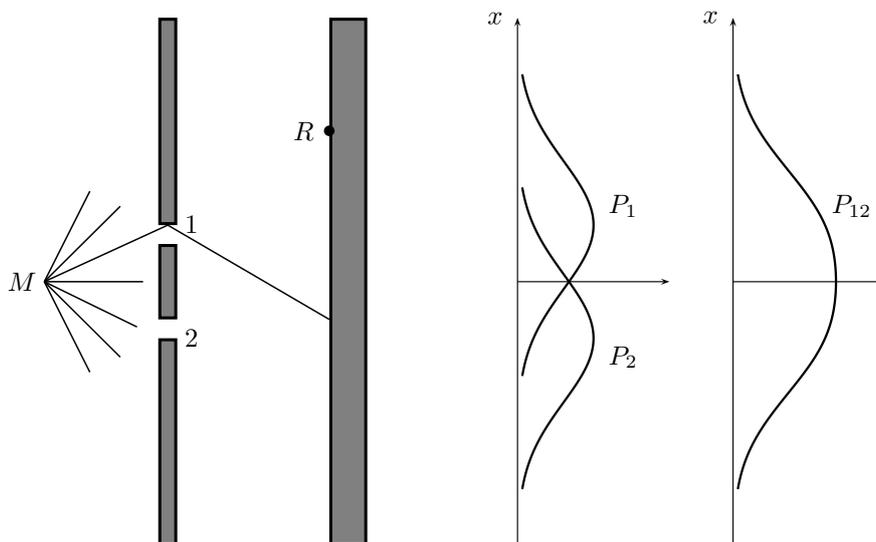


Figura 16.5: Un esperimento con proiettili.

<sup>11</sup> Il contenuto di questo capitolo è preso in gran parte, figure incluse, dal primo capitolo di *La fisica di Feynman*, vol. 3, di Richard P. Feynman, Zanichelli.

<sup>12</sup> È necessario parlare di probabilità perché non è possibile dire con precisione dove andrà a finire un proiettile che può rimbalzare in modo imprevedibile su bordi dei fori.

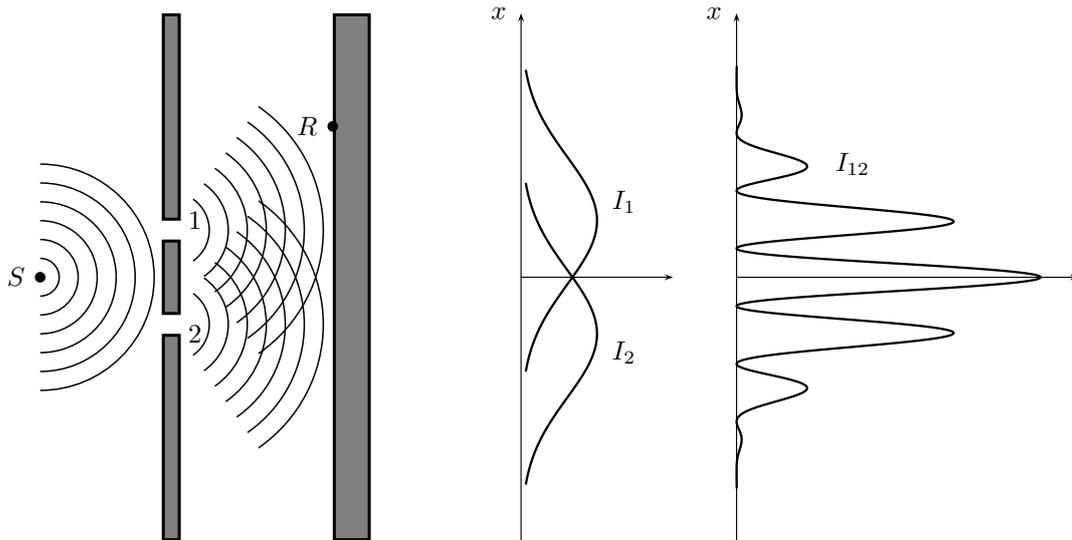
Con  $P_{12}$  è indicata la probabilità quando entrambi i fori sono aperti. Come si vede il risultato è quello che ci si aspetterebbe intuitivamente:

$$P_{12} = P_1 + P_2 \quad (16.21)$$

cioè l'effetto totale è la somma degli effetti parziali.

### Un esperimento con onde.

Si ripeta l'esperimento precedente ponendo al posto della mitragliatrice una sorgente  $S$  di onde in acqua.



**Figura 16.6:** Un esperimento con onde.

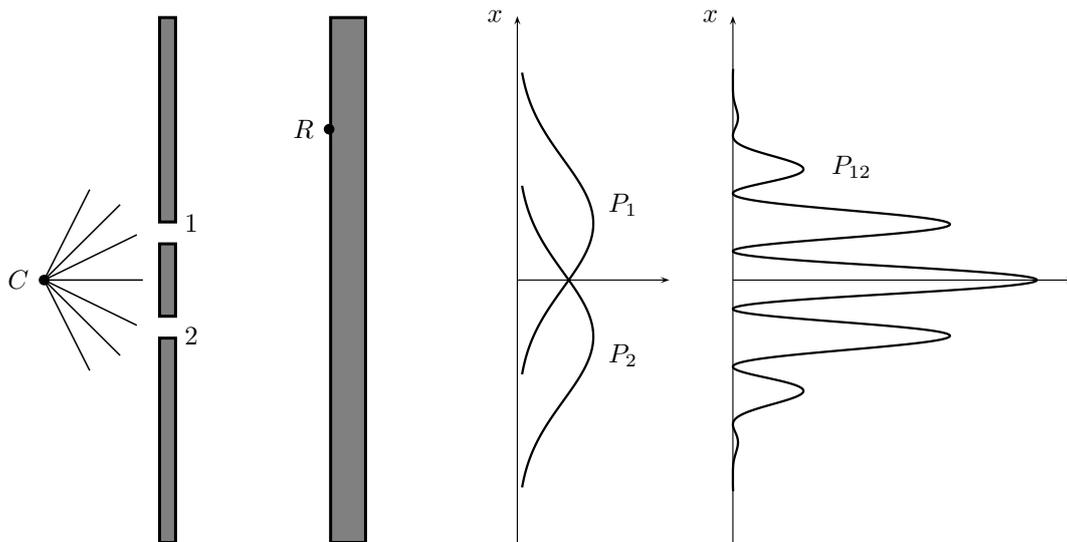
In questo caso il rivelatore sarà un opportuno dispositivo in grado di misurare l'ampiezza dell'onda che lo raggiunge; dalla misura tramite il rivelatore sarà possibile risalire all'intensità portata dall'onda che, com'è noto, è pari al quadrato dell'ampiezza. Utilizzando opportunamente un apparato così concepito è possibile misurare l'energia che raggiunge il rivelatore nell'unità di tempo, che, come noto, è proporzionale all'intensità.

Occorre notare che la situazione in questo caso è sensibilmente diversa dal caso dell'esperimento con proiettili. In quel caso infatti l'energia giungeva al rivelatore per quanti, cioè non era possibile che al rivelatore arrivasse qualcosa di più piccolo di un singolo proiettile (il quanto appunto), e il totale rilevato è certamente un multiplo intero di tale quanto. Qui invece vi è un'onda la cui ampiezza, e quindi l'energia, può essere facilmente ridotta anche a valori piccolissimi e non si vede alcun motivo perché debba essere quantizzata. Facendo l'esperimento si ottiene per l'intensità il grafico rappresentato in figura 16.6. Si osservi che tenendo chiuso il foro 1 od il foro 2 si ottengono figure simili a quelle ottenute nel corrispondente esperimento con i proiettili, mentre tenendo aperti entrambi i fori si ottiene la figura d'interferenza rappresentata che non è, evidentemente, la somma delle figure a foro singolo come nel caso dei proiettili.

Dall'esame dei due esperimenti fin qui realizzati sembra ragionevole concludere che quando la natura di ciò che si propaga attraverso i due fori è quantizzata (caso dei proiettili) sullo schermo si osserva la somma di ciò che si osserva quando i fori sono aperti uno alla volta. Viceversa se ciò che si propaga è di natura continua e non quantizzata (le onde), si osserva una figura di interferenza con molti massimi e minimi. Si vedrà subito che questa conclusione è errata.

### Un esperimento con elettroni.

Si ripeta ancora lo stesso esperimento con elettroni, supponendo di poter disporre di un 'cannoncino elettronico'  $C$  che emette elettroni tutti approssimativamente con la stessa energia; il rivelatore sarà ora un dispositivo, di cui non interessa qui la natura, collegato ad un altoparlante che faccia *click* ogni volta che un elettrone raggiunge il dispositivo.



**Figura 16.7:** Un esperimento con elettroni.

In tal modo sarà possibile contare gli elettroni che, in media, raggiungono un certo punto dello schermo in un tempo dato, per esempio in un minuto. Il numero di tali elettroni è evidentemente proporzionale all'energia giunta in quel punto. Eseguendo la misura in molti punti dello schermo si può costruire il grafico riportato in figura 16.7. Riducendo l'emissione degli elettroni del cannoncino è possibile ridurre la frequenza dei click ma il suono di ogni singolo click resta lo stesso. Inoltre ponendo più rivelatori in punti diversi dello schermo si osserva che essi non rivelano mai due elettroni simultaneamente, cioè non si verifica mai che due click siano contemporanei. Si può così concludere che il rivelatore rivela qualcosa di natura granulare, quantizzata: i quanti hanno tutti le stesse dimensioni ed arrivano tutti interi, come accadeva nel primo esperimento con proiettili. In effetti tenendo aperto un solo foro si ottiene la solita figura a campana già osservata per i proiettili e per le onde. Ma quando entrambi i fori sono aperti si ottiene una figura di interferenza simile a quella ottenuta con le onde; Quindi gli elettroni, pur essendo (come i proiettili) particelle indivisibili di materia hanno un *comportamento ondulatorio* simile a quello delle onde. L'apparente paradosso della figura d'interferenza prodotta dagli elettroni è messo in chiara luce dalla considerazione seguente. Quando un solo foro è aperto gli elettroni raggiungono punti dello schermo che non riescono a raggiungere quando entrambi i fori sono aperti. Sembrerebbe così che aprendo un foro in *più* arrivino *meno* elettroni, cosa evidentemente paradossale.

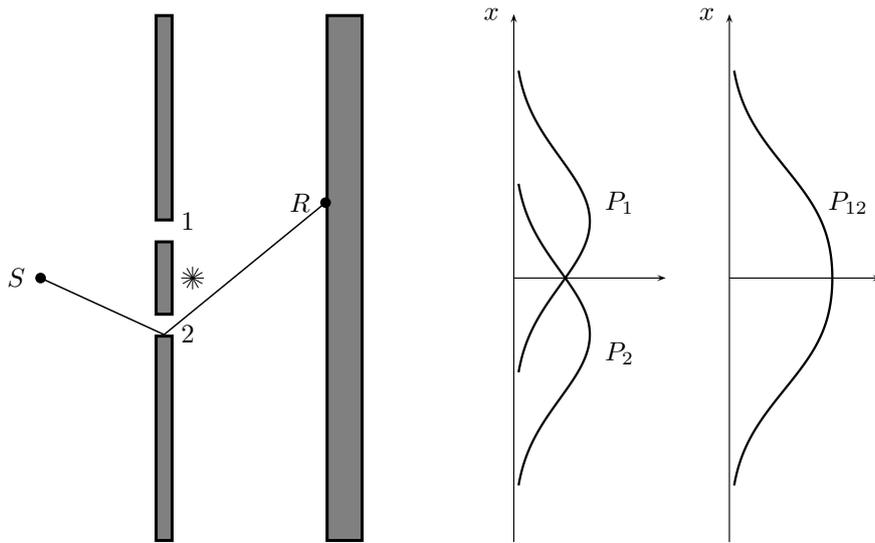
Si può riassumere il comportamento osservato nel modo seguente.

*Gli elettroni arrivano in granuli, come i proiettili, e la loro probabilità di arrivo varia con la distribuzione di intensità propria di un'onda.*

Precisamente in questo senso si dice che *gli elettroni si comportano talvolta come una particella e talvolta come un'onda*. Per analizzare ulteriormente il fenomeno si vuole indagare se un *singolo* elettrone passa attraverso il foro 1 oppure attraverso il foro 2.

A questo scopo è necessario fare un ulteriore esperimento. Si utilizza ancora l'apparato sperimentale visto in precedenza aggiungendo però una sorgente di luce molto intensa posta fra i due fori. Gli elettroni, come tutte le cariche elettriche, diffondono la luce, quindi ci si aspetta di vedere un lampo luminoso in corrispondenza di un foro quando un elettrone ci passa attraverso. Per esempio se l'elettrone in questione passa attraverso il foro 2, seguendo la traiettoria disegnata in figura, si dovrebbe vedere un lampo di luce in prossimità del punto *A*.

Eseguendo l'esperimento si osserva che ogni volta che si ode un click dal rivelatore si veda anche un lampo luminoso vicino al foro 1 o vicino al foro 2 e non si vedono mai due lampi simultanei vicino ad entrambi i fori. Tutto ciò è verificato qualunque sia la posizione del rivelatore, cioè è vero indipendentemente dal punto in cui l'elettrone arriva sullo schermo. In questo caso però il



**Figura 16.8:** Aggiungendo una sorgente di luce.

grafico ottenuto, e riportato in figura 16.8, è nuovamente del tipo ottenuto per i proiettili, così si è perso il comportamento ondulatorio. Pertanto si conclude con l'affermazione seguente

*La distribuzione con cui si trovano gli elettroni sullo schermo quando si osserva da quale foro sono passati è diversa da quella con cui si trovano se non viene eseguita tale osservazione.*

Evidentemente l'interazione fra l'elettrone e la luce modifica le cose in modo radicale, cioè il fotone che ha urtato l'elettrone ne ha modificato la traiettoria in modo da distruggere la figura di interferenza. Si fa osservare che non è possibile ridurre l'intensità luminosa sperando che si riduca l'interazione fra elettrone e fotone; infatti in tal modo diminuisce il numero di fotoni, ma non la loro energia (che è legata alla frequenza), quindi quel che accade agendo in tal modo è che non tutti gli elettroni che passano saranno 'visti', ma alcuni passano senza interagire con alcun fotone ed infatti si sentiranno molti click senza vedere nessun lampo. Quindi non c'è modo di vedere gli elettroni senza 'disturbarli', o detto in altro modo, si vedono solo gli elettroni 'disturbati'. Non solo; facendo un'analisi dettagliata degli elettroni 'visti' passare per uno dei due fori e di quelli che passano inosservati si può concludere che quelli che hanno interagito con i fotoni vengono rivelati con una distribuzione a campana simile al caso dei proiettili, mentre quelli passati 'indisturbati' vengono rivelati con una distribuzione che presenta la figura di interferenza tipica delle onde.

Si può pensare di agire in un modo ancora diverso per evitare di disturbare gli elettroni. Visto che l'energia dei fotoni dipende dalla frequenza si può diminuire la frequenza sperando in tal modo di avere un'interazione più 'soffice' fra elettrone e fotone. In questo modo però aumenta la lunghezza d'onda della luce<sup>13</sup> diminuendo la sua capacità di risoluzione, in altre parole, non appena la lunghezza d'onda uguaglia la distanza fra i fori, ci si vede un grande lampo che ci dice sì che un elettrone è passato, ma non è più in grado di dirci da quale foro.

Si può quindi dire quanto segue. Se si dispone di un dispositivo in grado di rilevare con una precisione sufficiente la posizione dell'elettrone allora è possibile dire da che parte è passato l'elettrone ma così facendo il suo moto viene drasticamente disturbato, altrimenti, se non si interagisce con esso *non* è possibile dire da quale foro sia passato l'elettrone.

## 16.4 IL POSTULATO DI DE BROGLIE.

L'analisi del capitolo precedente ha portato ad una conclusione alquanto sorprendente: gli elettroni (ma la stessa analisi si sarebbe potuta fare con qualunque altra particella microscopica) hanno una

<sup>13</sup> Si ricorda che la lunghezza d'onda  $\lambda$  e la frequenza  $\nu$  della radiazione luminosa sono legate dalla relazione  $\lambda\nu = c$ , essendo  $c$  la velocità della luce, quindi diminuendo  $\nu$  aumenta  $\lambda$ .

duplice natura corpuscolare ed ondulatoria, ciascuna delle quali si manifesta o meno, escludendo l'altra, dipendendo dalle condizioni sperimentali. Questo dualismo è abbastanza fastidioso per la comune intuizione e per la normale esperienza, ma occorre rassegnarsi al fatto che è così che la natura si comporta; quello che si può fare è solamente cercare di costruire un modello teorico all'interno del quale i fatti sperimentali fino qui esaminati vengano descritti in modo coerente e che offra una base per previsioni sul risultato di futuri esperimenti. Un tale modello esiste e viene chiamato **meccanica quantistica**.<sup>14</sup> Esso è stato costruito mediante gli sforzi congiunti delle migliori menti della fisica teorica negli anni Venti e Trenta del XX secolo ed ha avuto innumerevoli verifiche sperimentali con una precisione superiore ad ogni altra teoria fisica conosciuta. Occorre però dire che sull'interpretazione filosofica ed epistemologica della meccanica quantistica il dibattito è ancora aperto<sup>15</sup>. Qui si cerca di delineare nel modo più semplice possibile le idee fondamentali che stanno alla base del modello.

La prima cosa da affrontare è il problema del come e perché un elettrone, che si sa essere una particella di massa e di carica ben note, possa comportarsi come un'onda. La risposta a questo quesito venne da de Broglie<sup>16</sup> che nel 1924 postulò che a ogni particella debba venire associata un'onda la cui lunghezza d'onda  $\lambda$  è legata alla quantità di moto  $p$  della particella dalla relazione

$$\lambda = \frac{h}{p} \quad (16.22)$$

ove  $h$  è ancora la costante di Planck. Si osservi che questo postulato coinvolge tutta la materia indifferentemente dalle dimensioni; naturalmente però  $h$  è un numero molto piccolo, si veda l'equazione (16.15), e quindi a un corpo viene associata una lunghezza d'onda trascurabile se la sua quantità di moto non è altrettanto piccola: quindi per tutti i corpi macroscopici la lunghezza d'onda è trascurabile. Ecco perché tutta la fenomenologia che ci è familiare non presenta il dualismo onda-particella, cioè non ci capita di osservare fenomeni di interferenza con i proiettili del primo esperimento.

Il postulato di de Broglie è stato verificato sperimentalmente nel 1927 da Davisson e Germer<sup>17</sup> che utilizzando un fascio di elettroni ottennero una figura di diffrazione la cui interpretazione è ottenibile attribuendo agli elettroni esattamente la lunghezza d'onda postulata da de Broglie. Quindi non solo le onde elettromagnetiche hanno una natura corpuscolare, i fotoni, ma anche le particelle hanno una natura ondulatoria.

Si noti, infine, che il postulato di de Broglie è compatibile con la relazione di Planck-Einstein e con la condizione di quantizzazione delle orbite atomiche nel modello di Bohr. Si esaminino una alla volta.

Dalla teoria della relatività di Einstein si sa che l'energia è legata alla quantità di moto dalla relazione

$$p = \frac{\mathcal{E}}{c}; \quad (16.23)$$

Sostituendo questa relazione nella (16.22), si ottiene facilmente

$$\lambda = \frac{hc}{\mathcal{E}}; \quad (16.24)$$

ma la lunghezza d'onda e la frequenza sono legate dalla relazione  $\lambda\nu = c$ , quindi

$$\frac{c}{\nu} = \frac{hc}{\mathcal{E}} \quad \longrightarrow \quad \mathcal{E} = h\nu \quad (16.25)$$

che è proprio la (16.17).

Per quel che riguarda la quantizzazione di Bohr, nel linguaggio ondulatorio di de Broglie essa si può enunciare semplicemente con la ragionevole richiesta che l'onda associata all'elettrone

<sup>14</sup> L'aggettivo quantistica viene normalmente usata in contrapposizione a classica o newtoniana.

<sup>15</sup> Un eccellente e semplice resoconto del dibattito in corso si può trovare in: Gian Carlo Ghirardi, *Un'occhiata alle carte di Dio*, Il Saggiatore, 1997, dove si potrà trovare anche un chiaro e dettagliatissimo resoconto delle idee fondamentali della meccanica quantistica, qui meno che accennate.

<sup>16</sup> Louis Victor de Broglie (1892-1987), fisico francese.

<sup>17</sup> Clinton Joseph Davisson (1881-1958), fisico statunitense; Lester Halbert Germer (1896-1971) fisico statunitense.

orbitante attorno al nucleo dell'atomo di idrogeno sia un'onda stazionaria tale che la lunghezza dell'orbita sia un multiplo intero della lunghezza d'onda, in modo cioè che l'onda possa 'richiudersi' su sé stessa. Quindi risultano permesse solo quelle orbite il cui raggio  $r_n$  verifica, per qualche valore intero di  $n$ , la condizione

$$2\pi r_n = n\lambda ; \tag{16.26}$$

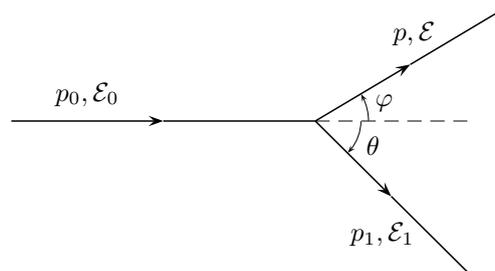
usando il postulato di de Broglie questa relazione diventa

$$2\pi r_n = n \frac{h}{p} \quad \longrightarrow \quad mvr_n = n\hbar , \tag{16.27}$$

ove, secondo l'uso, ho indicato con  $\hbar$  la quantità  $h/2\pi$ . L'equazione (16.27) è proprio la relazione di quantizzazione di Bohr.

### 16.5 L'EFFETTO COMPTON.

Un'altra evidenza sperimentale del comportamento corpuscolare della radiazione, o se si vuole un altro fenomeno che risulta incomprensibile in termini della fisica classica, ma che invece trova una giustificazione in termini delle idee che qui si vanno sviluppando, è l'**effetto Compton**. Nel 1923 Compton<sup>18</sup> scoprì che facendo diffondere radiazione elettromagnetica di alta energia come i raggi X di lunghezza d'onda  $\lambda$  nota su di un bersaglio di grafite si ottengono raggi diffusi con due lunghezze d'onda diverse: una identica alla lunghezza  $\lambda$  della radiazione incidente, e una maggiore.



**Figura 16.9:** La diffusione Compton del fotone da parte di un elettrone.

Questo fenomeno è inspiegabile in termini della teoria ondulatoria della luce; secondo tale teoria infatti un'onda incidente con una certa frequenza mette in oscillazione gli elettroni degli atomi del bersaglio con la stessa frequenza, questi poi emettono radiazione ancora della medesima frequenza. Utilizzando l'ipotesi einsteiniana del quanto di luce, il fenomeno ha una semplice spiegazione. Si supponga infatti che la radiazione incidente sia costituita da fotoni di lunghezza d'onda  $\lambda$  e frequenza  $\nu = c/\lambda$  e quindi aventi energia e quantità di moto date dalle relazioni<sup>19</sup>

$$\mathcal{E}_0 = h\nu = \frac{hc}{\lambda} \quad , \quad p_0 = \frac{h}{\lambda} = \frac{h\nu}{c} . \tag{16.28}$$

Si supponga che un fotone vada ad incidere su un elettrone di un atomo del bersaglio. Visto che l'energia della radiazione incidente è molto elevata si può assumere con buona approssimazione che tale elettrone sia fermo e quindi avente un'energia ed una quantità di moto pari a

$$\mathcal{E}_e = m_e c^2 \quad , \quad p_e = 0 . \tag{16.29}$$

Per lo stesso motivo si può trascurare l'energia di legame dell'elettrone e supporlo libero. A questo punto si supponga che il fotone interagisca con l'elettrone in modo elastico, in modo cioè da conservare sia l'energia che la quantità di moto. Indico con  $p_1$  ed  $\mathcal{E}_1$  la quantità di moto e

<sup>18</sup> Arthur Holly Compton (1892-1962), fisico statunitense.

<sup>19</sup> In tutto il calcolo che segue vengono utilizzate le espressioni relativistiche dell'energia e della quantità di moto.

l'energia del fotone dopo l'interazione e  $p$  ed  $\mathcal{E}$  quelle dell'elettrone, e siano  $\varphi$  e  $\theta$  i rispettivi angoli di diffusione. Allora per la conservazione della quantità di moto si può scrivere

$$p_0 - p_1 \cos \theta = p \cos \varphi \quad , \quad p_1 \sin \theta = p \sin \varphi ; \quad (16.30)$$

e per la conservazione dell'energia

$$\mathcal{E}_0 + m_e c^2 = \mathcal{E} + \mathcal{E}_1 . \quad (16.31)$$

Elevando al quadrato le prime due e sommandole si trova

$$\begin{aligned} p_0^2 - 2p_0 p_1 \cos \theta + p_1^2 \cos^2 \theta &= p^2 \cos^2 \varphi \\ p_1^2 \sin^2 \theta &= p^2 \sin^2 \varphi \end{aligned} \quad \longrightarrow \quad p_0^2 - 2p_0 p_1 \cos \theta + p_1^2 = p^2 . \quad (16.32)$$

A questo punto si può scrivere il quadrato dell'energia dell'elettrone diffuso si scrive come segue

$$\begin{aligned} \mathcal{E}^2 &= m_e^2 c^4 + p^2 c^2 = (\mathcal{E}_0 - \mathcal{E}_1 + m_e c^2)^2 = \\ &= \mathcal{E}_0^2 + \mathcal{E}_1^2 + m_e^2 c^4 - 2\mathcal{E}_0 \mathcal{E}_1 + 2\mathcal{E}_0 m_e c^2 - 2\mathcal{E}_1 m_e c^2 \end{aligned} \quad (16.33)$$

da cui, ricordando che per una particella che si muova alla velocità della luce come il fotone valgono, equazione (14.112),  $\mathcal{E}_0 = p_0 c$  e  $\mathcal{E}_1 = p_1 c$ ,

$$\begin{aligned} p^2 c^2 &= p_0^2 c^2 + p_1^2 c^2 - 2p_0 p_1 c^2 + 2m_e c^2 (\mathcal{E}_0 - \mathcal{E}_1) = \\ &= p_0^2 c^2 + p_1^2 c^2 - 2p_0 p_1 c^2 + 2m_e c^3 (p_0 - p_1) , \end{aligned} \quad (16.34)$$

da cui, usando (16.32), si arriva a

$$p_0 p_1 (1 - \cos \theta) = m_e c (p_0 - p_1) \quad \longrightarrow \quad \frac{p_0 - p_1}{p_0 p_1} = \frac{1}{m_e c} (1 - \cos \theta) \quad (16.35)$$

e quindi

$$\frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_0} = \frac{1}{m_e c} (1 - \cos \theta) ; \quad (16.36)$$

da cui, infine, ricordando che  $1/p = \lambda/h$ , si ottiene

$$\boxed{\lambda_1 - \lambda_0 = \lambda_c (1 - \cos \theta) ,} \quad (16.37)$$

ove la quantità

$$\lambda_c = \frac{h}{m_e c} = 4.86 \cdot 10^{-12} \text{ m} \quad (16.38)$$

è detta **lunghezza d'onda Compton**. Si vede quindi che la lunghezza d'onda del fotone diffuso è maggiore o uguale alla lunghezza d'onda incidente, che la differenza fra le lunghezze d'onda dipende solo dall'angolo di diffusione  $\theta$  e non dalle caratteristiche della radiazione incidente. In particolare tale differenza è nulla per  $\theta = 0$  e massima per  $\theta = \pi$  in ottimo accordo con i dati sperimentali raccolti da Compton. Rimane ancora da capire perché accanto alla lunghezza d'onda ora trovata venga rilevata anche radiazione con lunghezza uguale a quella incidente. In effetti, se il fotone non interagisce con un elettrone viene diffuso dall'intero atomo: in tal caso posso ripetere tutto le considerazioni fin qui svolte sostituendo al posto della massa dell'elettrone la massa dell'atomo  $M$ . Questa è molto più grande della massa dell'elettrone, dell'ordine di  $10^5$  volte più grande; quindi la differenza di lunghezza d'onda prodotta in questo caso è piccolissima e la lunghezza d'onda diffusa è praticamente indistinguibile da quella incidente, a meno di non usare una radiazione di energia estremamente più intensa.

## 16.6 IL PRINCIPIO DI INDETERMINAZIONE.

Un altro ingrediente fondamentale del modello che spiega il comportamento ondulatorio della materia microscopica è il **principio di indeterminazione** enunciato da Heisenberg<sup>20</sup> nel 1927.

*Se per un oggetto qualsiasi si esegue la misura della componente  $x$  della sua quantità di moto  $\mathbf{p}$  con l'incertezza  $\Delta p_x$ , allora la precisione  $\Delta x$  con cui è possibile conoscere la componente  $x$  della posizione dell'oggetto in questione, è tale che valga la relazione*

$$\Delta p_x \Delta x \geq \frac{h}{4\pi} . \quad (16.39)$$

Naturalmente la stessa cosa vale per le altre due componenti  $x$  e  $y$  dei vettori quantità di moto e posizione. Il principio ora enunciato dice, in sostanza, che non è possibile conoscere simultaneamente e con precisione arbitraria sia la posizione che la quantità di moto (e quindi la velocità, visto che la massa si suppone nota) di un corpo. Ancora, vista la piccolezza di  $h$  l'effetto è visibile solo su scala microscopica e quindi non se ne ha esperienza diretta nel mondo macroscopico.

Il principio di indeterminazione di Heisenberg formalizza quanto visto sopra con i nostri esperimenti con onde ed elettroni: non è possibile misurare una grandezza senza perturbare il sistema sottoposto a misura e quindi il valore fornito dall'operazione di misura viene inevitabilmente modificato dalla stessa operazione di misura. Non solo ma la misura perturba lo stato stesso del sistema e quindi viene turbata anche la misura di grandezze diverse da quella effettivamente misurata; ecco che negli esempi visti, una misura di posizione (come cercare di stabilire da quale foro sia passato l'elettrone) modifica la velocità e quindi la traiettoria dell'elettrone che, quindi, raggiunge lo schermo in una posizione diversa. Il principio di Heisenberg quindi esplicita esattamente quali sono le grandezze 'incompatibili' cioè quelle coppie di grandezze tali che la misura di una 'perturba' l'altra.

Esistono molte altre coppie di grandezze 'incompatibili' nel senso ora esposto. Qui se ne ricorda solo un'altra: il tempo e l'energia<sup>21</sup>. Quindi la corrispondente relazione di indeterminazione può essere scritta nella forma

$$\Delta \mathcal{E} \Delta t \geq \frac{h}{4\pi} . \quad (16.40)$$

Il significato fisico di questa relazione è il seguente.

*Non è possibile misurare in un certo istante l'energia di un corpo con precisione illimitata: maggiore è la precisione con cui viene determinata l'energia, maggiore è l'incertezza dell'istante in cui tale valore dell'energia è effettivamente posseduto dal corpo.*

Per capire il legame tra l'indeterminazione posizione–quantità di moto e l'indeterminazione tempo–energia, si consideri una particella in moto uniforme lungo l'asse  $x$ ; la sua energia (cinetica) può essere scritta nella forma  $\mathcal{E} = mv_x^2/2 = p_x^2/2m$  quindi l'incertezza nella determinazione di  $\mathcal{E}$  dipende dall'indeterminazione di  $p_x$ ; in particolare, si può dimostrare che vale

$$\Delta \mathcal{E} = \frac{p_x \Delta p_x}{m} = v_x \Delta p_x ; \quad (16.41)$$

d'altro canto l'incertezza sulla posizione viene dal tempo  $\Delta t$  impiegato per la misura e quindi vale  $\Delta x = v_x \Delta t$ , da cui si ottiene  $\Delta t = \Delta x/v_x$ ; quindi

$$\Delta \mathcal{E} \Delta t = v_x \Delta p_x \frac{\Delta x}{v_x} = \Delta p_x \Delta x \geq \frac{h}{4\pi} . \quad (16.42)$$

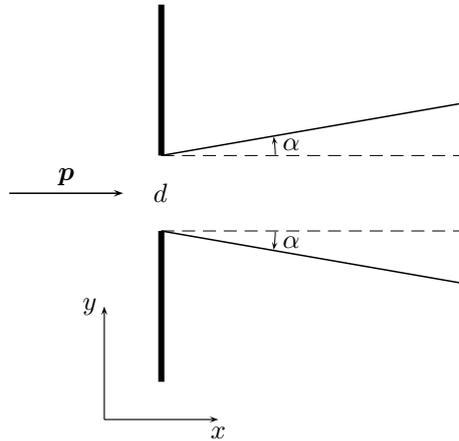
<sup>20</sup> Werner Heisenberg (1901-1976), fisico tedesco.

<sup>21</sup> Non è un caso che il tempo e l'energia siano legate a posizione e quantità di moto dalle trasformazioni di Lorentz della relatività ristretta.

Il principio di indeterminazione è illustrato meglio con un esempio. Si supponga che una particella abbia il vettore quantità di moto  $\mathbf{p}$  diretto lungo l'asse  $x$ , in modo cioè che le sue componenti, note esattamente, siano

$$p_x = p \quad , \quad p_y = p_z = 0 . \quad (16.43)$$

Non si sa nulla sulla sua posizione e si vuole quindi fare una misura della coordinata  $y$  facendo passare la particella attraverso uno schermo con fenditura larga  $d$  in modo tale che, subito dopo lo schermo, la componente  $y$  della posizione della particella è nota con un'incertezza  $\Delta y = d$  (si veda la figura 16.10).



**Figura 16.10:** Una particella attraverso una fenditura.

Si osservi però che per il postulato di de Broglie alla particella viene associata un'onda di lunghezza  $\lambda = h/p$ , quindi passando attraverso la fenditura l'onda sarà diffratta; la figura di diffrazione, com'è noto [si veda l'equazione (4.35)], si allarga secondo un angolo  $\alpha$  tale che sia

$$\text{sen } \alpha = \frac{\lambda}{d} . \quad (16.44)$$

Quindi ora la quantità di moto ha anche una componente lungo  $y$  ma tale componente è compresa fra il valore  $+p \text{sen } \alpha$  ed il valore  $-p \text{sen } \alpha$  e quindi la sua indeterminazione, subito dopo la fenditura, è  $\Delta p_y = 2p \text{sen } \alpha$ . Quindi

$$\Delta y \Delta p_y = 2 d p \text{sen } \alpha = 2 d \frac{h}{\lambda} \text{sen } \alpha = 2h > \frac{h}{4\pi} \quad (16.45)$$

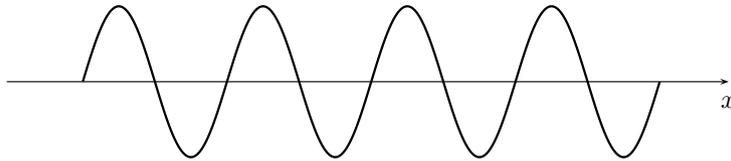
in accordo con il principio di Heisenberg.

La grossa novità introdotta dal principio di Heisenberg rispetto alla meccanica classica può essere vista nel modo seguente. Mentre per la meccanica classica gli errori di misura possono essere ridotti arbitrariamente migliorando l'apparato sperimentale, ora finalmente questo pregiudizio è rimosso: esiste un limite alla precisione delle misure proprio a causa dell'interazione fra apparato di misura e grandezza misurata.

## 16.7 L'INTERPRETAZIONE PROBABILISTICA.

Il fatto che a ogni particella sia associata un'onda fa sí, per esempio, che la sua posizione non sia univocamente definita; l'onda infatti non è localizzata, come lo sarebbe una particella, in un punto definito dello spazio, ma si trova in una regione estesa; ci si aspetta quindi che una misura della posizione possa dare qualunque risultato all'interno di tale regione estesa. Il modello quindi, rispecchiando questa situazione fisica, non può essere in grado di predire esattamente il risultato delle misure. Si supponga, per semplicità, che lo spazio fisico abbia una sola dimensione e che quindi le particelle di cui si studiano le proprietà si possano muovere lungo una retta indicata con  $x$ . A ciascuna particella libera viene associata, come ormai è ben noto, un'onda la cui lunghezza

è legata alla quantità di moto mediante la relazione di de Broglie, e la cui frequenza è legata all'energia dalla relazione di Planck-Einstein.



**Figura 16.11:** La funzione d'onda di una particella libera.

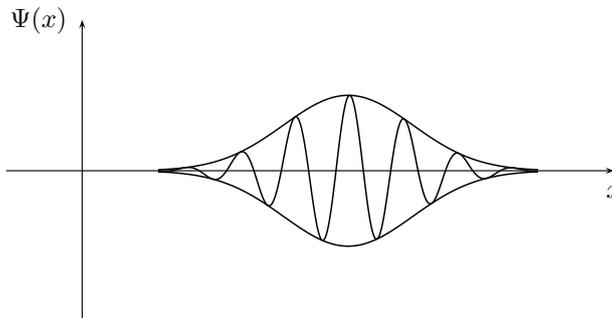
A quest'onda è possibile associare una funzione d'onda della forma

$$\Psi(x, t) = \Psi_0 \cos \left[ \frac{2\pi}{\lambda}(x - vt) \right] , \tag{16.46}$$

che si può riscrivere nella forma

$$\Psi(x, t) = \Psi_0 \cos \left[ \frac{2\pi}{\lambda}x - 2\pi\nu t \right] = \Psi_0 \cos \left[ \frac{2\pi}{h}px - \frac{2\pi}{h}\mathcal{E}t \right] = \Psi_0 \cos \left[ \frac{2\pi}{h}(px - \mathcal{E}t) \right] . \tag{16.47}$$

Si osservi che quest'onda, avendo una lunghezza d'onda definita, ha una quantità di moto perfettamente ed esattamente definita (si veda la figura 16.11); d'altro canto la funzione coseno è estesa in tutto lo spazio e quindi non vi è alcuna informazione sulla posizione, in accordo con il principio di Heisenberg.



**Figura 16.12:** La funzione d'onda di una particella non libera.

Nel caso generale ad una particella non libera viene associata una funzione d'onda costituita da una sovrapposizione di onde del tipo (16.47). Tale sovrapposizione è tale che l'interferenza fra tutte le onde che la costituiscono sia distruttiva in tutti i punti dello spazio tranne che in una regione limitata, come nella figura 16.12. Una misura della posizione della particella dà quindi certamente come risposta una posizione all'interno di quella regione limitata.

Il fatto è che non è possibile conoscere tale posizione *prima* di compiere effettivamente la misura. Tutto ciò che la teoria fornisce è una probabilità associata ad ogni possibile risultato della misura; la teoria quindi è in grado di fare previsioni del tipo seguente: una misura della posizione della tal particella la troverà nell'intervallo compreso fra la posizione  $x$  e la posizione  $x + \Delta x$  con una certa probabilità<sup>22</sup>. Quindi il fatto che la particella si comporti come un'onda fa sì che, in un certo senso, essa sia 'delocalizzata' in una certa regione di spazio e che sia la misura a 'localizzarla'. Evidentemente quindi la natura ondulatoria è inestricabilmente legata all'indeterminazione sulla posizione e quindi non consente una fisica deterministica ma solamente una fisica di tipo probabilistico.

<sup>22</sup> Si osservi che la probabilità che una particella si trovi in un punto ben individuato è zero infatti il numero di punti ove si possa trovare è infinito e quindi per ciascuno di essi la probabilità è nulla, pertanto viene definita la probabilità di trovare la particella in un intervallo esteso.

Per quanto riguarda la quantità di moto, si può dire che, essendo la funzione d'onda della particella la sovrapposizione di molte onde del tipo (16.47), è chiaro che non ha una definita lunghezza d'onda e quindi nemmeno una definita quantità di moto che risulta quindi nota solo con una ben definita indeterminazione. Anche in questo caso è possibile solo definire la probabilità che una misura della quantità di moto dia un valore compreso tra  $p$  e  $p + \Delta p$ .

L'interpretazione probabilistica deriva dal modello ondulatorio nel modo seguente proposto da Born<sup>23</sup> nel 1926. Secondo Born, la probabilità di trovare la particella fra  $x$  e  $x + \Delta x$ , con  $\Delta x$  infinitesimo, è data da

$$[\Psi(x)]^2 \Delta x, \quad (16.48)$$

è cioè completamente calcolabile a partire dalla funzione d'onda. Per un intervallo non infinitesimo ma finito, si può facilmente dimostrare<sup>24</sup> che la probabilità è data dall'area sottostante il grafico della funzione  $[\Psi(x)]^2$ .

La funzione d'onda, quindi consente di conoscere tutto ciò che è possibile conoscere sulla posizione della nostra particella; si può quindi affermare che la funzione d'onda rappresenta lo *stato* fisico della particella in un dato istante<sup>25</sup>. Viene da chiedersi cosa sia possibile conoscere della nostra particella negli istanti successivi. Per rispondere esaurientemente a questa domanda la matematica si fa complessa, ma le idee fortunatamente restano semplici.

Esiste una equazione ricavata da Schrödinger<sup>26</sup> nel 1925 che consente, data la funzione d'onda in un istante iniziale, di determinarla in ogni istante successivo e quindi di conoscere la probabilità di trovare la particella in ogni posizione in ogni istante. Quindi la funzione d'onda, se sia nota in un dato istante iniziale, rimane nota in modo univoco e deterministico in ogni istante successivo; ma dalla funzione d'onda è possibile solo una conoscenza probabilistica delle grandezze fisiche riguardanti la particella in esame.

<sup>23</sup> Max Born (1882-1970), fisico tedesco.

<sup>24</sup> Chi conosce l'analisi si renderà subito conto che in questo caso la probabilità è data da un integrale.

<sup>25</sup> È il caso di accennare al fatto che la teoria fornisce un modo, che va ben oltre i limiti di queste note, per ottenere informazioni su tutte le altre grandezze riguardanti la particella quali la quantità di moto, l'energia, il momento angolare e via dicendo.

<sup>26</sup> Erwin Schrödinger (1887-1961), fisico austriaco.

Parte V

METODI MATEMATICI PER LA FISICA

In questa ultima parte, vengono ripresi alcuni degli argomenti di meccanica e, termodinamica e riproposti utilizzando gli strumenti dell'analisi, che ne sono il linguaggio piú naturale ed appropriato. Si suppone che il lettore sia a conoscenza del calcolo differenziale ed integrale; in particolare che conosca il calcolo dei limiti; che conosca il significato della derivata e del differenziale di una funzione e che ne sappia eseguire il calcolo; che conosca il significato dell'integrale proprio ed improprio; che conosca il teorema fondamentale del calcolo integrale e le sue conseguenze. Il contenuto di questa parte deve essere visto quindi come un'occasione di applicazione della matematica a concreti problemi di fisica. È un'occasione di approfondimento, quindi.

# 17

## MECCANICA.

---

In questo capitolo, tutte le grandezze proprie della meccanica e le leggi fondamentali vengono riproposte con l'adeguato linguaggio matematico; si tratteranno in particolare i concetti di velocità, accelerazione, forza, energia potenziale, leggi di Newton e leggi di conservazione. Si faranno alcuni importanti esempi.

### 17.1 CINEMATICA.

Si comincia con la definizione di **velocità**. Questa è normalmente definita come rapporto fra lo spazio  $\Delta s$  percorso da un punto materiale ed il tempo  $\Delta t$  impiegato a percorrerlo. Questa, si sottolinea subito, è la velocità media. Essa coincide con la velocità in ogni istante solo se è costante, cioè solo se il suo valore è indipendente dalla scelta dell'intervallo di tempo  $\Delta t$ . L'importanza dell'indipendenza dalla scelta dell'intervallo  $\Delta t$  era già chiara a Galilei che, all'inizio della *Giornata terza dei Discorsi e dimostrazioni matematiche* del 1638, dà la seguente definizione di moto uniforme:<sup>1</sup>

*Eguale, o uniforme, definisco quel moto le cui parti percorse da un mobile in tempi uguali comunque scelti, sono fra loro uguali.*

Se questo non è il caso è necessario definire la velocità istantanea, cioè la velocità in un dato istante  $t$ . Questo problema è stato all'origine del concetto di **derivata** introdotto da Newton nelle sue opere *De analysi per aequationes numero terminorum infinitas* del 1669 e *Methodus fluxionum et serierum infinitarum* del 1671 (per completezza storica è necessario ricordare che un concetto del tutto equivalente fu introdotto da Leibniz<sup>2</sup> studiando la quadratura di certe curve algebriche, suscitando una famosa disputa sulla priorità della scoperta che qui si lascia inesplorata). In linguaggio moderno, la velocità all'istante  $t$  è il limite della velocità media calcolata nell'intervallo di tempo fra l'istante  $t$  e l'istante  $t + \Delta t$ :

$$v(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t} ; \quad (17.1)$$

che è, evidentemente, la derivata prima di  $s(t)$  rispetto al tempo:

$$v(t) = \frac{ds(t)}{dt} \equiv \dot{s}(t) , \quad (17.2)$$

ove, per indicare la derivata rispetto al tempo, è stata utilizzata la notazione, dovuta a Newton, di porre un puntino sopra la funzione da derivare. Questa relazione può essere facilmente invertita osservando che il differenziale della funzione  $s(t)$  può essere scritto nella forma  $ds(t) = v(t) dt$  e quindi integrato fra un istante iniziale  $t_0$  e l'istante generico  $t$ :

$$\int_{t_0}^t ds = \int_{t_0}^t v(t') dt' \quad \longrightarrow \quad s(t) - s(t_0) = \int_{t_0}^t v(t') dt' , \quad (17.3)$$

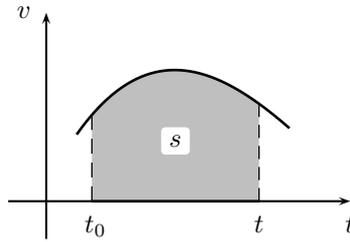
da cui si ottiene la legge oraria

$$\boxed{s(t) = s(t_0) + \int_{t_0}^t v(t') dt' .} \quad (17.4)$$

<sup>1</sup> "Aequalem, seu uniformem, motum intelligo eum, cuius partes quibuscunque temporibus aequabilis a mobili peractae, sunt inter se aequales."

<sup>2</sup> Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716), filosofo tedesco.

L'equazione (17.4) consente di riconoscere che lo spazio percorso fra gli istanti  $t_0$  e  $t$  è dato dall'area sottostante la curva che rappresenta il grafico della funzione  $v(t)$ , l'area ombreggiata in figura 17.1.



**Figura 17.1:** Lo spazio percorso come area sotto la curva velocità-tempo.

Un discorso perfettamente analogo si può fare per l'**accelerazione**. Definita come il rapporto fra la variazione della velocità e il tempo impiegato nella variazione, è l'accelerazione media. L'accelerazione istantanea è definita come la derivata prima della funzione  $v(t)$  rispetto al tempo e quindi la derivata seconda della funzione  $s(t)$  rispetto al tempo:

$$a(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v(t + \Delta t) - v(t)}{\Delta t} = \frac{dv(t)}{dt} = \dot{v}(t) = \frac{d^2s(t)}{dt^2} = \ddot{s}(t) . \quad (17.5)$$

Ancora, la relazione precedente può essere invertita mediante un integrale

$$\int_{t_0}^t dv = \int_{t_0}^t a(t') dt' \quad \longrightarrow \quad v(t) - v(t_0) = \int_{t_0}^t a(t') dt' , \quad (17.6)$$

da cui si ottiene la legge con cui la velocità varia in funzione del tempo.

$$\boxed{v(t) = v(t_0) + \int_{t_0}^t a(t') dt' .} \quad (17.7)$$

Se il moto del punto materiale  $P$  è un moto nello spazio, la sua posizione all'istante  $t$  è data dal vettore  $OP$ , e il moto di  $P$  è la sovrapposizione dei moti simultanei delle sue proiezioni sugli assi coordinati,  $x(t), y(t), z(t)$ . Per ciascuno di questi moti si può ripetere quanto visto sopra e definire le tre componenti ( $v_x(t), v_y(t), v_z(t)$ ) della velocità vettoriale  $\mathbf{v}$ :

$$v_x(t) = \dot{x}(t) \quad , \quad v_y(t) = \dot{y}(t) \quad , \quad v_z(t) = \dot{z}(t) ; \quad (17.8)$$

e le tre componenti dell'accelerazione vettoriale

$$a_x(t) = \dot{v}_x(t) = \ddot{x}(t) \quad , \quad a_y(t) = \dot{v}_y(t) = \ddot{y}(t) \quad , \quad a_z(t) = \dot{v}_z(t) = \ddot{z}(t) ; \quad (17.9)$$

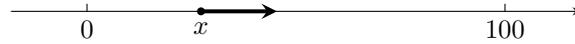
da cui si ottengono

$$\begin{cases} x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^t v_x(t') dt' \\ y(t) = y(t_0) + \int_{t_0}^t v_y(t') dt' \\ z(t) = z(t_0) + \int_{t_0}^t v_z(t') dt' \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} v_x(t) = v_x(t_0) + \int_{t_0}^t a_x(t') dt' \\ v_y(t) = v_y(t_0) + \int_{t_0}^t a_y(t') dt' \\ v_z(t) = v_z(t_0) + \int_{t_0}^t a_z(t') dt' \end{cases} \quad (17.10)$$

### 17.1.1 ESEMPIO.

Si consideri una automobile che all'istante  $t = 0$  si muove a velocità di 100 km/h e si trova a 100 km dalla meta. Da questo istante in poi l'automobile decelera in modo che in ogni istante

successivo la sua velocità, espressa in km/h, eguagli numericamente la sua distanza dalla meta, espressa in km. Si tratta di determinare se e in quanto tempo l'automobile raggiunge la sua meta.



**Figura 17.2:** Il problema dell'automobile che decelera.

Scelta come origine degli assi la posizione dell'automobile all'istante  $t = 0$ , quando essa si trova nella posizione di ascissa  $x$ , la sua velocità è data da

$$v(t) = 100 - x \tag{17.11}$$

da cui

$$\frac{dx}{dt} = 100 - x \quad \longrightarrow \quad \frac{dx}{x - 100} = dt, \tag{17.12}$$

che, integrata, dà

$$\int_0^x \frac{dx'}{x' - 100} = - \int_0^t dt' \quad \longrightarrow \quad \left[ \log \frac{x' - 100}{-100} \right]_0^x = -t \tag{17.13}$$

da cui

$$x(t) = 100 (1 - e^{-t}) . \tag{17.14}$$

Derivando questa equazione si trova la velocità

$$v(t) = 100 e^{-t} , \tag{17.15}$$

che, com'è immediato verificare, soddisfa la (17.11). Prendendo il limite della seconda delle (17.14) per  $x \rightarrow 100$  si trova che l'auto raggiunge la sua meta in un tempo infinito. Dall'ultima equazione si vede inoltre che, l'auto vi arriva con velocità nulla.

### 17.1.2 MOTO IN COORDINATE POLARI.

In molti problemi è comodo utilizzare per la descrizione del moto piano di un punto materiale coordinate diverse da quelle cartesiane. Si illustra qui l'uso delle **coordinate polari**  $(r, \theta)$ . Queste sono definite a partire da un asse orientato di riferimento ed una origine  $O$  che si trovi su di esso. In questo modo il vettore posizione  $OP$  è individuato dal suo modulo e dall'angolo formato da  $OP$  e l'asse di riferimento.

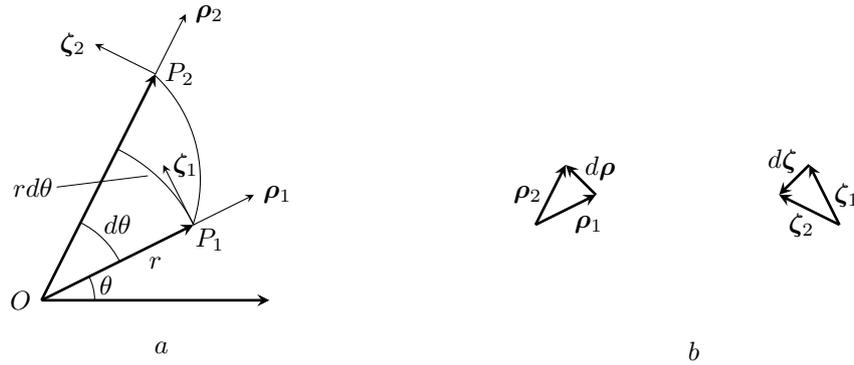


**Figura 17.3:** Le coordinate polari nel piano. a: definizione; b: relazione con le coordinate cartesiane.

Se come asse di riferimento si sceglie l'asse delle ascisse, come in figura 17.3b, è possibile determinare facilmente la relazione fra coordinate polari e cartesiane:

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases} \quad \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = \arctan \frac{y}{x} . \end{cases} \tag{17.16}$$

è assai istruttivo il calcolo delle componenti della velocità e dell'accelerazione in coordinate polari. Innanzi tutto è necessario fissare dei versori. Sia  $\rho$  il versore che punta nella direzione di  $OP$  e  $\zeta$  quello perpendicolare a  $\rho$ , come in figura 17.3a. In questo modo lo spostamento infinitesimo  $dP$  del punto dalla posizione  $P_1$  alla posizione  $P_2$  viene rappresentato nei termini seguenti.



**Figura 17.4:** Lo spostamento infinitesimo in coordinate polari.

Lo spostamento infinitesimo ha una componente lungo  $\rho$  pari  $dr$  e una componente lungo  $\zeta$  pari a  $rd\theta$  (si veda la figura 17.4a). Si può pertanto scrivere

$$d\mathbf{P} = dr\rho + rd\theta\zeta . \tag{17.17}$$

Quindi il vettore velocità può esser scritto nella forma

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{P}}{dt} = \frac{dr}{dt}\rho + r\frac{d\theta}{dt}\zeta . \tag{17.18}$$

Posto, come d'uso,  $\omega = \frac{d\theta}{dt}$ , le componenti della velocità possono essere scritte nella forma :

$$v_r = \frac{dr}{dt} , \quad v_\theta = r\omega . \tag{17.19}$$

Per quel che riguarda l'accelerazione si osservi che nello spostarsi il punto da  $P_1$  a  $P_2$  non cambiano solo le componenti del vettore velocità, ma anche i versori. Si scrive cioè:

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d^2r}{dt^2}\rho + \frac{dr}{dt}\frac{d\rho}{dt} + \frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}\zeta + r\frac{d^2\theta}{dt^2}\zeta + r\frac{d\theta}{dt}\frac{d\zeta}{dt} . \tag{17.20}$$

Si tratta quindi di capire quale sia la derivata dei versori  $\rho$  e  $\zeta$ . A questo scopo si osservi la figura 17.4b ove sono rappresentate le variazioni infinitesime dei versori in questione. Dalla prima si deduce che  $d\rho$  è diretta nello stesso verso di  $\zeta$  quindi, ricordando che il modulo di  $\rho$  vale 1, si trova

$$d\rho = \rho d\theta\zeta = d\theta\zeta \quad \longrightarrow \quad \frac{d\rho}{dt} = \frac{d\theta}{dt}\zeta . \tag{17.21}$$

Allo stesso modo, sempre guardando la figura 17.4b, si vede che la variazione infinitesima di  $\zeta$  ha verso opposto a  $\rho$ , quindi

$$d\zeta = -\zeta d\theta\rho = -d\theta\rho \quad \longrightarrow \quad \frac{d\zeta}{dt} = -\frac{d\theta}{dt}\rho . \tag{17.22}$$

Quindi l'accelerazione diviene

$$\mathbf{a} = \left[ \frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 \right] \rho + \left( 2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} + r\frac{d^2\theta}{dt^2} \right) \zeta , \tag{17.23}$$

individuando così le componenti dell'accelerazione:

$$a_r = \frac{d^2r}{dt^2} - r\omega^2 , \quad a_\theta = 2\frac{dr}{dt}\omega + r\frac{d\omega}{dt} . \tag{17.24}$$

Si osservi che, se l'accelerazione è centripeta (o centrifuga),<sup>3</sup> deve valere  $a_\theta = 0$  e quindi

$$2\frac{dr}{dt}\omega + r\frac{d\omega}{dt} = 0 \quad \longrightarrow \quad \frac{1}{r}\frac{d(r^2\omega)}{dt} = 0 \quad \longrightarrow \quad \frac{d(r^2\omega)}{dt} = 0 . \tag{17.25}$$

<sup>3</sup> È il caso, molto importante, delle forze centrali per cui si rimanda alla sezione 17.8.

Nel caso del moto circolare uniforme  $r$  e  $\omega$  sono costanti, quindi  $a_\theta = 0$  e  $a_r = -r\omega^2 = \text{cost.}$   
 È inoltre istruttivo considerare l'area spazzata dal vettore  $\mathbf{OP}$  in un tempo infinitesimo  $dt$ ; in riferimento alla figura 17.4a, si trova

$$d\mathcal{A} = \frac{1}{2} r^2 d\theta + \frac{1}{2} r d\theta dr . \quad (17.26)$$

La rapidità di variazione di questa area, detta **velocità areolare** è quindi

$$\frac{d\mathcal{A}}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt} + \frac{1}{2} r \frac{d\theta}{dt} dr . \quad (17.27)$$

Il secondo addendo è infinitesimo, quindi trascurabile. Rimane:

$$\frac{d\mathcal{A}}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \omega . \quad (17.28)$$

Si osservi che se l'accelerazione è centripeta, si confronti l'equazione (17.25), la velocità areolare è costante.

## 17.2 LEGGI DELLA DINAMICA.

In questo capitolo analizziamo le tre leggi di Newton e le loro conseguenze. Non è scopo di queste note discutere nel dettaglio le leggi, che si suppongono note al lettore; quanto piuttosto di utilizzarle nella risoluzione del problema dinamico del punto materiale, per mezzo degli strumenti del calcolo differenziale. Eccole in una traduzione quasi letterale del testo dei *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*<sup>4</sup>.

1. Un corpo persevera nel suo stato di quiete o di moto rettilineo e uniforme fino a che non è portato a mutare tale stato dalla azione di una forza.
2. Il mutamento del moto è proporzionale alla forza motrice impressa e avviene secondo la retta lungo la quale agisce tale forza.
3. A un'azione corrisponde sempre una reazione uguale e contraria: o le reciproche azioni di due corpi sono sempre uguali e dirette in versi opposti.

La prima, detta *legge d'inerzia*, serve sostanzialmente a definire i sistemi inerziali rispetto ai quali valgono le altre leggi. La seconda, nota con il nome di *legge fondamentale della dinamica*, dice che l'accelerazione (*il mutamento del moto*) è proporzionale alla risultante delle forze agenti, e com'è noto, è espressa dall'equazione

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} , \quad (17.29)$$

ove  $m$  è la massa inerziale del corpo. La terza legge, detta *di azione e reazione*, dice che se due corpi interagiscono fra di loro la forza  $\mathbf{F}_{12}$  con cui il secondo agisce sul primo è uguale ed opposta a quella  $\mathbf{F}_{21}$  con cui il primo agisce sul secondo; vale cioè

$$\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21} . \quad (17.30)$$

Utilizzando la (17.29), la conoscenza della risultante delle forze agenti fornisce in ogni istante l'accelerazione del corpo e quindi, utilizzando le (17.10), è possibile determinare la velocità e la posizione del corpo in ogni istante, note che siano la posizione e la velocità iniziali. In questo senso la risultante delle forze, e quindi l'accelerazione, *determinano* il moto: il tipo di moto dipende dal tipo di forza, forze dello stesso tipo (per esempio con la stessa dipendenza dalla distanza, come il caso della forza elettrostatica fra due cariche opposte e della forza gravitazionale fra due masse) danno origine allo stesso tipo di moto. A volte, benché questa espressione sia da evitare, ci si riferisce a questa situazione dicendo che le forze sono le *cause* del moto. Di seguito sono presentati alcuni importanti esempi che illustrano quanto qui detto.

<sup>4</sup> *Corpus omne perseverare in statu suo quiescendi vel movendi uniformiter in directum, nisi quatenus a viribus impressis cogitur statum illum mutare.  
 Mutationem motus proportionalem esse vi motrici impressae et fieri secundum lineam rectam qua vis illa imprimitur.  
 Actioni contrariam semper et aequalem esse reactionem: sive corporum duorum actiones in se mutuo semper esse aequales et in partes contrarias dirigi.*

**17.2.1 MOTO UNIFORME.**

Se  $\mathbf{F} = 0$  allora  $\mathbf{a} = 0$ ; scegliendo come asse delle ascisse quello che ha la stessa direzione e lo stesso verso della velocità all'istante  $t = 0$ , dalla seconda delle (17.10) si ottiene

$$v_x(t) = v_x(t_0) , \quad (17.31)$$

la velocità è quindi costante. Un tale moto è detto **uniforme**.<sup>5</sup> La sua legge oraria si trova sostituendo la (17.31) nella prima delle (17.10) ed eseguendo l'integrazione immediata:

$$x(t) = x(t_0) + v(t_0)(t - t_0) . \quad (17.32)$$

**17.2.2 MOTO UNIFORMEMENTE ACCELERATO.**

Sia  $\mathbf{F}$  costante e orientata nella direzione della velocità all'istante iniziale, allora anche  $\mathbf{a}$  è costante ed ha la stessa direzione; si scelga un sistema di riferimento in modo che tale direzione sia diretta come l'asse delle ascisse. Allora  $\mathbf{F} = (F, 0, 0)$ ,  $\mathbf{a} = (a, 0, 0)$  e  $\mathbf{v}(t_0) = (v_0, 0, 0)$ . Usando la seconda delle (17.10) si trova

$$v_x(t) = v_0 + a(t - t_0) . \quad (17.33)$$

Sostituendo questa equazione nella prima delle (17.10) si può determinare, con una semplice integrazione la legge oraria:

$$\begin{aligned} s(t) &= s(t_0) + \int_{t_0}^t [v_0 + a(t' - t_0)] dt' = \\ &= s(t_0) + \left[ v_0 t' + \frac{1}{2} a t'^2 - a t_0 t' \right]_{t_0}^t = \\ &= s(t_0) + v_0(t - t_0) + \frac{1}{2} a(t^2 - t_0^2) - a(t_0 t - t_0^2) \end{aligned} \quad (17.34)$$

da cui

$$s(t) = s(t_0) + v_0(t - t_0) + \frac{1}{2} a(t - t_0)^2 . \quad (17.35)$$

Un tale moto è detto **uniformemente accelerato**.

**17.2.3 MOTO ARMONICO.**

Si supponga che un punto materiale  $P$  di massa  $m$  all'istante  $t = 0$  si trovi fermo a distanza  $x_0$  dal punto  $O$  sia sottoposto ad una forza  $\mathbf{F}$  diretta lungo una retta e sempre proporzionale ma opposto al vettore che dà la posizione di  $P$  rispetto ad  $O$ . Valga cioè  $\mathbf{F} = -k \mathbf{OP}$ . Scelto l'asse delle ascisse con origine in  $O$  e orientato nella direzione di  $\mathbf{OP}$ , l'unica componente della forza diversa da zero è quella lungo  $x$  per cui vale

$$F = -kx . \quad (17.36)$$

Usando la legge fondamentale della dinamica è possibile trovare l'accelerazione  $a = -\frac{k}{m} x$  cui è sottoposto  $P$ , e quindi,

$$\ddot{x}(t) = -\frac{k}{m} x(t) . \quad (17.37)$$

Si tratta quindi di trovare una funzione del tempo che derivata due volte cambia segno e viene moltiplicata per una costante; un attimo di riflessione mostra che si tratta di una funzione sinusoidale come

$$x(t) = A \cos(\omega t + \theta_0) , \quad (17.38)$$

<sup>5</sup> Si noti che la velocità è costante in direzione e verso oltre che in modulo, quindi il moto avviene in linea retta; per questo viene anche detto moto rettilineo uniforme.

infatti sostituendo questa equazione nella precedente si trova

$$-\omega^2 A \cos(\omega t + \theta_0) = -\frac{k}{m} A \cos(\omega t + \theta_0) . \quad (17.39)$$

da cui si trova immediatamente  $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ . La legge oraria del moto è pertanto

$$x(t) = A \cos \left( \sqrt{\frac{k}{m}} t + \theta_0 \right) . \quad (17.40)$$

che è nota essere la legge oraria del **moto armonico**. Derivando quest'ultima equazione rispetto al tempo si trova la legge con cui la velocità dipende dal tempo:

$$v(t) = \dot{x}(t) = -\sqrt{\frac{k}{m}} A \operatorname{sen} \left( \sqrt{\frac{k}{m}} t + \theta_0 \right) . \quad (17.41)$$

Derivando ancora si trova l'accelerazione

$$a(t) = \dot{v}(t) = \ddot{x}(t) = -\frac{k}{m} A \cos \left( \sqrt{\frac{k}{m}} t + \theta_0 \right) = -\frac{k}{m} x(t) , \quad (17.42)$$

in accordo con la (17.37).

Le costanti ancora incognite  $A$  e  $\theta_0$  possono essere determinate ricordando le condizioni iniziali su posizione e velocità.  $A$ , detta *ampiezza*, rappresenta la massima distanza da  $O$  raggiunta da  $P$  nel suo moto oscillatorio;  $\theta_0$ , detta *fase iniziale*, è legata alla posizione occupata da  $P$  all'istante  $t = 0$ . Se all'istante iniziale  $t = 0$   $P$  si trova in  $x_0$  (con  $-A \leq x \leq A$ ) con velocità iniziale  $v_0$ , cioè se

$$x(0) = x_0 \quad , \quad v(0) = v_0 . \quad (17.43)$$

Quindi

$$x_0 = A \cos \theta_0 \quad , \quad v_0 = -\sqrt{\frac{k}{m}} A \operatorname{sen} \theta_0 \quad (17.44)$$

che, insieme, consentono di determinare  $A$  e  $\theta_0$ <sup>6</sup>

$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{m v_0^2}{k}} \quad , \quad \theta_0 = -\arctan \left( \sqrt{\frac{m}{k}} \frac{v_0}{x_0} \right) \quad (17.45)$$

Si osservi che, nel caso particolare in cui  $v_0 = 0$ , cioè che  $P$  parta da fermo, vale

$$\begin{cases} \theta_0 = 0 \\ x_0 = A \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} \theta_0 = \pi \\ x_0 = -A \end{cases} \quad (17.46)$$

e quindi la legge oraria diviene

$$x(t) = x_0 \cos \left( \sqrt{\frac{k}{m}} t \right) . \quad (17.47)$$

Il moto armonico di legge oraria (17.40) è periodico, di periodo:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} , \quad (17.48)$$

infatti

$$x(t+T) = A \cos \left[ \sqrt{\frac{m}{k}} \left( t + 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} \right) + \theta_0 \right] = A \cos \left( \sqrt{\frac{m}{k}} t + \theta_0 + 2\pi \right) = x(t) . \quad (17.49)$$

<sup>6</sup> Si lascia al lettore studioso la facile dimostrazione di queste equazioni.

Si possono così riscrivere le leggi del moto in termini del periodo:

$$\begin{cases} x(t) = x_0 \cos\left(\frac{2\pi}{T}t + \theta_0\right) \\ v(t) = -\frac{2\pi}{T}x_0 \sin\left(\frac{2\pi}{T}t + \theta_0\right) \\ a(t) = -\frac{4\pi^2}{T^2}x_0 \cos\left(\frac{2\pi}{T}t + \theta_0\right) . \end{cases} \quad (17.50)$$

#### 17.2.4 MOTO IN UN FLUIDO VISCOSO.

Un corpo in moto in un fluido viscoso è sottoposto ad una forza frenante in ogni istante proporzionale ed opposta al vettore velocità. Tale forza quindi è data da

$$\mathbf{F} = -\beta\mathbf{v} , \quad (17.51)$$

ove  $\beta$  è una costante di proporzionalità che dipende dalla viscosità del fluido e dalle dimensioni del corpo. Si supponga che all'istante iniziale  $t = 0$  la velocità valga  $v_0$  ed il corpo si trovi nell'origine dell'asse delle ascisse; si tratta di trovare la velocità e la posizione in ogni istante successivo. Usando la legge fondamentale della dinamica si può scrivere

$$-\beta\mathbf{v} = m\frac{d\mathbf{v}}{dt} . \quad (17.52)$$

L'unica componente diversa da zero di questi vettori è quella lungo l'asse delle ascisse; l'equazione precedente quindi può venire scritta in forma scalare

$$dv = -\frac{\beta}{m}v dt \quad \longrightarrow \quad \frac{dv}{v} = -\frac{\beta}{m} dt , \quad (17.53)$$

integrando

$$\int_{v_0}^v \frac{dv'}{v'} = -\frac{\beta}{m} \int_0^t dt' \quad \longrightarrow \quad \log v - \log v_0 = -\frac{\beta}{m} t , \quad (17.54)$$

quindi

$$v(t) = v_0 e^{-\frac{\beta}{m}t} . \quad (17.55)$$

Ponendo questo risultato nella prima delle (17.10), con  $x_0 = 0$ , si trova

$$x(t) = \int_0^t v(t') dt' = v_0 \int_0^t e^{-\frac{\beta}{m}t'} dt' = -v_0 \frac{m}{\beta} \left[ e^{-\frac{\beta}{m}t'} \right]_0^t = v_0 \frac{m}{\beta} \left( 1 - e^{-\frac{\beta}{m}t} \right) . \quad (17.56)$$

Si consideri ora il caso in cui il corpo sia sottoposto ad una forza costante. Si immagini per esempio un corpo che si trovi in un fluido (per esempio l'aria) soggetto alla forza peso e che all'istante  $t = 0$  sia ad un'altezza  $h$  dal suolo ed in moto verticale con velocità  $v_0$ . Allora la legge fondamentale della dinamica si scrive

$$m\mathbf{a} = m\mathbf{g} - \beta\mathbf{v} . \quad (17.57)$$

Scelto come verso positivo quello diretto verso il basso, la precedente equazione si può scrivere nella forma

$$m\frac{dv}{dt} = mg - \beta v \quad \longrightarrow \quad \frac{dv}{\beta v - mg} = -\frac{1}{m} dt , \quad (17.58)$$

che, integrata, diventa

$$\beta \int_{v_0}^v \frac{dv'}{\beta v' - mg} = -\frac{\beta}{m} \int_0^t dt' \quad \longrightarrow \quad \log \frac{\beta v - mg}{\beta v_0 - mg} = -\frac{\beta}{m} t \quad (17.59)$$

pertanto

$$\beta v - mg = (\beta v_0 - mg) e^{-\frac{\beta}{m}t} \quad (17.60)$$

e quindi

$$v(t) = \frac{mg}{\beta} + \left(v_0 - \frac{mg}{\beta}\right) e^{-\frac{\beta}{m}t}. \quad (17.61)$$

Si osservi che

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} v(t) = \frac{mg}{\beta} = v_L, \quad (17.62)$$

quindi, qualsiasi sia il valore ed il segno di  $v_0$ , la velocità tende ad un valore limite  $v_L$  (si osservi che la velocità limite è la stessa indipendentemente dal fatto che il corpo all'istante  $t = 0$  si muova verso l'alto o verso il basso). Quindi

$$v(t) = v_L + (v_0 - v_L) e^{-\frac{\beta}{m}t}. \quad (17.63)$$

Nel caso particolare in cui la velocità iniziale sia nulla, vale

$$v(t) = v_L \left(1 - e^{-\frac{\beta}{m}t}\right). \quad (17.64)$$

Si osservi che prendendo il limite di (17.63) per  $\beta \rightarrow 0$ , cioè per viscosità nulla si ottiene:

$$\begin{aligned} \lim_{\beta \rightarrow 0} \left[ v_L + (v_0 - v_L) e^{-\frac{\beta}{m}t} \right] &= \lim_{\beta \rightarrow 0} \left[ v_0 e^{-\frac{\beta}{m}t} + \frac{mg}{\beta} \left(1 - e^{-\frac{\beta}{m}t}\right) \right] = \\ &= v_0 + gt \lim_{\beta \rightarrow 0} \frac{e^{-\frac{\beta}{m}t} - 1}{-\frac{\beta}{m}t} = v_0 + gt, \end{aligned} \quad (17.65)$$

che è la legge della velocità del moto di caduta libera. Sostituendo la (17.63) nella prima delle (17.10) si ottiene la legge oraria del moto (si noti che, con le adottate convenzioni sui segni, la posizione iniziale è  $-h$ ):

$$\begin{aligned} x(t) &= -h + \int_0^t v(t') dt' = -h + \int_0^t \left[ v_L + (v_0 - v_L) e^{-\frac{\beta}{m}t'} \right] dt' = \\ &= -h + v_L t - (v_0 - v_L) \frac{m}{\beta} \left( e^{-\frac{\beta}{m}t} - 1 \right). \end{aligned} \quad (17.66)$$

Prendendo il limite per  $\beta \rightarrow 0$  di questa equazione si ottiene

$$\lim_{\beta \rightarrow 0} x(t) = -h + \lim_{\beta \rightarrow 0} \left\{ -\frac{v_0 m}{\beta} \left( e^{-\frac{\beta}{m}t} - 1 \right) + \frac{mg}{\beta} \left[ t + \frac{m}{\beta} \left( e^{-\frac{\beta}{m}t} - 1 \right) \right] \right\}. \quad (17.67)$$

Considerando il primo addendo dentro alle parentesi graffe si vede che, similmente al limite visto sopra, si ottiene  $v_0 t$ ; per quanto riguarda il secondo, conviene sviluppare la funzione esponenziale in serie di Mac Laurin<sup>7</sup> (il calcolo del limite in questione si può fare anche usando il teorema di de L'Hôpital<sup>8</sup>: ci provi il lettore studioso). Si ottiene allora:

$$\begin{aligned} \lim_{\beta \rightarrow 0} x(t) &= -h + v_0 t + mg \lim_{\beta \rightarrow 0} \left[ \frac{t}{\beta} + \frac{m}{\beta^2} \left( 1 - \frac{\beta}{m} t + \frac{1}{2} \frac{\beta^2}{m^2} t^2 - 1 \right) \right] = \\ &= -h + v_0 t + mg \lim_{\beta \rightarrow 0} \left( \frac{t}{\beta} - \frac{m}{\beta^2} \frac{\beta}{m} t + \frac{m}{\beta} \frac{1}{2} \frac{\beta^2}{m^2} t^2 \right) = \\ &= -h + v_0 t + \frac{1}{2} g t^2 \end{aligned} \quad (17.68)$$

che è la legge del moto di un corpo in caduta libera da un'altezza  $h$ .

<sup>7</sup> Colin Mac Laurin (1698-1746), matematico inglese.

<sup>8</sup> Guillaume-François-Antoine de L'Hôpital (1661-1704), matematico francese.

### 17.3 LAVORO ED ENERGIA CINETICA.

Se per una forza costante la definizione di lavoro come forza per spostamento  $\mathcal{L} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{s}$  è perfettamente adeguata, questo non è vero nel caso di forza variabile. In tal caso si deve definire il lavoro  $d\mathcal{L}$  corrispondente ad uno spostamento infinitesimo  $d\mathbf{s}$ :

$$d\mathcal{L} = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} . \quad (17.69)$$

Per spostamenti finiti è necessario sommare i contributi di tutti i successivi spostamenti infinitesimi, si deve quindi fare un integrale. Questo integrale, detto **integrale di linea**, in generale è piuttosto complicato e non viene qui trattato. Se però la traiettoria è rettilinea l'integrale di linea diventa semplice: se un punto materiale si muove lungo una retta, che senza perdita di generalità può essere fatto coincidere con l'asse delle  $x$ , sottoposto ad una forza  $\mathbf{F}$ , spostandosi dal punto  $P_1$  al punto  $P_2$ , rispettivamente di ascisse  $x_1$  ed  $x_2$ , il lavoro fatto dalla forza è

$$\mathcal{L}_{P_1 \rightarrow P_2} = \int_{x_1}^{x_2} F(x) dx . \quad (17.70)$$

Si consideri, come primo esempio, il caso di un punto materiale di massa, inizialmente fermo, che sottoposto ad una forza elastica di richiamo  $F = -kx$ , con  $k = 20 \text{ N/m}$  si sposta di 20 cm dal punto di ascissa  $x_1 = 2.2 \text{ m}$  al punto di ascissa  $x_2 = 2.0 \text{ m}$ . Il lavoro compiuto dalla forza quindi è

$$\mathcal{L} = \int_{x_1}^{x_2} (-kx) dx = \left[ -\frac{1}{2} kx^2 \right]_{x_1}^{x_2} = \frac{1}{2} k (x_1^2 - x_2^2) = 8.4 \text{ J} . \quad (17.71)$$

Si consideri ora il caso in cui si conosca la legge di variazione della forza nel tempo; in tal caso lo spostamento infinitesimo può venir scritto nella forma  $dx = v(t)dt$  e quindi il lavoro compiuto fra gli istanti  $t_1$  e  $t_2$  diviene

$$\mathcal{L} = \int_{t_1}^{t_2} F(t) v(t) dt . \quad (17.72)$$

Ad esempio, un punto materiale di massa  $m$ , inizialmente fermo, sia sottoposto ad una forza la cui legge temporale sia

$$F(t) = \frac{t-1}{t+1} . \quad (17.73)$$

Per usare l'equazione (17.72), è necessario conoscere la legge temporale  $v(t)$  della velocità. Osservando che  $a(t) = \frac{F(t)}{m}$ , si può scrivere

$$\begin{aligned} v(t) &= \int_0^t a(t') dt' = \frac{1}{m} \int_0^t \frac{t'-1}{t'+1} dt' = \frac{1}{m} \int_0^t \left( 1 - \frac{2}{t'+1} \right) dt' = \\ &= \frac{1}{m} \left[ t' - 2 \log(t'+1) \right]_0^t = \frac{1}{m} [t - 2 \log(t+1)] . \end{aligned} \quad (17.74)$$

A questo punto è possibile calcolare il lavoro compiuto dalla forza fra due istanti arbitrari, siano per esempio  $t_1 = 0 \text{ s}$  e  $t_2 = 4 \text{ s}$ . Quindi, usando la (17.72),

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{1}{m} \int_0^4 \frac{t-1}{t+1} [t - 2 \log(t+1)] dt = \frac{1}{m} \int_0^4 \left[ t - \frac{2t}{t+1} - 2 \frac{t-1}{t+1} \log(t+1) \right] dt = \\ &= \frac{1}{m} \int_0^4 \left( t - 2 + \frac{2}{t+1} \right) dt - \frac{2}{m} \int_1^5 \frac{u-2}{u} \log u du = \\ &= \frac{1}{m} \left[ \frac{1}{2} t^2 - 2t + 2 \log(t+1) \right]_0^4 - \frac{2}{m} \int_1^5 \log u du + \frac{4}{m} \int_1^5 \frac{1}{u} \log u du = \\ &= \frac{2}{m} \log 5 - \frac{2}{m} [u \log u - u]_1^5 + \frac{2}{m} [\log^2 u]_1^5 = \\ &= \frac{2}{m} (\log 5 - 5 \log 5 + 5 - 1 + \log^2 5) = \\ &= \frac{2}{m} (2 - \log 5)^2 , \end{aligned} \quad (17.75)$$

ove si è fatta la sostituzione  $u = t + 1$ .

Il calcolo ora fatto è molto semplificato ove si osservi che

$$d\mathcal{L} = F(t) v(t) dt = ma(t) v(t) dt = m \frac{dv(t)}{dt} v(t) dt = d\left(\frac{1}{2} mv^2(t)\right). \quad (17.76)$$

In questo modo l'equazione (17.72) diviene

$$\mathcal{L} = \int_{t_1}^{t_2} d\left(\frac{1}{2} mv^2(t)\right) = \frac{1}{2} mv^2(t_2) - \frac{1}{2} mv^2(t_1), \quad (17.77)$$

e quindi per l'esempio visto sopra si trova, usando la (17.74)

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} mv^2(4) - \frac{1}{2} mv^2(0) = \frac{1}{2} m \left[ \frac{1}{m} (4 - 2 \log 5) \right]^2 = \frac{2}{m} (2 - \log 5)^2. \quad (17.78)$$

La quantità

$$E_C = \frac{1}{2} mv^2 \quad (17.79)$$

viene detta **energia cinetica** di un corpo di massa  $m$  e velocità di modulo  $v$ . È quindi possibile calcolare il lavoro di una forza conoscendo le velocità iniziale e finale. Le precedenti equazioni (17.76) e (17.77) sono infatti la dimostrazione del seguente **teorema dell'energia cinetica**.

*Il lavoro compiuto da una forza su di un corpo è sempre uguale alla variazione di energia cinetica del corpo.*

$$\mathcal{L} = \Delta E_C. \quad (17.80)$$

#### 17.4 ENERGIA POTENZIALE E CONSERVAZIONE DELL'ENERGIA.

Un altro caso in cui l'integrale che consente il calcolo del lavoro è facile da eseguire è il caso in cui la forza è **conservativa**.

*Una forza  $\mathbf{F}$  è detta conservativa se è possibile scrivere il suo lavoro corrispondente ad uno spostamento infinitesimo come differenziale di una funzione della posizione.*

Quindi  $\mathbf{F}$  è conservativa se esiste una  $U(x)$  tale che

$$d\mathcal{L} = -dU(x), \quad (17.81)$$

il segno meno è convenzionale e arbitrario. In questo caso il lavoro relativo allo spostamento da  $x_1$  a  $x_2$  diviene

$$\mathcal{L} = - \int_{x_1}^{x_2} dU(x) = - \int_{x_1}^{x_2} \frac{dU(x)}{dx} dx = U(x_1) - U(x_2) = -\Delta U. \quad (17.82)$$

La funzione della posizione  $U(x)$ , è detta **energia potenziale**. Quindi se la forza che agisce su di un corpo è conservativa il suo lavoro è opposto alla variazione dell'energia potenziale del corpo. Ma, come visto sopra, il lavoro è anche uguale alla variazione dell'energia cinetica del corpo, cioè

$$\mathcal{L}_{A \rightarrow B} = E_C(B) - E_C(A) = U(A) - U(B), \quad (17.83)$$

da cui si ottiene facilmente

$$E_C(A) + U(A) = E_C(B) + U(B), \quad (17.84)$$

Quindi, se la forza che agisce è conservativa, la somma di energia cinetica e potenziale del corpo ha lo stesso valore in  $A$  ed in  $B$ . Ma osservando che i punti  $A$  e  $B$  sono completamente arbitrari, si può concludere che la somma di energia cinetica e potenziale rimane costante in ogni punto del moto. A questa costante viene dato il nome di **energia meccanica** e viene indicata con il simbolo

$$E = E_C + U. \quad (17.85)$$

Resta così dimostrato il **teorema di conservazione dell'energia meccanica**.

*Se un corpo è in moto sotto l'azione di sole forze conservative, la sua energia meccanica resta costante durante il moto.*

## 17.5 ESEMPI.

Si presentano qui di seguito alcuni esempi della determinazione delle energia potenziali per alcune importanti di forze conservative.

### 17.5.1 FORZA PESO.

Un corpo di massa  $m$  che si trovi sulla superficie terrestre è sottoposto alla forza peso

$$\mathbf{F} = -m\mathbf{g} . \quad (17.86)$$

Se il corpo si muove verso l'alto di una quantità infinitesima  $dy$  il lavoro infinitesimo fatto dalla forza peso è

$$d\mathcal{L} = -mg dy = -d(mgy) , \quad (17.87)$$

quindi, usando la (17.81), si ottiene la ben nota equazione

$$U = mgy . \quad (17.88)$$

### 17.5.2 FORZA ELASTICA.

Un corpo attaccato ad una molla di costante elastica  $k$  è soggetto ad una forza data da

$$\mathbf{F} = -k\mathbf{x} . \quad (17.89)$$

Se la molla si allunga della quantità infinitesima  $dx$ , la forza compie il lavoro infinitesimo dato da

$$d\mathcal{L} = -kx dx = -d\left(\frac{1}{2} kx^2\right) , \quad (17.90)$$

e quindi

$$U = \frac{1}{2} kx^2 . \quad (17.91)$$

### 17.5.3 FORZA CENTRIPETA.

Un corpo di massa  $m$  che si muova con velocità angolare costante  $\omega$  lungo una traiettoria circolare di raggio  $r$  è sottoposto ad una forza centripeta di equazione

$$\mathbf{F} = -m\omega^2\mathbf{r} . \quad (17.92)$$

Se il raggio della traiettoria aumenta della quantità infinitesima  $dr$ , la forza centripeta compie il lavoro infinitesimo

$$d\mathcal{L} = -m\omega^2 r dr = -d\left(\frac{1}{2} m\omega^2 r^2\right) , \quad (17.93)$$

e quindi

$$U = \frac{1}{2} m\omega^2 r^2 . \quad (17.94)$$

### 17.5.4 FORZA GRAVITAZIONALE.

Su un corpo di massa  $m$  che si trovi a distanza  $r$  da un secondo corpo di massa  $M$  agisce una forza di attrazione data da

$$\mathbf{F} = -G \frac{Mm}{r^2} \hat{\mathbf{r}} , \quad (17.95)$$

ove  $\hat{r}$  è il versore diretto da  $M$  a  $m$ . Se la distanza fra i due corpi aumenta di una quantità infinitesima  $dr$ , il lavoro infinitesimo fatto dalla forza in questione è

$$d\mathcal{L} = -G \frac{Mm}{r^2} dr = d\left(G \frac{Mm}{r}\right), \quad (17.96)$$

e quindi

$$U = -G \frac{Mm}{r}. \quad (17.97)$$

### 17.5.5 FORZA DI COULOMB.

Su di una carica  $q$  che si trovi a distanza  $r$  da una seconda carica  $Q$  agisce una forza data da

$$\mathbf{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qq}{r^2} \hat{r}, \quad (17.98)$$

ove  $\hat{r}$  è il versore diretto da  $Q$  a  $q$ . La identità formale con il caso precedente porta subito a concludere per l'energia potenziale l'equazione

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qq}{r}. \quad (17.99)$$

## 17.6 RELAZIONE FRA FORZA ED ENERGIA POTENZIALE.

Si osservi che il lavoro infinitesimo di una forza può essere scritto nella forma

$$d\mathcal{L} = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = F_x dx, \quad (17.100)$$

ove si è scelto l'asse  $x$  orientato come lo spostamento  $d\mathbf{s}$ . Quindi, se la forza  $\mathbf{F}$  è conservativa, l'equazione (17.81) può essere riscritta nella forma

$$\mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = F_x dx = -\frac{dU(x)}{dx} dx \quad (17.101)$$

da cui si trova facilmente che la componente della forza nella direzione dello spostamento è opposta alla derivata della funzione energia potenziale:

$$F_x = -\frac{dU(x)}{dx}. \quad (17.102)$$

è immediato verificare la proprietà ora ricavata negli esempi trattati al paragrafo precedente.

## 17.7 DINAMICA DEL MOTO ROTATORIO DI UN PUNTO MATERIALE.

Nello studio del moto rotatorio del punto materiale risulta utile il concetto di **momento della quantità di moto** o **momento angolare**. Esso è definito come segue. Il momento angolare rispetto ad un punto  $O$  di un punto materiale che, trovandosi nel punto  $P$ , abbia velocità  $\mathbf{v}$ , è il vettore

$$\mathbf{L}_O = \mathbf{OP} \wedge m\mathbf{v}. \quad (17.103)$$

La direzione di  $\mathbf{L}_O$  è perpendicolare al piano che contiene  $\mathbf{OP}$  e  $\mathbf{v}$ , il verso è dato dalla regola della mano destra e il modulo è dato da

$$L_O = mrv \sin \theta, \quad (17.104)$$

dove con  $r$  si è indicato il modulo del vettore  $\mathbf{OP}$ , con il simbolo  $\theta$  l'angolo compreso fra i vettori  $\mathbf{OP}$  e  $\mathbf{v}$ .

**Osservazioni**

1. Il punto  $O$ , rispetto al quale è definito il momento angolare è detto **polo**. Nel caso che il moto sia circolare, il polo è solitamente il centro della traiettoria; tale scelta non è però vincolante ed il momento angolare rimane definito per qualunque scelta del polo. La relazione fra il momento angolare calcolato rispetto al polo  $O$  e rispetto ad un diverso polo  $\Omega$  è

$$\mathbf{L}_\Omega = \boldsymbol{\Omega P} \wedge m\mathbf{v} = (\boldsymbol{\Omega O} + \mathbf{OP}) \wedge m\mathbf{v} = \mathbf{L}_O + \boldsymbol{\Omega O} \wedge m\mathbf{v} . \quad (17.105)$$

2. Nel caso particolare ma importante di un moto circolare uniforme, il momento angolare è perpendicolare al piano in cui si svolge il moto e il suo verso punta nella direzione dalla quale il moto è visto svolgersi in senso antiorario, inoltre poiché  $\mathbf{v}$  e  $\mathbf{OP}$  sono perpendicolari il modulo del momento angolare può essere scritto nella forma

$$L_O = mrv = mr^2\omega , \quad (17.106)$$

ove nello scrivere l'ultima equazione si è tenuta presente la relazione fra i moduli della velocità lineare e della velocità angolare:  $v = \omega r$ . È conveniente definire il vettore  $\boldsymbol{\omega}$  avente come modulo il valore di  $\omega$ , come direzione quella perpendicolare al piano del moto e come verso quello tale che un osservatore disposto come  $\boldsymbol{\omega}$  veda il moto svolgersi in senso antiorario. Con tale definizione il vettore  $\mathbf{L}_O$  può essere scritto nella forma

$$\mathbf{L}_O = mr^2\boldsymbol{\omega} . \quad (17.107)$$

Quando il punto materiale  $P$  è sottoposto ad una forza  $\mathbf{F}$  il vettore  $\mathbf{v}$  varia e quindi anche il vettore  $\mathbf{L}_O$ ; qui si vuole stabilire come. Si consideri quindi la derivata di  $\mathbf{L}_O$  rispetto al tempo:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{L}_O}{dt} &= \frac{d}{dt}(\mathbf{OP} \wedge m\mathbf{v}) = \frac{d\mathbf{OP}}{dt} \wedge m\mathbf{v} + \mathbf{OP} \wedge m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \\ &= \mathbf{v} \wedge m\mathbf{v} + \mathbf{OP} \wedge m\mathbf{a} = \mathbf{OP} \wedge \mathbf{F} = \mathbf{M}_O , \end{aligned} \quad (17.108)$$

da cui si riconosce che la derivata temporale del momento angolare è uguale al momento della forza esterna agente su  $P$  calcolata rispetto allo stesso polo. Se il momento della risultante delle forze agenti sul punto materiale è nullo la variazione del momento angolare nel tempo è nulla, cioè il momento angolare è una costante. Ho quindi il seguente **principio di conservazione del momento angolare**.

*Se il momento della risultante delle forze agenti su di un punto materiale è nullo il momento angolare è costante durante il moto.*

**17.8 FORZE CENTRALI.**

Un punto materiale  $P$  è sottoposto ad una **forza centrale** se

1. in ogni punto dello spazio la direzione del vettore forza è la retta passante per  $P$  e per un punto fisso  $O$ , detto *centro*;
2. il modulo della forza dipende solo dalla distanza  $r$  di  $P$  dal centro  $O$  e la funzione  $F(r)$  è continua ovunque tranne, al più, in  $O$ .

Le forze centrali hanno le seguenti proprietà.

- A.** *Il momento angolare di un punto materiale  $P$  in moto sotto l'azione di una forza centrale è costante.*

Infatti vale

$$\frac{d\mathbf{L}_O}{dt} = \mathbf{OP} \wedge \mathbf{F} , \quad (17.109)$$

ma, poiché la forza è centrale, i vettori  $\mathbf{OP}$  ed  $\mathbf{F}$  hanno la stessa direzione quindi il loro prodotto vettoriale è nullo, pertanto

$$\frac{d\mathbf{L}_O}{dt} = 0 \quad \longrightarrow \quad \mathbf{L}_O = \text{costante} . \quad (17.110)$$

**B.** *Il moto sotto l'azione di una forza centrale si svolge su di un piano.*

Infatti  $\mathbf{L}_0 = \mathbf{OP} \wedge m\mathbf{v}$  è un vettore costante e il vettore  $\mathbf{OP}$  è perpendicolare ad  $\mathbf{L}_0$ , è cioè perpendicolare ad una direzione fissa, quindi  $P$  deve necessariamente muoversi su di un piano. Questo fatto consente di studiare il moto in coordinate polari.

**C.** *Una forza centrale è sempre conservativa.*

Infatti si consideri il lavoro infinitesimo corrispondente ad uno spostamento infinitesimo  $d\mathbf{s}$ :

$$d\mathcal{L} = \mathbf{F}(r) \cdot d\mathbf{s} = F(r) dr, \quad (17.111)$$

ove  $dr$  è la componente di  $d\mathbf{s}$  nella direzione della forza. Poiché la funzione  $F(r)$  è continua (tranne, al più, per  $r = 0$ ), ammette primitiva; esiste quindi certamente una funzione  $U(r)$  tale che sia  $dU(r) = -F(r)dr$ .

**D.** *In un moto centrale la velocità areolare è costante.*

Infatti si è visto sopra che ciò accade se l'accelerazione cui è sottoposto un punto materiale è centripeta o centrifuga. Ma, evidentemente, se la forza è centrale l'accelerazione soddisfa certamente a questa condizione.

## 17.9 DINAMICA DI DUE PUNTI MATERIALI. PROBLEMA DI KEPLER.

In questo paragrafo si studia il moto di due punti materiali mutuamente interagenti e non soggetti ad altre forze, che costituiscano, quindi, un sistema isolato. Siano  $\mathbf{F}_1$  ed  $\mathbf{F}_2$  le forze agenti rispettivamente sul punto materiale 1 e sul punto materiale 2, deve valere  $\mathbf{F}_1 = -\mathbf{F}_2$ . In questo caso la quantità di moto totale del sistema, com'è noto, si conserva; quello che interessa ora è però la determinazione del moto dei due punti mediante la risoluzione delle equazioni della dinamica. Come importante caso particolare, si ricaveranno le tre leggi di Kepler.<sup>9</sup>

Si scelga come sistema di riferimento quello avente il centro nel centro di massa  $G$ ; in questo caso, chiamando  $P_1$  e  $P_2$  le posizioni dei due punti materiali, vale la relazione

$$m_1 \mathbf{GP}_1 + m_2 \mathbf{GP}_2 = 0. \quad (17.112)$$

Indicando con  $\mathbf{r}$ , il vettore  $\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2$ , vale

$$\mathbf{r} = \mathbf{GP}_1 - \mathbf{GP}_2; \quad (17.113)$$

Da queste due equazioni è possibile ricavare, con semplici calcoli che vengono lasciati al lettore studioso,

$$\begin{cases} \mathbf{GP}_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \mathbf{r}, \\ \mathbf{GP}_2 = -\frac{m_1}{m_1 + m_2} \mathbf{r}. \end{cases} \quad (17.114)$$

Si osservi inoltre che, derivando rispetto al tempo del vettore  $\mathbf{r}$ , si ottiene

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d\mathbf{GP}_1}{dt} - \frac{d\mathbf{GP}_2}{dt} = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2, \quad (17.115)$$

ove  $\mathbf{v}_1$  e  $\mathbf{v}_2$  sono le velocità rispetto al centro di massa. Con queste definizioni le leggi del moto dei due punti materiali si scrivono

$$\frac{d\mathbf{v}_1}{dt} = \frac{\mathbf{F}_1}{m_1} \quad \frac{d\mathbf{v}_2}{dt} = \frac{\mathbf{F}_2}{m_2}, \quad (17.116)$$

che, sottratte membro a membro, diventano

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) = \frac{\mathbf{F}_1}{m_1} - \frac{\mathbf{F}_2}{m_2}, \quad (17.117)$$

<sup>9</sup> Johannes Kepler (1571-1630), astronomo tedesco.

cioè

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \left( \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) \mathbf{F}_1 . \quad (17.118)$$

Il problema del moto di due punti materiali mutuamente interagenti, studiato rispetto al centro di massa, è pertanto equivalente al problema di un unico punto materiale di massa  $m$  tale che

$$\frac{1}{m} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \quad \longrightarrow \quad m = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} , \quad (17.119)$$

soggetto alla forza di mutua interazione dei due punti. Una volta risolto tale problema e determinato  $\mathbf{r}(t)$ , è possibile determinare il moto dei due punti materiali  $P_1$  e  $P_2$ , e quindi  $\mathbf{G}P_1(t)$  e  $\mathbf{G}P_2(t)$  usando le (17.114). La massa  $m$ , definita dall'equazione (17.119), è detta **massa ridotta**.

### Osservazioni

1. Nel caso in cui i due punti materiali abbiano la stessa massa, cioè sia  $m_1 = m_2$ , la massa ridotta è la metà di ciascuna massa. Nel caso in cui i due punti materiali siano uno molto più massivo dell'altro, il centro di massa del sistema coincide praticamente con la massa maggiore che quindi può essere considerata ferma; in questo caso la massa ridotta coincide praticamente con la massa minore, infatti se  $m_1 \ll m_2$  e quindi  $m_1/m_2 \ll 1$ , vale

$$m = m_1 \frac{1}{1 + \frac{m_1}{m_2}} \simeq m_1 . \quad (17.120)$$

2. Quest'ultimo caso è particolarmente rilevante nel caso in cui si studi il sistema Sole–Pianeta, usando il modello di punti materiali interagenti solo fra loro; in questo caso infatti è un'ottima approssimazione considerare il Sole fermo nel centro di massa del sistema ed il pianeta in moto sotto l'azione di una forza diretta verso il centro, cioè verso il Sole. Con questo esempio in mente, d'ora innanzi si considererà quindi il problema di un punto materiale di massa  $m$  in moto sotto l'azione di una forza diretta verso un centro fisso.

La **seconda legge di Kepler** scende immediatamente dal fatto che la forza di attrazione fra il Sole e un Pianeta è centrale, come discusso sopra. Le altre due leggi si trovano risolvendo il problema dinamico e determinando l'equazione della traiettoria. Poiché la forza in gioco è centrale, la traiettoria è piana. Conviene introdurre le coordinate polari (17.16). Inoltre, sempre a causa del fatto che la forza è centrale, il momento angolare  $\mathbf{L}_O$  e l'energia meccanica  $E$  sono costanti. Per quanto riguarda il momento angolare vale

$$\mathbf{L}_O = \mathbf{r} \wedge m\mathbf{v} , \quad (17.121)$$

il cui modulo, osservando che la componente radiale della velocità, equazione (17.18), dà contributo nullo al prodotto vettoriale, si può scrivere

$$L_O = mrv_\theta = mr^2 \frac{d\theta}{dt} , \quad (17.122)$$

ove si è usata la seconda delle (17.19). Da questa equazione si ottiene facilmente la seguente relazione

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{L_O}{mr^2} . \quad (17.123)$$

Per quanto riguarda l'energia meccanica vale

$$E = \frac{1}{2} mv^2 - G \frac{m_1 m_2}{r} , \quad (17.124)$$

da cui si ottiene immediatamente

$$v^2 = \frac{2}{m} \left( E + G \frac{m_1 m_2}{r} \right) . \quad (17.125)$$

Si osservi ora che dalla (17.18) si ottiene

$$v^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2 \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \left(\frac{dr}{d\theta} \frac{d\theta}{dt}\right)^2 + r^2 \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 \left[ \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + r^2 \right], \quad (17.126)$$

che, usando la (17.123), si può scrivere

$$v^2 = \frac{L_o^2}{m^2 r^4} \left[ r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 \right]. \quad (17.127)$$

Confrontando (17.125) e (17.127) si ottiene:

$$\frac{2}{m} \left( E + G \frac{m_1 m_2}{r} \right) = \frac{L_o^2}{m^2 r^4} \left[ r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 \right], \quad (17.128)$$

da cui, con semplici passaggi,

$$\frac{1}{r^4} \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 = \frac{2mE}{L_o^2} + \frac{2Gm_1 m_2 m}{L_o^2} \frac{1}{r} - \frac{1}{r^2}. \quad (17.129)$$

Con la sostituzione

$$\xi = \frac{1}{r} \quad \longrightarrow \quad \frac{d\xi}{d\theta} = -\frac{1}{r^2} \frac{dr}{d\theta} \quad \longrightarrow \quad \frac{dr}{d\theta} = -r^2 \frac{d\xi}{d\theta}, \quad (17.130)$$

la precedente equazione diviene

$$\left(\frac{d\xi}{d\theta}\right)^2 = \frac{2mE}{L_o^2} + \frac{2Gm_1 m_2 m}{L_o^2} \xi - \xi^2. \quad (17.131)$$

Questa può essere facilmente integrata. Posto

$$A = \frac{2mE}{L_o^2}, \quad B = \frac{2Gm_1 m_2 m}{L_o^2}, \quad (17.132)$$

si tratta di integrare l'equazione

$$\frac{d\xi}{\sqrt{A + B\xi - \xi^2}} = \pm d\theta. \quad (17.133)$$

Si osservi che vale

$$A + B\xi - \xi^2 = A + \frac{B^2}{4} - \left(\frac{B}{2} - \xi\right)^2 \quad (17.134)$$

da cui

$$\sqrt{A + B\xi - \xi^2} = \sqrt{A + \frac{B^2}{4}} \sqrt{1 - \frac{(B/2 - \xi)^2}{A + B^2/4}}. \quad (17.135)$$

Quindi, posto

$$\zeta = \frac{B/2 - \xi}{\sqrt{A + B^2/4}}, \quad -\frac{d\xi}{\sqrt{A + B^2/4}} = d\zeta, \quad (17.136)$$

si ottiene

$$-\frac{d\zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}} = \pm d\theta, \quad (17.137)$$

che, integrato, dà

$$\arccos \zeta = \pm \theta \quad \longrightarrow \quad \zeta = \cos(\pm \theta) = \cos \theta. \quad (17.138)$$

Quindi

$$\xi = \frac{B}{2} - \sqrt{A + \frac{B^2}{4}} \cos \theta = \frac{B}{2} \left( 1 - \sqrt{1 + \frac{4A}{B^2}} \cos \theta \right) \quad (17.139)$$

cioè

$$r = \frac{\ell}{1 - e \cos \theta} , \quad (17.140)$$

ove

$$\ell = \frac{2}{B} = \frac{L_O^2}{Gm_1m_2m} \quad (17.141)$$

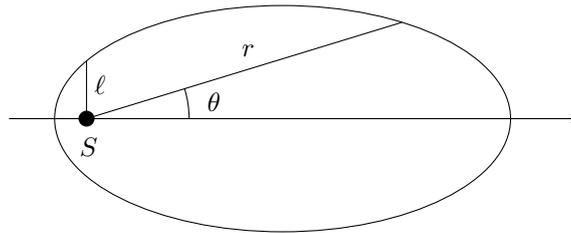
e

$$e = \sqrt{1 + \frac{4A}{B^2}} = \sqrt{1 + \frac{2mE}{L_O^2} \cdot \frac{L_O^4}{G^2m_1^2m_2^2m^2}} = \sqrt{1 + \frac{2EL_O^2}{G^2m_1^2m_2^2m}} . \quad (17.142)$$

La (17.140) è l'equazione in coordinate polari di una conica di eccentricità  $e$ . Si osservi che il tipo di conica dipende dal segno di  $E$ , si ha infatti

$$\begin{aligned} E > 0 &\longrightarrow e > 1 \quad \text{iperbole} \\ E = 0 &\longrightarrow e = 1 \quad \text{parabola} \\ E < 0 &\longrightarrow e < 1 \quad \text{ellisse} \end{aligned} \quad (17.143)$$

Trattandosi di pianeti, si osservano solo le orbite chiuse e quindi ellittiche. Il fuoco sta nel centro di massa, che nel caso di una coppia Sole-Pianeta, coincide praticamente con la posizione del centro del Sole. Ecco la **prima legge di Kepler**.



**Figura 17.5:** L'ellisse in coordinate polari.

In questo caso l'afelio si ha per  $\theta = 0$  e il perielio per  $\theta = \pi$ , e quindi

$$r_A = \frac{\ell}{1 - e} \quad , \quad r_P = \frac{\ell}{1 + e} , \quad (17.144)$$

i semiassi maggiore e minore dell'ellisse quindi sono rispettivamente:

$$a = \frac{r_A + r_P}{2} = \frac{\ell}{1 - e^2} \quad , \quad b = a\sqrt{1 - e^2} . \quad (17.145)$$

L'area racchiusa dall'ellisse è

$$\pi ab = \pi a^2 \sqrt{1 - e^2} = \pi a^2 \sqrt{\frac{\ell}{a}} = \pi a^{3/2} \sqrt{\ell} . \quad (17.146)$$

Per la velocità areolare posso usare la (17.28):

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt} = \frac{L_O}{2m} , \quad (17.147)$$

che deve essere uguale all'area totale diviso il periodo di rivoluzione  $T$ , quindi

$$\frac{L_O}{2m} = \frac{\pi ab}{T} \quad \longrightarrow \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{Gm_1m_2}} a^{3/2} = \frac{2\pi}{\sqrt{G(m_1 + m_2)}} a^{3/2} . \quad (17.148)$$

che è la **terza legge di Kepler**.

**17.10 OSCILLAZIONI SMORZATE.**

Se un corpo di massa  $m$  è sottoposto ad una forza elastica di costante  $k$  che lo mette in oscillazione, ma questa oscillazione avviene in un fluido viscoso, come l'aria, l'oscillazione, com'è noto dall'esperienza quotidiana, in breve tempo si smorza e si ferma. Qui si vuole studiare la legge del moto di oscillazione smorzata. Come visto sopra, equazione (17.51), la forza di attrito viscoso è proporzionale alla velocità; la forza totale agente sul corpo è quindi data dalla forza elastica più la forza d'attrito:  $\mathbf{F} = -k\mathbf{x} - \beta\mathbf{v}$ , e la legge del moto diventa

$$m\mathbf{a} = -k\mathbf{x} - \beta\mathbf{v} . \tag{17.149}$$

Se il moto avviene lungo l'asse  $x$ , posto  $\gamma = \beta/m$ ,  $\omega^2 = k/m$ , la precedente equazione si può scrivere

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \gamma \frac{dx}{dt} + \omega^2 x = 0 . \tag{17.150}$$

Si tratta di una equazione differenziale omogenea del secondo ordine la cui soluzione generale ha la forma

$$x(t) = a_1 e^{\lambda_1 t} + a_2 e^{\lambda_2 t} , \tag{17.151}$$

sostituendo, infatti, si trova

$$a_1 \lambda_1^2 e^{\lambda_1 t} + a_2 \lambda_2^2 e^{\lambda_2 t} + a_1 \gamma \lambda_1 e^{\lambda_1 t} + a_2 \gamma \lambda_2 e^{\lambda_2 t} + a_1 \omega^2 e^{\lambda_1 t} + a_2 \omega^2 e^{\lambda_2 t} = 0 , \tag{17.152}$$

da cui, raccogliendo,

$$(\lambda_1^2 + \gamma \lambda_1 + \omega^2) a_1 e^{\lambda_1 t} + (\lambda_2^2 + \gamma \lambda_2 + \omega^2) a_2 e^{\lambda_2 t} = 0 . \tag{17.153}$$

Perché questa equazione sia vera in ogni istante, devono essere nulli i termini fra parentesi; quindi  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  sono le soluzioni dell'equazione di secondo grado  $\lambda^2 + \gamma\lambda + \omega^2 = 0$ , cioè

$$\lambda_1 = \frac{1}{2} \left[ -\gamma - \sqrt{\gamma^2 - 4\omega^2} \right] , \quad \lambda_2 = \frac{1}{2} \left[ -\gamma + \sqrt{\gamma^2 - 4\omega^2} \right] . \tag{17.154}$$

Vi sono così tre casi diversi:

1.  $\gamma^2 - 4\omega^2 > 0$ :  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  sono costanti reali entrambe negative. Il moto non è oscillatorio, la legge del moto è esponenziale il corpo si porta asintoticamente nella posizione di equilibrio, l'attrito è sufficiente ad impedire ogni oscillazione:

$$x(t) = a_1 e^{-|\lambda_1|t} + a_2 e^{-|\lambda_2|t} . \tag{17.155}$$

2.  $\gamma^2 - 4\omega^2 = 0$ :  $\lambda_1 = \lambda_2 = -\gamma/2$ . La soluzione generale, in questo caso ha la forma (lo verifichi il lettore studioso)

$$x(t) = (a_1 + t a_2) e^{-\frac{\gamma}{2}t} ; \tag{17.156}$$

qualitativamente il comportamento è uguale al caso precedente: moto esponenziale, nessuna oscillazione.

3.  $\gamma^2 - 4\omega^2 < 0$ :  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  sono complesse e coniugate; posto  $\gamma^2 - 4\omega^2 = -4\omega_0^2$  vale:

$$\lambda_1 = -\frac{\gamma}{2} - i\omega_0 , \quad \lambda_2 = -\frac{\gamma}{2} + i\omega_0 . \tag{17.157}$$

Quindi

$$x(t) = a_1 e^{-(\gamma/2+i\omega_0)t} + a_2 e^{-(\gamma/2-i\omega_0)t} = e^{-\frac{\gamma}{2}t} (a_1 e^{-i\omega_0 t} + a_2 e^{+i\omega_0 t}) . \tag{17.158}$$

Imponendo che  $x(t)$  sia reale, cioè  $x(t)^* = x(t)$ , si ottiene

$$e^{-\frac{\gamma}{2}t} (a_1^* e^{i\omega_0 t} + a_2^* e^{-i\omega_0 t}) = e^{-\frac{\gamma}{2}t} (a_1 e^{-i\omega_0 t} + a_2 e^{+i\omega_0 t}) , \tag{17.159}$$

da cui si riconosce subito che  $a_1$  ed  $a_2$  sono complessi coniugati:  $a_1 = a_2^*$ . Possono essere quindi scritti, in termini di modulo e fase, nella forma

$$a_1 = \frac{1}{2}A e^{-i\varphi} \quad , \quad a_2 = \frac{1}{2}A e^{+i\varphi} . \quad (17.160)$$

Quindi la legge del moto diventa

$$x(t) = e^{-\frac{\gamma}{2}t} \frac{1}{2}A \left[ e^{-i(\omega_0 t + \varphi)} + e^{+i(\omega_0 t + \varphi)} \right] = A e^{-\frac{\gamma}{2}t} \cos(\omega_0 t + \varphi) , \quad (17.161)$$

che rappresenta un'oscillazione di pulsazione  $\omega_0$ , con ampiezza decrescente in modo esponenziale, come rappresentato in figura. Questo moto è detto **oscillazione smorzata**.

### 17.11 OSCILLAZIONI FORZATE.

Si supponga ora che sul corpo agisca una forza esterna variabile nel tempo secondo una legge armonica:

$$F(t) = F_0 \cos(\Omega t + \Delta) . \quad (17.162)$$

Se forza agisce nella direzione dell'asse x, l'equazione (17.150) va modificata nella

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \gamma \frac{dx}{dt} + \omega^2 x = \frac{F_0}{m} \cos(\Omega t + \Delta) . \quad (17.163)$$

Questa è una equazione differenziale non omogenea del secondo ordine. La sua soluzione piú generale è data dalla soluzione della equazione omogenea, risolta al paragrafo precedente, sommata ad una qualsiasi soluzione particolare della (17.163). È possibile verificare che una tale soluzione particolare ha la forma

$$x(t) = B \cos(\Omega t + \delta) . \quad (17.164)$$

Sostituendo questa nella (17.163), si trova

$$-\Omega^2 B \cos(\Omega t + \delta) - \gamma \Omega B \sin(\Omega t + \delta) + B \omega^2 \cos(\Omega t + \delta) = \frac{F_0}{m} \cos(\Omega t + \Delta) , \quad (17.165)$$

usando le formule di addizione delle funzioni goniometriche e raccogliendo i termini comuni:

$$\begin{aligned} B(\omega^2 - \Omega^2)(\cos \Omega t \cos \delta - \sin \Omega t \sin \delta) - \gamma \Omega B(\sin \Omega t \cos \delta + \cos \Omega t \sin \delta) = \\ = \frac{F_0}{m} (\cos \Omega t \cos \Delta - \sin \Omega t \sin \Delta) , \end{aligned} \quad (17.166)$$

che può essere riscritta

$$\begin{aligned} [B(\omega^2 - \Omega^2) \cos \delta - \gamma \Omega B \sin \delta] \cos \Omega t - [B(\omega^2 - \Omega^2) \sin \delta + \gamma \Omega B \cos \delta] \sin \Omega t = \\ = \frac{F_0}{m} \cos \Delta \cos \Omega t - \frac{F_0}{m} \sin \Delta \sin \Omega t , \end{aligned} \quad (17.167)$$

che, se deve valere per ogni  $t$ , richiede

$$\begin{cases} B(\omega^2 - \Omega^2) \cos \delta - \gamma \Omega B \sin \delta = \frac{F_0}{m} \cos \Delta \\ B(\omega^2 - \Omega^2) \sin \delta + \gamma \Omega B \cos \delta = \frac{F_0}{m} \sin \Delta . \end{cases} \quad (17.168)$$

Moltiplicando la prima per  $\cos \delta$  e la seconda per  $\sin \delta$  e sommando, e viceversa moltiplicando la prima per  $\sin \delta$  e la seconda per  $\cos \delta$  e sottraendo, si ottengono le due equazioni

$$\begin{cases} B(\omega^2 - \Omega^2) = \frac{F_0}{m} \cos(\delta - \Delta) \\ \gamma \Omega B = -\frac{F_0}{m} \sin(\delta - \Delta) \end{cases} \quad \longrightarrow \quad \begin{cases} \cos(\delta - \Delta) = \frac{mB}{F_0} (\omega^2 - \Omega^2) \\ \sin(\delta - \Delta) = -\frac{m\gamma \Omega B}{F_0} \end{cases} \quad (17.169)$$

A questo punto, usando  $\cos^2(\delta - \Delta) + \sin^2(\delta - \Delta) = 1$ , si ottiene

$$\frac{m^2 B^2}{F_0^2} (\omega^2 - \Omega^2)^2 + \frac{m^2 \gamma^2 \Omega^2 B^2}{F_0^2} = 1 \quad \rightarrow \quad B = \frac{F_0}{m \sqrt{(\omega^2 - \Omega^2)^2 + \gamma^2 \Omega^2}}. \quad (17.170)$$

Dalla seconda delle (17.169), dividendo membro a membro, si ottiene

$$\tan(\delta - \Delta) = -\frac{\gamma \Omega}{\omega^2 - \Omega^2}. \quad (17.171)$$

Ricordando che  $\tan(\delta - \Delta) = \frac{\tan \delta - \tan \Delta}{1 + \tan \delta \tan \Delta}$  con semplici calcoli lasciati al lettore studioso si ottiene

$$\tan \delta = -\frac{\gamma \Omega - (\omega^2 - \Omega^2) \tan \Delta}{\omega^2 - \Omega^2 + \gamma \Omega \tan \Delta}. \quad (17.172)$$

Calcolati così i parametri  $B$  e  $\delta$  l'equazione del moto dell'oscillazione in presenza di una forza esterna è<sup>10</sup>

$$x(t) = A e^{-\frac{\gamma}{2}t} \cos(\omega_0 t + \varphi) + B \cos(\Omega t + \delta). \quad (17.173)$$

Dopo un certo tempo il primo addendo, depresso dall'esponenziale, diviene trascurabile e il moto diviene un'oscillazione armonica con pulsazione pari a quella della forza esterna, con ampiezza  $B$  e fase  $\delta$ . Si dice che in questo caso il corpo si muove di un'**oscillazione forzata** dalla forza esterna. Per apprezzare convenientemente il ruolo della fase  $\delta$ , è opportuno definire  $\theta = \delta - \Delta$ ; allora, a regime (cioè dopo lo smorzamento della soluzione dell'omogenea), la legge del moto è

$$x(t) = B \cos(\Omega t + \Delta + \theta); \quad (17.174)$$

in altre parole, il corpo non oscilla in fase con la forza, ma è sfasato di una quantità  $\theta$  data da

$$\theta = -\arctan \frac{\gamma \Omega}{\omega^2 - \Omega^2}. \quad (17.175)$$

è particolarmente istruttivo calcolare l'energia totale dell'oscillatore a regime. Questo evidentemente coincide con il massimo dell'energia cinetica; questa è

$$E_c = \frac{1}{2} m \dot{x}^2(t) = \frac{1}{2} m B^2 \Omega^2 \sin^2(\Omega t + \Delta + \theta), \quad (17.176)$$

il cui massimo è quindi

$$E = \frac{1}{2} m B^2 \Omega^2 = \frac{1}{2} \frac{m \Omega^2 F_0^2}{m^2 (\omega^2 - \Omega^2)^2 + m^2 \gamma^2 \Omega^2}. \quad (17.177)$$

Tale energia è massima quando  $\Omega = \omega$ , infatti facendo la derivata di  $E$  rispetto a  $\Omega$  si trova:

$$\frac{dE}{d\Omega} = \frac{F_0^2 \Omega (\omega^4 - \Omega^4)}{m [(\omega^2 - \Omega^2)^2 + \gamma^2 \Omega^2]^2}, \quad (17.178)$$

che, come si vede, è positiva per  $\Omega < \omega$  e negativa per  $\Omega > \omega$ . In altre parole l'energia dell'oscillatore, cioè l'energia fornita dalla forza esterna al corpo è massima quando la pulsazione forzante coincide con la pulsazione propria dell'oscillatore. In questo caso si parla di condizione di **risonanza**.

Similmente è istruttivo calcolare per quale valore di  $\Omega$  si ha la massima ampiezza. Calcolando la derivata

$$\frac{dB}{d\Omega} = -\frac{F_0}{m} \frac{-4\Omega(\omega^2 - \Omega^2) + 2\gamma^2 \Omega}{2[(\omega^2 - \Omega^2)^2 + \gamma^2 \Omega^2]^{3/2}} = \frac{\Omega F_0}{m} \frac{2(\omega^2 - \Omega^2) - \gamma^2}{[(\omega^2 - \Omega^2)^2 + \gamma^2 \Omega^2]^{3/2}}, \quad (17.179)$$

<sup>10</sup> Si è riportata qui solo la soluzione dell'oscillazione smorzata corrispondente al caso con  $\gamma < 2\omega$ ; negli altri casi, visto che la soluzione dell'omogenea diviene trascurabile dopo un certo tempo, si ottengono risultati simili la cui esplicitazione formale è lasciata al lettore studioso.

si trova che è positiva per  $\Omega^2 < \omega^2 - \gamma^2/2$  ed è negativa per  $\Omega^2 > \omega^2 - \gamma^2/2$ ; l'ampiezza  $B$  è quindi massima per

$$\Omega = \omega \sqrt{1 - \frac{\gamma^2}{2\omega^2}}. \quad (17.180)$$

Se  $\gamma \ll \omega$ , cioè se il coefficiente di attrito è piccolo vale  $\Omega = \omega$  e quindi abbiamo la coincidenza della risonanza energetica con il massimo dell'ampiezza. Nel caso limite in cui l'attrito sia nullo (cosa che evidentemente non corrisponde a nessun caso fisico reale) si vede che nella condizione di risonanza sia l'energia che l'ampiezza divengono infinite, lasciando il caso in questione privato di ogni senso fisico. È possibile inoltre calcolare la potenza media assorbita dall'oscillatore in un periodo:

$$\langle P_{ASS} \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T F(t) \frac{dx}{dt} dt = \frac{F_0}{T} \int_0^T \cos(\Omega t + \Delta) [-\Omega B \sin(\Omega t + \Delta + \theta)] dt; \quad (17.181)$$

questo integrale si calcola facilmente con la sostituzione  $\xi = \Omega t = \frac{2\pi}{T} t$ :

$$\langle P_{ASS} \rangle = -\frac{F_0 \Omega B}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin(\xi + \Delta + \theta) \cos(\xi + \Delta) d\xi; \quad (17.182)$$

che, ricordando la formula di Werner  $\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)]$ , si può riscrivere

$$\langle P_{ASS} \rangle = -\frac{F_0 \Omega B}{4\pi} \int_0^{2\pi} [\sin(2\xi + 2\Delta + \theta) + \sin \theta] d\xi. \quad (17.183)$$

L'integrale del primo addendo dà zero, quello del secondo  $2\pi \sin \theta$ ; quindi rimane

$$\langle P_{ASS} \rangle = -\frac{F_0 \Omega B}{2} \sin \theta = -\frac{F_0 \Omega}{2} \frac{F_0}{m \sqrt{(\omega^2 - \Omega^2)^2 + \gamma^2 \Omega^2}} \sin \theta. \quad (17.184)$$

A questo punto, usando la relazione  $\sin \theta = \frac{\tan \theta}{\sqrt{1 + \tan^2 \theta}}$ , e ricordando la (17.171), si ottiene

$$\sin \theta = -\frac{\frac{\gamma \Omega}{\omega^2 - \Omega^2}}{\sqrt{1 + \frac{\gamma^2 \Omega^2}{(\omega^2 - \Omega^2)^2}}} = -\frac{\gamma \Omega}{\sqrt{(\omega^2 - \Omega^2)^2 + \gamma^2 \Omega^2}}, \quad (17.185)$$

e quindi

$$\langle P_{ASS} \rangle = \frac{F_0 \Omega}{2} \frac{F_0}{m \sqrt{(\omega^2 - \Omega^2)^2 + \gamma^2 \Omega^2}} \frac{\gamma \Omega}{\sqrt{(\omega^2 - \Omega^2)^2 + \gamma^2 \Omega^2}} = \frac{\gamma \Omega^2 F_0^2}{2m [(\omega^2 - \Omega^2)^2 + \gamma^2 \Omega^2]} \quad (17.186)$$

che, come l'energia (si osservi che sono proporzionali), è massima per  $\Omega = \omega$ . L'espressione ora ottenuta va confrontata con la potenza media dissipata in un periodo dalla forza resistente  $F_a = -\beta \frac{dx}{dt}$  (si ricordi che  $\Omega = 2\pi/T$ ):

$$\begin{aligned} \langle P_{DISS} \rangle &= \frac{1}{T} \int_0^T F_a \frac{dx}{dt} dt = -\frac{\beta}{T} \int_0^T \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 dt = -\frac{\beta B^2 \Omega^2}{T} \int_0^T \sin^2 \left( \frac{2\pi}{T} t + \Delta + \theta \right) dt = \\ &= -\frac{\beta B^2 \Omega^2}{2T} \left[ t - \frac{T}{4\pi} \sin 2 \left( \frac{2\pi}{T} t + \Delta + \theta \right) \right]_0^T = \\ &= -\frac{\beta B^2 \Omega^2}{2T} \left[ T - \frac{T}{4\pi} \sin(4\pi + 2\Delta + 2\theta) + \frac{T}{4\pi} \sin(2\Delta + 2\theta) \right] = -\frac{\beta B^2 \Omega^2}{2} = \\ &= -\frac{\gamma \Omega^2 F_0^2}{2m [(\omega^2 - \Omega^2)^2 + \gamma^2 \Omega^2]}, \end{aligned} \quad (17.187)$$

che è uguale ed opposta alla potenza assorbita (17.186).

# 18

## TERMODINAMICA

In questo capitolo si affrontano in modo matematicamente preciso alcune delle grandezze fisiche tipiche della termodinamica, quali lavoro, energia interna, calore, entropia. Si faranno alcuni importanti esempi.

### 18.1 LAVORO DELLE FORZA DI PRESSIONE.

Si consideri una quantità di gas racchiusa in un recipiente di volume  $V$ . Il recipiente è rigido, eccettuata una parte mobile (o pistone) di area  $S$ , a tenuta stagna e perfettamente scorrevole. Si supponga che il gas si trovi in uno stato di equilibrio: la sua pressione uguaglia la pressione esterna,  $p = p_{ext}$ , ed il pistone si trova in quiete. Se il gas viene forzato ad espandersi (ad esempio perché riscaldato) la parete mobile si sposta sino a che non venga raggiunta una nuova situazione di equilibrio: la pressione interna è quindi nuovamente uguale alla pressione esterna. Si supponga che tale spostamento  $dx$  sia infinitesimo.

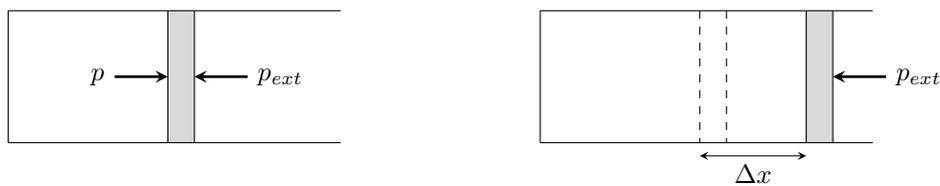


Figura 18.1: Lavoro di una espansione infinitesima.

Il lavoro  $d\mathcal{L}_e$ <sup>1</sup> compiuto dalla forza esterna  $\mathbf{F}_e$ . Vale

$$d\mathcal{L}_e = \mathbf{F}_e \cdot d\mathbf{x} . \quad (18.1)$$

Si noti che i vettori  $\mathbf{F}_e$  e  $d\mathbf{x}$  sono paralleli ma hanno versi opposti. Ne risulta

$$d\mathcal{L}_e = -F_e dx = -p_e S dx = -p_e dV < 0 , \quad (18.2)$$

dove  $dV$  è la variazione infinitesima del volume del recipiente. Il lavoro compiuto *dalla* forza esterna *sul* sistema è quindi *negativo*, ed è in realtà il sistema a compiere lavoro sull'esterno. Poiché la parete scorre senza attrito, il lavoro  $d\mathcal{L}$  compiuto *dal* sistema risulta uguale a quello compiuto *contro* la forza esterna:  $d\mathcal{L} = -d\mathcal{L}_e$ . Perciò

$$d\mathcal{L} = p_e dV . \quad (18.3)$$

Se la trasformazione è quasistatica, cosa che si suppone senz'altro, vale in ogni punto  $p = p_e$  e quindi

$$d\mathcal{L} = p dV . \quad (18.4)$$

Per una trasformazione finita da uno stato di equilibrio  $A$  allo stato di equilibrio  $B$  occorre fare l'integrale

$$\mathcal{L} = \int_{V_A}^{V_B} p dV . \quad (18.5)$$

#### Esempi.

<sup>1</sup> Questo lavoro infinitesimo non è, come si vedrà piú sotto, il differenziale di una funzione di stato. Per evitare fraintendimenti, quindi, si è scelto di denotarlo con il simbolo  $d$ .

**1. Isocore.** Se  $V_A = V_B$  il lavoro è evidentemente nullo.

**2. Isobare.** Se  $p$  è costante, vale

$$\mathcal{L} = p \int_{V_A}^{V_B} dV = p(V_B - V_A) . \quad (18.6)$$

**3. Isoterme.** Se  $T$  costante, vale

$$p = \frac{nRT}{V} \quad \rightarrow \quad \mathcal{L} = nRT \int_{V_A}^{V_B} \frac{dV}{V} = nRT \log V_A - \log V_B = nRT \log \frac{V_A}{V_B} . \quad (18.7)$$

**4. Trasformazione di un gas secondo una legge data.** Si consideri un gas che, a partire da uno stato avente pressione  $p_0$  e volume  $V_0$ , è sottoposto ad una trasformazione termodinamica quasistatica rappresentata sul piano delle fasi dalla curva di equazione

$$p = p_0 \sqrt{\frac{V_0}{V}} \quad (18.8)$$

fino ad arrivare allo stato finale di pressione  $p$  e volume  $V$ . Il lavoro compiuto dal gas è

$$\mathcal{L} = \int_{V_0}^V p dV = p_0 \sqrt{V_0} \int_{V_0}^V \frac{dV'}{\sqrt{V'}} = \left[ 2p_0 \sqrt{V_0 V'} \right]_{V_0}^V = 2p_0 (\sqrt{V_0 V} - V_0) . \quad (18.9)$$

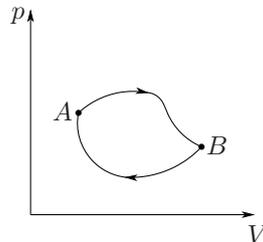
## 18.2 ENERGIA INTERNA.

Si fa osservare che il lavoro infinitesimo *non* è il differenziale di una funzione di stato. Se lo fosse, l'integrale (18.5) avrebbe lo stesso valore qualsiasi fosse la trasformazione termodinamica che collega lo stato  $A$  con lo stato  $B$ , cosa che, com'è noto, non è vera. Similmente è possibile affermare che la quantità di calore  $dQ$  scambiata nel corso di una trasformazione infinitesima non è il differenziale di una funzione di stato.

Ciò che è un differenziale di una funzione di stato è la differenza dei due:

$$dU = d(Q - \mathcal{L}) . \quad (18.10)$$

Per rendersene conto basta richiamare alla mente il principio di equivalenza che afferma che in ogni trasformazione ciclica il calore  $Q$  che il sistema termodinamico scambia con l'esterno è uguale al lavoro totale  $\mathcal{L}$  scambiato dal sistema con l'esterno. Quindi la quantità  $Q - \mathcal{L}$  calcolata su un ciclo è nulla. Si considerino allora due stati qualsiasi  $A$  e  $B$  che vengono toccati dalla trasformazione ciclica. Questa viene così divisa in due trasformazioni: quella da  $A$  a  $B$  e quella da  $B$  ad  $A$ .



**Figura 18.2:** Il ciclo composto di due trasformazioni.

Evidentemente per tale trasformazione ciclica vale

$$0 = (Q - \mathcal{L}) = (Q - \mathcal{L})_{A \rightarrow B} + (Q - \mathcal{L})_{B \rightarrow A} ; \quad (18.11)$$

ma invertendo la trasformazione da  $B$  ad  $A$  si ottiene  $(Q - \mathcal{L})_{B \rightarrow A} = -(Q - \mathcal{L})_{A \rightarrow B}$ , e quindi si sono costruite due trasformazioni che collegano  $A$  con  $B$  per cui vale (per distinguere le due trasformazioni, a quella che è stata invertita è stato aggiunto un apice: ')

$$(Q - \mathcal{L})_{A \rightarrow B} = (Q - \mathcal{L})'_{A \rightarrow B} . \quad (18.12)$$

Quindi qualsiasi sia la trasformazione, la quantità  $(Q - \mathcal{L})_{A \rightarrow B}$  dipende solo dagli stati iniziale e finale. Quindi deve esistere una funzione di stato, che viene denotata con  $-U$ , per cui si possa scrivere

$$(Q - \mathcal{L})_{A \rightarrow B} = - \int_A^B dU = U(A) - U(B) = -\Delta U . \quad (18.13)$$

La funzione di stato  $U$  è detta **energia interna**, e l'equazione precedente viene detta **primo principio della termodinamica**.

Per trasformazioni termodinamiche infinitesime il primo principio si scrive:

$$dQ = dU + d\mathcal{L} . \quad (18.14)$$

### 18.2.1 TRASFORMAZIONI ISOCORE.

Nel caso di trasformazioni isocore la quantità infinitesima di calore scambiato è un differenziale, che dipende solo da  $T$

$$dQ = dU , \quad (18.15)$$

quindi:

$$dU = \frac{dQ}{dT} dT . \quad (18.16)$$

Ma  $\frac{dQ}{dT} = nC_V$ , quindi

$$dU = nC_V dT . \quad (18.17)$$

Ricordando che  $U$  dipende solo da  $T$ , questa relazione vale per qualsiasi trasformazione per cui si abbia una variazione finita  $\Delta T$  della temperatura. Nel caso di una trasformazione finita la relazione precedente viene integrata e diviene

$$\Delta U = U(B) - U(A) = nC_V \int_{T_A}^{T_B} dT = nC_V(T_B - T_A) = nC_V \Delta T . \quad (18.18)$$

### 18.2.2 TRASFORMAZIONI ISOBARE. RELAZIONE DI MAYER.

Nel caso di una trasformazione isobara infinitesima il primo principio diviene

$$dQ = p dV + nC_V dT . \quad (18.19)$$

ma se  $p$  è costante, differenziando l'equazione di stato  $pV = nRT$  si ottiene

$$p dV = nR dT , \quad (18.20)$$

anche in questo caso quindi  $dQ$  è il differenziale di una funzione della sola  $T$ :

$$dQ = n(R + C_V) dT . \quad (18.21)$$

quindi

$$\frac{dQ}{dT} = n(R + C_V) . \quad (18.22)$$

ma il primo membro è la capacità termica a pressione costante  $nC_p$ , quindi si trova la **relazione di Mayer**:

$$C_p = R + C_V . \quad (18.23)$$

### 18.3 EQUAZIONE DELLE TRASFORMAZIONI ADIABATICHE.

Si vuol qui ottenere esplicitamente l'equazione della curva che rappresenta una generica trasformazione adiabatica sul piano delle fasi  $pV$ . Si osservi che il primo principio in forma infinitesima può essere scritto nella forma

$$dQ = nC_V dT + p dV . \quad (18.24)$$

Nel caso di adiabatiche vale quindi

$$nC_V dT + p dV = 0 . \quad (18.25)$$

Si consideri ora il differenziale dell'equazione di stato dei gas  $pV = nRT$ :

$$p dV + V dp = nR dT , \quad (18.26)$$

utilizzando la (18.25), si ottiene facilmente

$$p dV + V dp = -\frac{R}{C_V} p dV \quad \longrightarrow \quad p \left( \frac{C_V + R}{C_V} \right) dV = -V dp \quad (18.27)$$

da cui, usando la relazione di Mayer, si trova

$$\frac{C_p}{C_V} \frac{dV}{V} = -\frac{dp}{p} . \quad (18.28)$$

Definendo  $\gamma = \frac{C_p}{C_V}$  e integrando fra due stati  $A$  e  $B$ , si trova

$$\gamma \int_{V_A}^{V_B} \frac{dV}{V} = - \int_{p_A}^{p_B} \frac{dp}{p} , \quad \longrightarrow \quad \gamma \log V \Big|_{V_A}^{V_B} = - \log p \Big|_{p_A}^{p_B} , \quad (18.29)$$

da cui

$$\log (p_A V_A^\gamma) = \log (p_B V_B^\gamma) . \quad (18.30)$$

Poiché gli stati  $A$  e  $B$  sono arbitrari è chiaro che la quantità  $pV^\gamma$  è la stessa per ogni stato dell'adiabatica. L'equazione cercata è quindi

$$p V^\gamma = \text{cost} . \quad (18.31)$$

### 18.4 DISUGUAGLIANZA DI CLAUSIUS E ENTROPIA.

È noto che se un sistema termodinamico compie una trasformazione ciclica scambiando calore con  $N$  sorgenti di calore, vale la disuguaglianza di Clausius<sup>2</sup>:

$$\sum_{i=1}^N \frac{Q_i}{T_i} \leq 0 , \quad (18.32)$$

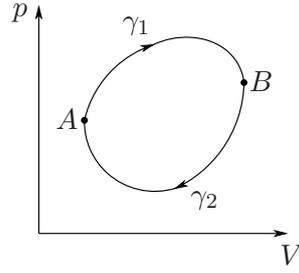
ove  $Q_i$  è il calore, positivo o negativo, scambiato con l' $i$ -esima sorgente avente temperatura  $T_i$ . In particolare la relazione vale con il segno di uguaglianza se il ciclo è reversibile.

Se il sistema termodinamico scambia calore in modo continuo con infinite sorgenti di calore la somma di Clausius diventa un integrale che, essendo calcolato su trasformazioni cicliche, si indica con

$$\oint \frac{dQ}{T} \leq 0 . \quad (18.33)$$

Si considerino ora due stati termodinamici  $A$  e  $B$  e si consideri la trasformazione reversibile  $\gamma_1$  da  $A$  a  $B$  ed una trasformazione reversibile  $\gamma_2$  da  $B$  ad  $A$ . Le due trasformazioni sono reversibili

<sup>2</sup> Rudolf Clausius (1822-1888), fisico tedesco.



**Figura 18.3:** Le due trasformazioni reversibili.

quindi la disuguaglianza di Clausius vale come uguaglianza, quindi

$$\oint \frac{dQ}{T} = \int_{\gamma_1} \frac{dQ}{T} + \int_{\gamma_2} \frac{dQ}{T} = 0 \quad (18.34)$$

e quindi

$$\int_{\gamma_1} \frac{dQ}{T} = - \int_{\gamma_2} \frac{dQ}{T} \quad (18.35)$$

Ma percorrendo la trasformazione  $\gamma_2$  in verso contrario da  $A$  a  $B$  i calori scambiati cambiano segno e quindi cambia segno l'integrale di Clausius lungo  $\gamma_2$ . Pertanto la quantità

$$\int_A^B \frac{dQ}{T} \quad (18.36)$$

è indipendente dalla trasformazione seguita ma dipende solo dagli stati iniziale e finale. Si può dimostrare che esiste una funzione dello stato termodinamico, indicata tradizionalmente con  $S$ , tale che valga

$$\frac{dQ}{T} = dS, \quad (18.37)$$

Si osservi infatti che vale

$$\int_A^B \frac{dQ}{T} = \int_A^B dS = S(B) - S(A). \quad (18.38)$$

La funzione di stato  $S$  così definita è detta **entropia**.

#### 18.4.1 CALCOLO DELLA VARIAZIONE DI ENTROPIA IN ALCUNI CASI IMPORTANTI.

**Trasformazioni adiabatiche reversibili.** Vale  $dQ = 0$ , quindi l'entropia resta costante.

$$S(B) - S(A) = 0 \quad \longrightarrow \quad S(B) = S(A). \quad (18.39)$$

**Trasformazioni isoterme reversibili.** Per un gas perfetto, se  $T$  è costante esce dall'integrale e si ottiene

$$\Delta S = \frac{1}{T} \int_A^B dQ = \frac{1}{T} \int_A^B d\mathcal{L} = \frac{1}{T} \int_A^B nRT \frac{dV}{V} = nR \log \frac{V_B}{V_A}. \quad (18.40)$$

Se il sistema è generico l'integrale dà semplicemente il calore scambiato dal sistema.

$$\Delta S = \frac{Q}{T}. \quad (18.41)$$

**Trasformazioni termodinamiche di un gas perfetto.** In generale per un gas perfetto vale

$$dQ = nC_v dT + pdV, \quad (18.42)$$

quindi

$$dS = nC_v \frac{dT}{T} + p \frac{dV}{T} ; \quad (18.43)$$

ma  $\frac{p}{T} = \frac{nR}{V}$  quindi

$$\Delta S = \int_A^B \left( nC_v \frac{dT}{T} + nR \frac{dV}{V} \right) , \quad (18.44)$$

così:

$$\Delta S = n \left[ C_v \log \left( \frac{T_B}{T_A} \right) + R \log \left( \frac{V_B}{V_A} \right) \right] . \quad (18.45)$$

Il lettore studioso verifichi che da questa relazione si ottengono le precedenti nel caso di trasformazioni adiabatiche o isoterme.

**Corpo solido o liquido che scambia calore.** Si consideri un corpo di capacità termica  $C$  e temperatura  $T_1$  che, posto a contatto con un corpo diverso, scambia calore fino ad assumere la nuova temperatura  $T_2$ . La sua variazione di entropia è

$$\Delta S = C \int_{T_1}^{T_2} \frac{dT}{T} = C \log \frac{T_2}{T_1} . \quad (18.46)$$

Si osservi che la variazione di entropia è positiva quando il corpo aumenta di temperatura, e quindi assorbe calore, e negativo quando diminuisce di temperatura e quindi cede calore.

**Due corpi che scambiano calore.** Si considerino due corpi di capacità termica  $C_1$  e  $C_2$  che inizialmente si trovano alle temperature  $T_1$  e  $T_2$  e che vengono messi a contatto. Dopo un tempo sufficientemente lungo essi raggiungono la temperatura di equilibrio

$$T = \frac{C_1 T_1 + C_2 T_2}{C_1 + C_2} . \quad (18.47)$$

La variazione di entropia complessiva è

$$\Delta S = C_1 \log \frac{T}{T_1} + C_2 \log \frac{T}{T_2} . \quad (18.48)$$

Nel caso particolare in cui i corpi abbiano la stessa capacità termica  $C = C_1 = C_2$  si ottiene  $T = \frac{T_1 + T_2}{2}$  e

$$\Delta S = C \left[ \log \frac{T_1 + T_2}{2T_1} + \log \frac{T_1 + T_2}{2T_2} \right] = C \log \frac{(T_1 + T_2)^2}{4T_1 T_2} , \quad (18.49)$$

che, come si può facilmente dimostrare, è positivo.

# Appendici

# A

## COSTANTI FISICHE

Si riportano qui i valori delle principali costanti fisiche e le masse di alcune particelle [1], [2].

Grandezza	simbolo, equazione	valore
velocità della luce	$c$	$299\,792\,458\text{ m s}^{-1}$
costante di Planck	$h$	$6.626\,070\,15 \times 10^{-34}\text{ J s}$
costante di Planck ridotta	$\hbar = h/2\pi$	$1.054\,571\,817 \times 10^{-34}\text{ J s}$
carica dell'elettrone	$e$	$-1.602\,176\,634 \times 10^{-19}\text{ C}$
massa dell'elettrone	$m_e$	$9.109\,383\,701\,5(28) \times 10^{-31}\text{ kg}$
costante dielettrica del vuoto	$\epsilon_0$	$8.854\,187\,812\,8(13) \times 10^{-12}\text{ F m}^{-1}$
permeabilità magnetica del vuoto	$\mu_0/4\pi$	$1.000\,000\,000\,55(15)\text{ F m}^{-1}$
costante di struttura fine	$\alpha = e^2/4\pi\epsilon_0\hbar c$	$7.297\,352\,569\,3(11) \times 10^{-3}$
raggio di Bohr	$r_0 = 4\pi\epsilon_0\hbar^2/m_e e^2$	$0.529\,177\,210\,903(80) \times 10^{-10}\text{ m}$
massa del protone	$m_p$	$1.672\,621\,923\,69(51) \times 10^{-27}\text{ kg}$
massa del neutrone	$m_n$	$1.008\,664\,915\,95(49) \times 10^{-27}\text{ kg}$
costante gravitazionale	$G$	$6.674\,30(15) \times 10^{-11}\text{ m}^3\text{ kg}^{-1}\text{ s}^{-2}$
accelerazione gravitazionale standard	$g$	$9.806\,65\text{ m s}^{-2}$
costante di Avogadro	$N_A$	$3.022\,140\,76 \times 10^{23}\text{ mol}^{-1}$
costante di Boltzmann	$k$	$1.380\,649 \times 10^{-23}\text{ J K}^{-1}$
costante di Wien	$b = \lambda_{max}T$	$2.897\,771\,955 \times 10^{-3}\text{ m K}$
costante di Stefan-Boltzmann	$\sigma$	$5.670\,374\,419 \times 10^{-8}\text{ W m}^{-2}\text{ K}^{-4}$

Le cifre fra parentesi sono gli errori sperimentali sulle ultime cifre misurate.

Le grandezze per le quali non compaiono errori sono considerate esatte; cioè sono definite, non misurate.

## BIBLIOGRAFIA

---

- [1] Zyla, P.A. et al. «Review of Particle Physics». *PTEP* **2020**, (2020), 083C01. URL: [https://pdg.lbl.gov/2021/listings/contents\\_listings.html](https://pdg.lbl.gov/2021/listings/contents_listings.html).
- [2] Standard, National Institute of e Technology. *Physical Reference Data*. URL: <https://physics.nist.gov/cuu/index.html>.
- [3] Fermi, Enrico. *Termodinamica*. Programma di matematica, fisica elettronica. Bollati Boringhieri, 1972.
- [4] Einstein, Albert. *Opere scelte*. Bollati Boringhieri, 1988.
- [5] Pais, Abraham. *Sottile è il Signore... La scienza e la vita di Albert Einstein*. Bollati Boringhieri. I Grandi Pensatori. Bollati Boringhieri, 2015.
- [6] Rossi, Paolo. *Storia della scienza moderna e contemporanea*. TEA, 2000.
- [7] Euclide. *Tutte le opere*. Bompiani, Milano, 2007.
- [8] Bettini, Alessandro. *Le onde e la luce*. Zanichelli/Decibel, 1993.
- [9] Galilei, Galileo. *Dialogo sopra i due massimi sistemi del mondo tolemaico e copernicano*. Einaudi, Torino, 1970.
- [10] Galilei, Galileo. *Opere*. Vol. I. UTET, Torino, 2005.
- [11] Einstein, Albert. *Relatività: esposizione divulgativa*. Bollati Boringhieri Saggi. Bollati Boringhieri, 2010.
- [12] Landau, Lev Davidovič e Lifšits, Evgenij Michajlovič. *Teoria dei Campi*. Vol. 2. Fisica teorica. Editori Riuniti, 1976.
- [13] Feynman, Richard Phillips. *La fisica di Feynman*. Zanichelli, 2017.
- [14] Weinberg, Steven. *La scoperta delle particelle subatomiche*. Nuovi classici della scienza. Zanichelli, 1986.
- [15] Rostagni, Antonio. *Fisica generale*. Vol. Secondo - parte prima: Elettrologia e Ottica. UTET, 1978.
- [16] Roberto Fieschi, cur. *Enciclopedia della fisica*. Vol. 1. ISEDI, 1976.
- [17] Planck, Max. *The Theory of Heat Radiation*. Dover Books on Physics Series. Dover Publications, 1991.
- [18] Paffuti, Giampiero. *Note sulla nascita della Meccanica Quantistica*. Didattica e ricerca: Manuali. Plus, 2009.
- [19] Ghirardi, Gian Carlo. *Un'occhiata alle carte di Dio. Gli interrogativi che la scienza moderna pone all'uomo*. Saggi. Tascabili. Il Saggiatore Tascabili, 2009.
- [20] Jackson, John David. *Classical Electrodynamics*. John Wiley & Sons, 1975.
- [21] Jackson, John David. *Elettrodinamica classica*. Collana di fisica. Testi e manuali. Zanichelli, 2001.
- [22] Reichenbach, Hans. *Filosofia dello spazio e del tempo*. Feltrinelli, 1977.
- [23] Maxwell, James Clerk. *A Dynamical Theory of the Electromagnetic Field*. Wipf & Stock, 1996.
- [24] Maxwell, James Clerk. *A Treatise on Electricity and Magnetism*. Dover, 1954.

# Indice analitico

- Ångstrom, 250
  - unità di misura atomica, 250
- Aberrazione stellare, 79
- Accelerazione, 272
- Altezza di un suono, 24
- Ampère, 158, 179
  - legge di, 167–172
  - postulato di equivalenza di, 201
- Ampere
  - unità di misura della corrente elettrica, 143, 170
- Ampiezza
  - di un moto armonico, 4
  - di un'onda, 14
- Angolo
  - di incidenza, 32, 42
  - di riflessione, 32
  - di rifrazione, 42
  - limite, 45
- Angolo solido, 59, 102
- Anioni, 154
- Anodo, 154, 240
- Approssimazione dipolare, 98, 117
- Archimede, 243
- Armatatura, 126
- Asse ottico
  - cristalli anisotropi, 73
  - diottra sferica, 48
  - specchio sferico, 34
- Avogadro, 156
  - legge di, 239
  - numero di, 156, 239, 244
- Azione a distanza, 86
  
- Balmer, 248
  - serie di, 248, 250
- Barlow, 165
- Bartholin, 73
- Battimenti, 8
- Biot, 167
- Biot e Savart
  - legge di, 172
- Bohr, 104, 249
  - modello di, 262
  - postulati di, 249
  - raggio di, 248, 250
  
- Boltzmann, 141
  - costante di, 141
- Born, 268
- Brachistocrona, 31
- Brackett, 249
  - serie di, 249, 250
- Bradley, 79, 84
  - misura della velocità della luce di, 79
  
- Camera oscura, 30
- Campo, 86
  - scalare, 86
  - vettoriale, 86
    - irrotazionale, 90
- Campo elettrico indotto, 180
- Campo elettromagnetico, 178, 212
- Campo magnetico indotto, 181
- Candela, 59
- Cannocchiale, 57
- Carica di prova, 96
- Carica elettrica, 142
  - densità di, 97, 104–138, 164
  - elementare, 96
  - quantizzazione della, 92
- Cationi, 154
- Catodo, 154, 240
- Caustica di riflessione, 41
- Ciclo di isteresi magnetica, 204
- Circuitazione
  - del campo elettrico, 121
  - del campo magnetico, 167
- Clausius, 296
- Clausius, disuguaglianza di, 296
- Coefficiente di accoppiamento, 188
- Coefficiente di autoinduzione, 185
- Coefficienti di induzione mutua, 187
- Compton, 263
  - diffusione, 263
  - lunghezza d'onda, 264
- Conduttori, 91
  - di prima specie, 147
  - di seconda specie, 147
  - ohmici, 143
- Coordinate polari, 273
- Corpo nero, radiazione del, 254
- Corpo rigido, crisi del modello del, 231

- Corrente di spostamento, 208  
 Corrente elettrica concatenata, 167  
 Correnti amperiane o molecolari, 201  
 Costante dielettrica  
   del vuoto, 96  
   assoluta, 135  
   relativa, 135  
 Coulomb, 92  
   legge di, 95  
   unità di misura della carica elettrica, 92, 170  
 Cristalli biassici, 76  
 Cristallino, 56  
 Criterio del quarto d'onda, 69  
 Cuneo d'aria, 64  
 Curie, 205  
   temperatura di, 205  
 Dalton, 238–240  
   teoria atomica di, 239  
 Davisson, 262  
 Davisson e Germer, esperimento di, 262  
 de Broglie, 262, 266  
 Democrito, 238  
 Densità della corrente elettrica, 143, 163  
 Densità di energia  
   del campo elettrico, 130  
   del campo magnetico, 187  
 Derivata, 271  
 Descartes, 29  
   modello corpuscolare di, 29  
 Dicroismo, 76  
 Differenza dei cammini ottici, 61  
 Differenza di potenziale elettrico, d.d.p., 113  
 Diottria, 50, 51  
 Diottro sferico, equazione del, 49  
 Dipolo elettrico, 98  
   atomico, 133  
   momento di, 98, 109  
 Dipolo magnetico, 166  
 Dispositivo stigmatico, 34  
 Distanza della visione distinta, 56  
 Distanza focale  
   di un diottro sferico, 50  
   di una lente sottile, 51  
 Doppia rifrazione, 73  
 Doppler, 20  
   effetto, 20–22  
   effetto relativistico, 226–228  
 Dufay, 91  
 Eclisse, 30  
 Einstein, 209, 216, 217, 221, 249, 262  
   spiegazione dell'effetto fotoelettrico, 257  
 Elettricità  
   resinosa, 91  
   vetrosa, 91  
 Elettrodi, 154  
 Elettrolisi, 154  
 Elettrone, 242  
   carica dell', 244  
   carica elettrica dell', 92  
 Elettroni di conduzione, 92, 123  
 Energia cinetica  
   teorema dell', 281  
 Energia di ionizzazione, 146  
 Energia meccanica, 281  
 Equazione del fabbricante di lenti, 51  
 Equilibrio stabile  
   impossibilità dell', 103  
 Equivalente elettrochimico, 155  
 Esperimento ideale, 217  
 Etere, 82  
 Euclide, 29, 64  
   ottica di, 29, 214  
 Evento, 229  
 Farad, 126  
 Faraday, 126, 179, 244  
   costante di, 155, 244  
   leggi di, 155  
 Fascio di raggi omocentrico, 34  
 Fase di un moto armonico, 4  
 Fattore di potenza, 198  
 Fattore di qualità, 196, 199  
 Felici, 182  
 Fenditura, 65  
 Fermat, 31  
   principio di, 31–41, 54  
 Ferraris, 198  
   legge di Galileo, 198  
 Feynman, 141  
 Filtro  
   passa alto, 192  
   passa banda, 197  
   passa basso, 192  
 Fizeau, 80  
   misura della velocità della luce di, 80  
 Flusso  
   del campo elettrico, 101  
   del campo magnetico, 168, 181  
 Forza conservativa, 281  
 Forza controlettromotrice, 185  
 Forza elettromotrice indotta, 180  
 Fotone, 257  
 Foucault, 80  
   misura della velocità della luce di, 80  
 Fourier, 7  
   teorema di, 7, 20  
 Franklin, 91  
 Frequenza, 4

- di un'onda, 14
- fondamentale, 19
- Frequenza di taglio, 192
- Frequenze armoniche, 20
- Fresnel, 29
  - modello ondulatorio, 29
  - specchi di, 63
- Fronte d'onda, 15
- Funzione d'onda, 12, 15
  - particella libera, 266
  - particella non libera, 267
- Fuoco
  - di uno specchio sferico concavo, 36
  - di uno specchio sferico convesso, 39
- Galilei, 78, 216, 271
  - Dialogo sopra i massimi sistemi*, 214
  - misurazione della velocità della luce, 78
  - principio di relatività, 214
- Gauss, 102, 168
  - unità di misura del campo magnetico, 159
- Gay-Lussac
  - leggi di, 239
- Geiger, 246
- Generatore di tensione, 137
- Germer, 262
- Gilbert, 91, 157
- Giove, satelliti di, 78
- Grandezze invarianti, 229
- Gray, 91
- Guericke, 91
- Hall, 162
- Heisenberg, 265–267
- Henry, 185
  - unità di misura dell'induttanza, 185
- Hertz, 4, 209
  - effetto fotoelettrico, 255
  - raggi catodici, 240
  - unità di misura, 4, 82
- Hooke, 4
  - legge di, 4, 5
- Huygens, 23
  - calcolo della velocità della luce, 79
  - modello ondulatorio, 29
  - principio di, 23, 65
- Illusioni ottiche, 44
- Immagine, 33
  - reale, 34
  - virtuale, 34
- Impedenza, 200
- Indeterminazione
  - posizione-quantità di moto, 265
  - tempo-energia, 265
- Indice di rifrazione
  - assoluto, 43
  - relativo, 43
- Induttanza, 185
- Induzione elettrostatica completa, 95, 125, 126
- Ingrandimento angolare, 56
- Ingrandimento trasversale
  - specchio sferico concavo, 38
  - specchio sferico convesso, 39
- Intensità di un suono, 24
- Intensità luminosa, 59
  - della luce polarizzata, 75
- Interferenza
  - costruttiva, 7, 18
  - distruittiva, 7, 18
- Intervallo, 229
  - di tipo luce, 230
  - di tipo spazio, 230
  - di tipo tempo, 230
- Invertibilità dei cammini ottici, 34
- Inviluppo, 23
- Isolanti, 91
- Jeans, 254
- Joule, 148
  - effetto, 148
- Kepler, 285
  - leggi di, 286–288
- Kirchhoff, 252
  - leggi di, 252
- Lamina sottile, 63
- Lamina trasparente, 46
- Laplace, 164, 179
  - prima legge elementare di, 172
  - seconda legge elementare di, 164
- Lavoisier, 238
- Legame metallico, 92
- Legge dei punti coniugati, 35
- Legge delle proporzioni definite, 238
- Legge delle proporzioni equivalenti, 239
- Legge delle proporzioni multiple, 238
- Legge di Ohm generalizzata, 200
- Leibniz, 271
- Lente, 50
  - convergente, 52
  - distanza focale della, 51
  - distanza iperfocale della, 70
  - divergente, 53
- Lente d'ingrandimento, 56
- Lenz, 180
  - legge di, 181
- Leucippo, 238
- de L'Hôpital, 279
- Limite non relativistico, 221
- Lorentz, 158, 224

- forza di, 158–163, 175
- trasformazioni di, 175, 224–237, 265
- Lunghezza d'onda, 12, 15
- Lunghezza propria, 225
- Lyman, 249
  - serie di, 249, 250
- Mac Laurin, 279
- Mach, 23, 240
  - cono di, 23
  - numero di, 23
- Magnesia, 157
- Magnete permanente, 205
- Magnetite (FeO·Fe<sub>2</sub>O<sub>3</sub>), 157
- Magnetizzazione, 202
- Malus, 77
  - legge di, 77
- Marsden, 246
- Massa ridotta, 286
- Maxwell, 207, 216
- Mendeleev, 244
- Michelson, 81, 84
  - misura della velocità della luce di, 81
- Michelson e Morley, esperimento di, 82–84, 217
- Microscopio
  - composto, 56
  - semplice, 56
- Millikan, 243
  - esperimento della goccia d'olio, 243
- Miraggio, 44
- Modello della propagazione ondosa, 23
- Modello dipolare dell'acqua, 119
- Modulo di compressione, 26
- Momento angolare o della quantità di moto, 283
  - conservazione del, 284
- Momento magnetico, 166
- Morley, 84
- Moto armonico, 277
- Moto armonico ellittico, 9
- Moto circolare uniforme, 2
- Moto irrotazionale di un liquido, 90
- Neumann, 180
- Newton, 4, 73, 76, 216, 252, 271
  - anelli di, 64
  - legge di, 86
  - leggi di, 4, 14, 16, 275
  - modello corpuscolare di, 29
  - notazione di, 271
  - principio di relatività, 214
- Obiettivo, 57
- Oculare, 57
- Ohm, 144
  - unità di misura della resistenza elettrica, 144
- Ombra, 30
- Onda, 11
- Onde
  - armoniche, 12
  - coerenti, 60
  - longitudinali, 14
  - trasversali, 14
  - uni-, bi-, tri-dimensionali, 15
- Ørsted, 157
- Oscillazione
  - in fase, 12
  - in opposizione di fase, 12
- Parafulmini, 126
- Particelle  $\alpha$ , 246
- Paschen, 249
  - serie di, 249, 250
- Periodo di un'onda, 14
- Permeabilità magnetica
  - assoluta, 204
  - del vuoto, 167
  - relativa, 204
- Perrin, 241, 244
- Pfund, 249
  - serie di, 249, 250
- Plücker, 240
- Planck, 255
  - costante di, 249, 255–258, 262
- Planck-Einstein, relazione di, 257, 262, 267
- Polarizzazione
  - di un dielettrico, 133
  - ellittica, 74
  - rettilinea, 74
  - vettore di, 133
- Poli magnetici, 157
- Potenza
  - reale, 198
  - reattiva, 198
- Potenza irradiata, 59
- Potenziale d'arresto, 256
- Potere assorbente, 252
- Potere convergente, 51
- Potere diottrico, 50, 51
- Potere emissivo, 252
- Potere risolvante di un reticolo di diffrazione, 71
- Primo principio della termodinamica, 295
- Principio di conservazione dell'energia, 181
- Principio di conservazione della carica elettrica, 92
- Principio di conservazione della massa, 238
- Principio di costanza della velocità della luce, 216
- Principio di Fermat, 45
- Principio di omogeneità del tempo, 217

- Principio di omogeneità e isotropia dello spazio, 217
- Principio di relatività, 175, 214, 216
- Prisma, 46
- Propagazione luminosa  
  modello corpuscolare della, 29  
  modello ondulatorio della, 29
- Proust, 238
- Pulsazione, 2
- Punte, proprietà delle, 125
- Punti coniugati, 34  
  lente sottile, 51
- Quanto, 257
- Rømer, 78  
  misura della velocità della luce di, 78
- Raggi coniugati, 34
- Raggio rifratto  
  ordinario, 73  
  straordinario, 73
- Rapporto di convergenza, 49
- Rayleigh, 68  
  criterio del quarto d'onda, 69  
  criterio di, 68, 71
- Rayleigh-Jeans, legge di, 254
- Reattanza, 200
- Red-shift, 228
- Reichenbach, 217
- Resistenza elettrica, 144
- Resistenza equivalente, 150
- Resistenza interna, 148
- Resistività, 144
- Retina, 56
- Richter, 239
- Riflessione totale, 45
- Risonanza, 195, 197, 291
- Rutherford, 104, 246–249  
  esperimento della foglia d'oro, 246  
  instabilità dell'atomo di, 247
- Rydberg, 248  
  costante di, 248
- Saturazione, 204
- Savart, 167
- Schermo elettrostatico, 125
- Schrödinger, 268  
  equazione di, 268
- Secondo principio della termodinamica  
  enunciato di Kelvin, 253
- Segno dei portatori di carica elettrica, 163
- Simultaneità  
  definizione operativa della, 217–219
- Sistema di riferimento, 214
- Snell, 41, 44
- Snell-Descartes, legge di, 41
- Soluzione elettrolitica, 154
- Spato d'Islanda, 73
- Specchio  
  ellittico, 40  
  parabolico, 41  
  sferico concavo, 34–39  
  sferico convesso, 39–41
- Spettro, 72  
  di assorbimento, 248  
  di emissione, 248
- Spruzzamento catodico, 242
- Stefan, 254
- Stefan-Boltzmann, costante di, 254
- Stefan-Boltzmann, legge di, 254
- Steradiante, 59, 103
- Superconduttori, 146
- Suscettività dielettrica, 134
- Suscettività magnetica, 204
- Talete, 91
- Tempo caratteristico  
  del circuito  $RC$ , 151  
  del circuito  $RL$ , 186
- Tempo proprio, 225
- Tesla, 159  
  unità di misura del campo magnetico, 159
- Thomson, 241  
  modello atomico, 244–246
- Timbro di un suono, 24
- Tormalina, 76
- Traformazioni termodinamiche, 293
- Tubo catodico, 241–242
- Velocità, 271  
  angolare, 2  
  areolare, 275  
  del suono in aria, 27  
  di un'onda, 14, 15
- Velocità della luce, 31, 43, 81
- Vettore di magnetizzazione, 203
- Vettore rotante, 6, 199
- Volt, 114
- Volta, 114, 146–147, 154
- Weber, 168  
  unità di misura del flusso magnetico, 168
- Wien, 254
- Wien, legge dello spostamento di, 254
- Young, 29  
  fori di, 59, 62, 63  
  modello ondulatorio, 29